



# USO DE GEOMETRÍAS FRACTALES PARA EL DISEÑO DE LENTES ULTRASÓNICAS

Sergio Castiñeira-Ibáñez<sup>1</sup>, Daniel Tarrazó-Serrano<sup>2</sup>, Constanza Rubio<sup>2</sup>, Antonio Uris<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Electrónica, Universitat de València. Avd. de la Universitat s/n. 46100 Burjassot, Valencia, Spain  
[casiser@uv.es](mailto:casiser@uv.es)

<sup>2</sup> Centro de Tecnologías Físicas, Universitat Politècnica de València. Camino de Vera s/n. 46022 Valencia, Spain  
[datarser@gmail.com](mailto:datarser@gmail.com), [crubiom@fis.upv.es](mailto:crubiom@fis.upv.es), [auris@fis.upv.es](mailto:auris@fis.upv.es)

## Resumen

Uno de los objetivos más importantes a la hora de diseñar lentes ultrasónicas se centra en la mejora de la focalización de las mismas. Por otro lado, las estructuras construidas siguiendo geometrías fractales están suscitando un gran interés científico habiéndose utilizado en múltiples aplicaciones. En este trabajo se muestran diferentes lentes ultrasónicas diseñadas siguiendo diferentes geometrías fractales. Estos diseños se han realizado mediante Elementos Finitos y los resultados obtenidos muestran grandes posibilidades para que estas lentes puedan ser utilizadas en HIFU.

**Palabras-clave:** Focalización del sonido, lentes ultrasónicas, pre-fractal de Cantor

## Abstract

One of the most important purposes when designing an ultrasonic lens, focuses on improving targeting the waves. On the other hand, it is well known the great scientific interest in structures that follow fractal geometries, having been used in multiple applications. The improvements, of a set of annular scatterers following a fractal growing, in focusing capabilities is theoretically evaluated in this work. These designs have been performed by means the Finite Element Method. The results obtained with these new type of lenses, show high potential to be used HIFU.

**Keywords:** Sound focusing; Ultrasonic Lens, Cantor pre-fractals

**PACS n°43.35.Bf, 43.35.Yb**

## 1 Introducción

Toda estructura que presente como propiedad de simetría la invarianza de escala, aunque sea sólo en varios rangos, es susceptible de poseer propiedades fractales. Se puede decir que el todo se parece a sus partes [1]. En consecuencia, esta auto-similitud es como ver un objeto y encontrar la misma forma en su interior, cuando éste se observa con detalle a otra escala. De esta forma, se encontró que ciertos fenómenos naturales, poseen patrones auto-similares. Por ejemplo, los copos de nieve o la estructura de las hojas en ciertas plantas. Las estructuras fractales han atraído el interés de la comunidad científica debido a sus aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia y la tecnología [2].

Entre las aplicaciones ondulatorias de las estructuras fractales, se han realizado varios estudios relacionados con el campo de la acústica. Así, Petri et al. [3] analizaron las propiedades de vibración

de un sistema continuo jerárquico consistente en una secuencia tipo Cantor de elementos piezoeléctricos y resina. Sapoval et al. [4] investigaron numéricamente las propiedades acústicas de cavidades irregulares descritos por formas fractales. Demostraron que la irregularidad geométrica mejoraba la densidad modal de baja frecuencia, localizando muchos de los modos en los límites de la cavidad y se modificaron las características de atenuación de la cavidad. Lubniewski y Stepnowski [5] desarrollaron un método simple para la identificación del fondo del mar utilizando elementos de análisis fractal. Castiñeira-Ibáñez et al. [6, 7] presentaron una barrera acústica para el control del ruido formada por cilindros rígidos dispuestos en una geometría fractal de tipo triángulo de Sierpinski. Gómez-Lozano et al. [8] estudiaron la respuesta de transmisión acústica en placas perforadas con una matriz de agujeros de tipo sub-longitud de onda fractal. Los espectros de transmisión de los ultrasonidos mostraron que cada iteración en la Alfombra de Sierpinski tiene los picos y valles característicos relacionados con la constante de red de cada matriz que forma el patrón. Por otra parte, también se ha obtenido la orientación de los haces ultrasónicos de orden MHz son esenciales para la ablación de tejido invasivo.

Basándose en estos estudios, se propone una nueva línea para la construcción de lentes planas, capaces de focalizar haces ultrasónicos, de manera distinta a las lentes convencionales en las que la capacidad de focalización se debe a que están construidas con materiales de refracción con superficies curvas. Por lo tanto, en este trabajo, se propone una lente acústica plana fractal y se analizan numéricamente las propiedades de focalización utilizando el Método de Elementos Finitos.

## 2 Modelo numérico

Análogamente a las lentes ópticas es común el diseño de lentes acústicas planas. En este sentido, se conoce la lente de Fresnel [9], que consiste en un conjunto de anillos con zonas opacas y ranuras transparentes que al interponerse entre la perturbación y el punto de medida produce el fenómeno de difracción y en última instancia, interferencias constructivas y destructivas en planos paralelos al de la lente. En el plano de observación se produce pues, un patrón de difracción consiguiendo que exista focalización en el centro de este plano.

En este trabajo se presenta una lente acústica plana diseñada según geometrías fractales, que siguiendo la misma fenomenología que la lente de Fresnel, consigue resultados interesantes. Esta lente se modeliza teniendo en cuenta los resultados obtenidos por Jaggard and Jaggard [10] a nivel óptico, donde la construcción de la lente sigue la secuencia de Cantor mostrada en la Figura 1.

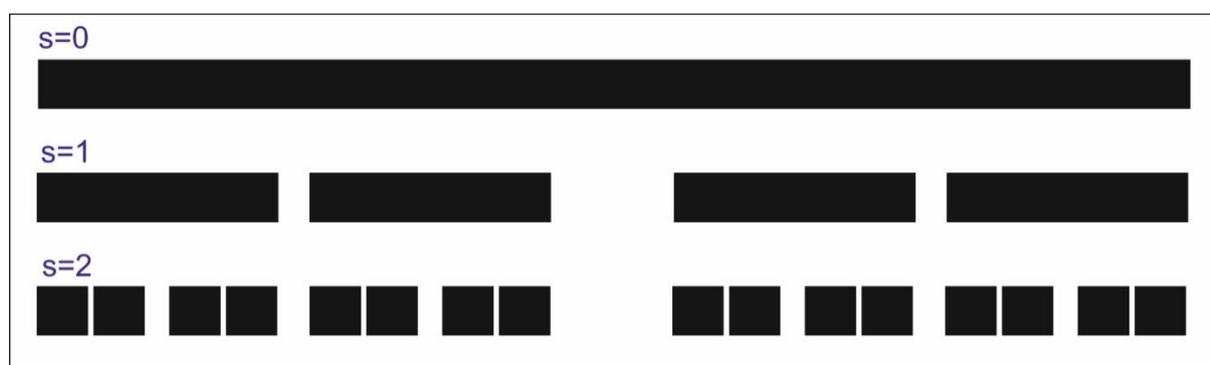


Figura 1: Secuencia de construcción del fractal de Cantor.

Como se ha comentado, el diseño de la lente ultrasónica que se presenta en este trabajo es la traslación al campo de la acústica del diseño presentado por Jaggard and Jaggard [10] para óptica. Al diseño propuesto por estos autores se le ha realizado, una modificación en los radios de los anillos originales, que posteriormente se expondrá y que vienen dados por:

$$a_i = a \sum_{j=1}^s \gamma^{j-1} b_{c_j^{(i)}} \quad (1)$$

donde  $i=0,1,\dots, M-1$  siendo  $M$  el número de anillos que depende a su vez de la etapa ( $s$ ) máxima que se alcanza en la generación de la estructura geométrica fractal, según:

$$M = \frac{1}{2} 4^{s_{\max}} \quad (2)$$

El parámetro  $\gamma$  se denomina factor de escala y se define como:

$$\gamma = (n_{\text{gaps}} + 1)^{-1/D} \quad (3)$$

donde  $n_{\text{gaps}}$  es el número de huecos de cada iteración y  $D$  la dimensión fractal. En este trabajo,  $n_{\text{gaps}} = 3$ ,  $D=9/10$  y se detiene la iteración en  $s=2$ , construyendo pues, un pre-fractal. El coeficiente  $b_{c_j^{(i)}}$  depende del parámetro  $\gamma$  y del tamaño del hueco central que se genera en la primera etapa de la construcción del pre-fractal.

En la Figura 2 se muestra el resultado de la estructura obtenida (plano XZ) con los parámetros más importantes representados. Los radios que se obtienen por la expresión (1) sitúan el centro de los 8 bloques (en negrita) base para la obtención de los 8 anillos de la lente pre-fractal. A partir de los radios  $a_i$  y tomando la anchura de los bloques como  $W = 2a\gamma^2$ , los radios de los anillos se corresponden con la expresión:

$$r_k = a_i \pm W \quad (4)$$

Dicha expresión da lugar a 16 radios, es decir, un radio interior y un radio exterior por cada bloque, medidos desde el eje de rotación (eje  $z$ ).

Para la obtención de la lente pre-fractal, se realiza un giro de  $360^\circ$  sobre el eje  $z$  de rotación de los 8 objetos idénticos de anchura  $W$  y altura  $h$ . La figura obtenida en el plano  $XY$  ( $z=0$ ) es una lente plana, tal y como se puede observar en la Figura 2.

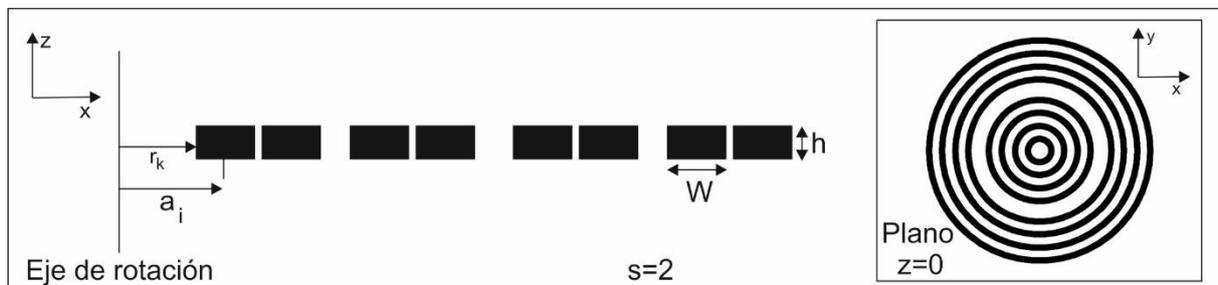


Figura 2: Obtención de la lente pre-fractal (plano XY) mediante la rotación de la estructura obtenida (plano XZ) alrededor del eje  $z$ , según la secuencia de Cantor, hasta la etapa  $s=2$ .

Para la obtención de resultados se ha utilizado el Método de Elementos Finitos (FEM). Este método resuelve, de manera sencilla, formas geométricas complejas que incorporan múltiples fenómenos acústicos. El modelo resuelve en el dominio de la frecuencia, la ecuación de ondas, para analizar el comportamiento de las ondas acústicas al interactuar con sistemas de dispersores aislados inmersos en agua. Para resolver el problema es necesario definir la geometría que se está considerando, implementar las condiciones de contorno y discretizar el dominio de resolución.

Para el caso 2D, y considerando que la onda incidente es plana, la ecuación de ondas (ecuación de Helmholtz) se escribe como:

$$-\nabla\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=\frac{\omega^2}{\rho c^2}p \quad (5)$$

donde  $\rho$  representa la densidad del medio,  $c$  es la velocidad del ultrasonido,  $\omega$  es la frecuencia angular y  $p$  es la presión acústica.

El modelo se puede observar en la Figura 3. Es un modelo axisimétrico en dos dimensiones (2D), donde se representa la construcción pre-fractal original. El propio modelo al ser ejecutado obtiene el campo acústico como si la lente fuera en tres dimensiones (3D) (cuando la solución del plano resuelto rota sobre el eje de axisimetría). Esto lleva a una parametrización del modelo sencilla y a la obtención de resultados con un bajo coste computacional.

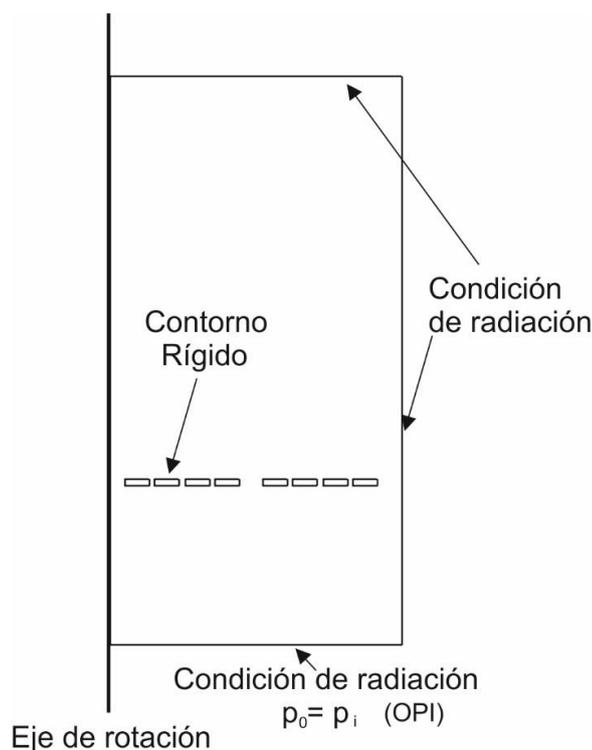


Figura 3: Descripción del modelo numérico utilizado: las condiciones de contorno utilizadas son contorno rígido para los bloques y radiación de onda plana para las paredes del recinto 2D.



La condición contorno rígido es una condición de contorno de tipo Neumann, lo que implica que la derivada parcial de la presión en la superficie es nula. Esto quiere decir que, la amplitud de la presión en la superficie será máxima o mínima. La condición de contorno de radiación permite a la onda salir del dominio de modelado, con reflejos mínimos o nulos, es decir, el campo dispersado consiste sólo en ondas salientes. Esta condición es también llamada condición de Sommerfeld.

Los parámetros utilizados para la resolución del modelo son una malla triangular fina con  $8.8 \times 10^5$  elementos, evaluándose el nivel de presión sonora (SPL) según la expresión:

$$SPL(dB) = 20 \cdot \log_{10} \left| \frac{p}{p_{inc}} \right| \quad (6)$$

donde  $p$  es la presión en el punto evaluado y  $p_{inc}$  la presión de la onda incidente. Es todo el trabajo se ha considerado la onda incidente plana (OPI) y se han representado mapas de presión absoluta en Pa.

### 3 Resultados

Partiendo del modelo numérico descrito, el valor del radio exterior de la lente se ha tomado 0.12233 m con 8 anillos. La anchura de la lente es de  $h = 0.003$  m y la simulación se ha realizado a 200kHz. El medio transmisor es agua de densidad  $1000 \text{ kg/m}^3$  y con una velocidad de propagación del sonido de 1500 m/s. Estos valores vienen condicionados por trabajos análogos con lentes acústicas [9] que se han tomado como referencia.

Se han analizado dos diseños de lentes pre-fractales que a partir de ahora se denominarán: Fractal y Fractal modificado. Así, la lente Fractal es la que se corresponde con la teoría mostrada en la parte numérica de este trabajo. Debido a los resultados obtenidos con ella, se decidió modificar la anchura de los bloques, condicionando estos a ser múltiplo entero de la longitud de onda incidente. A este nuevo diseño se le denominó Fractal modificado. Así pues, la anchura de los bloques  $W$  será:

Tabla 1: Valores de anchura de bloques para las lentes analizadas

Lente pre-fractal	W (m)
Fractal	0.00918
Fractal modificado	0.0075

En la Figura 4, se muestra el nivel de presión (dB) obtenido a lo largo del eje  $z$  (m) para los dos diseños. Se puede observar como la lente Fractal focaliza en  $z = 0.169$  m con un nivel de presión de 13.07 dB, mientras que la fractal modificado lo hace en  $z = 0.138$  m con 20.94 dB. Ambos resultados son buenos pero el segundo diseño aumenta en un 161.5% la ganancia (nivel de presión frente a la unidad).

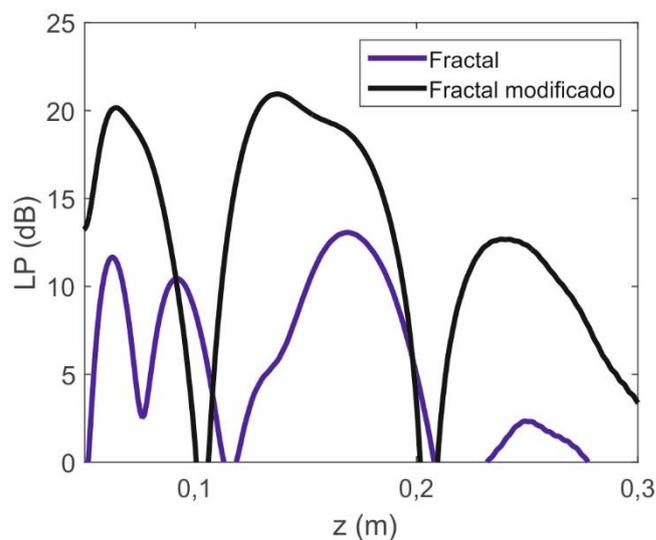


Figura 4: Nivel de presión en decibelios obtenido para distancias comprendidas entre 0 y 0.3 m de la lente sobre el eje axial. En color azul se muestra el resultado para la lente fractal y en color negro para la lente fractal modificada.

Se muestra así mismo, en la Figura 5 el mapa de nivel de presión (dB) a lo largo del plano XZ, donde se puede observar los puntos donde existe focalización. Para el fractal (a) la focalización es más débil que para el fractal modificado (b). Incluso en este caso se observa como el foco es más ancho, resultado interesante para ciertas aplicaciones médicas en HIFU.

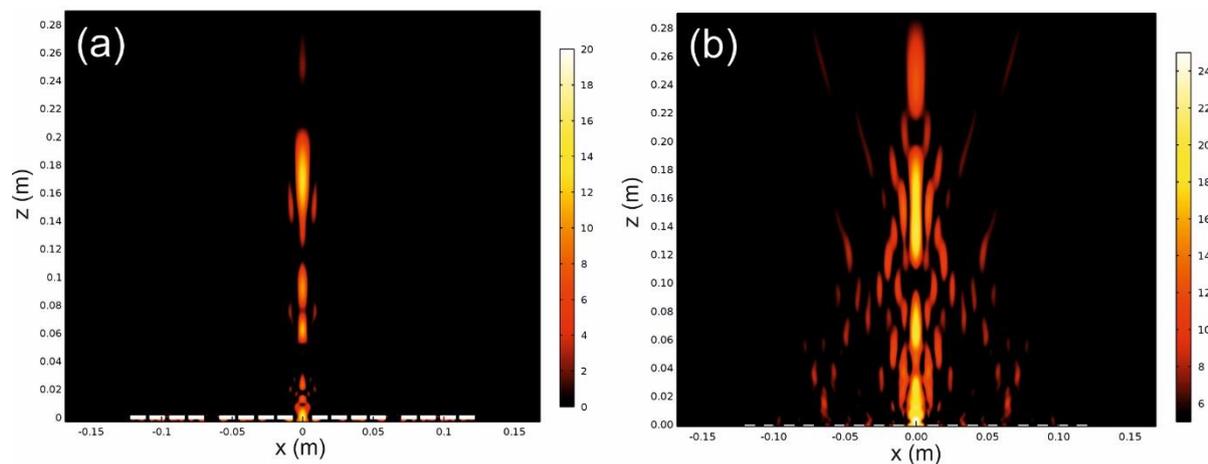


Figura 5: Distribución espacial de nivel de presión acústica (dB) para (a) lente fractal y (b) lente fractal modificada.

En la Figura 6 se muestra, en el plano donde se consigue mayor focalización, la distribución espacial del nivel de presión acústica (dB). Este plano es paralelo a la lente (plano  $z$  constante). En el caso fractal se localiza en  $z=0.169\text{ m}$  (a) mientras que para el caso fractal modificado se localiza en  $z=0.138\text{ m}$  (b).

Por último, en la Figura 7 se representa en el foco la distribución de presión absoluta (Pa) del fractal modificado. Se observa el pico de presión absoluta en  $11.15\text{ Pa}$ , situado en el centro de la línea paralela al diámetro de la lente (eje  $x$ ), pero justo en el plano de focalización ( $z=0.138\text{ m}$ ).

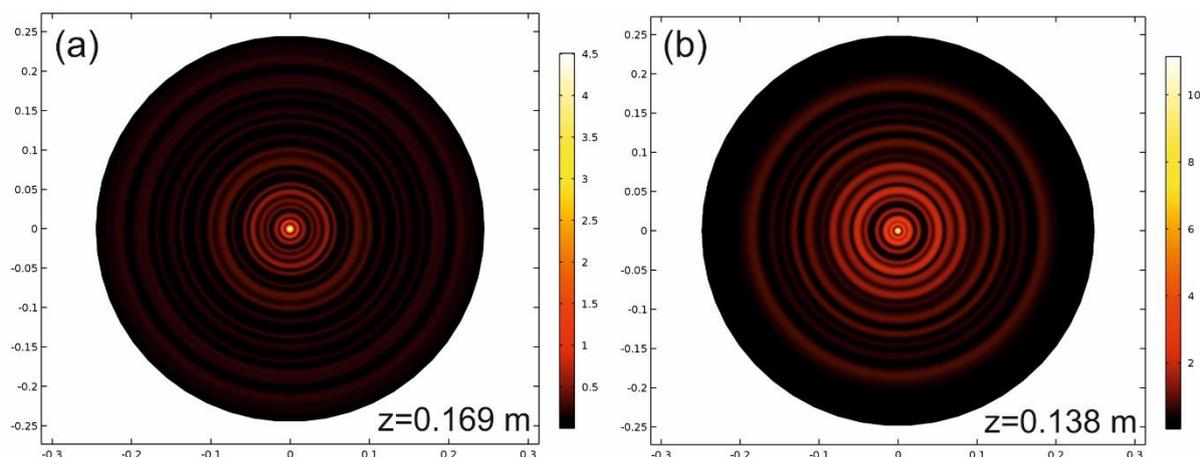


Figura 6: Distribución espacial de nivel de presión acústica (dB), en el plano paralelo a la lente y a distancia  $z$ , para (a) lente fractal ( $z=0.169\text{ m}$ ) y (b) lente fractal modificada ( $z=0.138\text{ m}$ ).

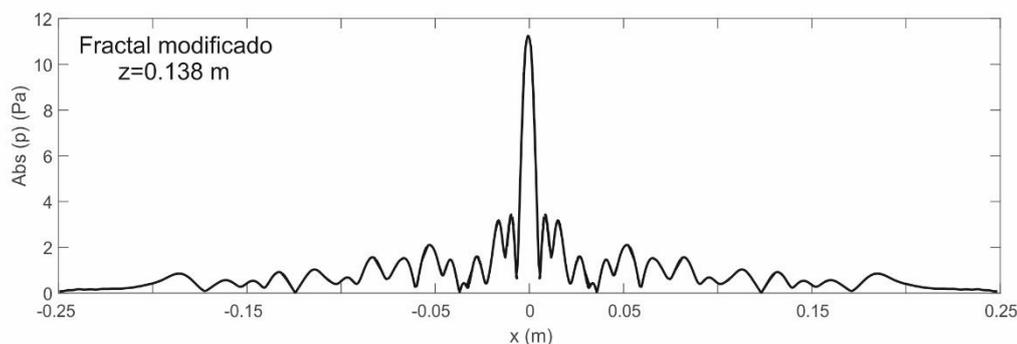


Figura 7: Presión absoluta a lo largo del eje  $x$  para el plano  $z=0.138\text{ m}$  producido por la lente fractal modificada.

## 4 Conclusiones

Se han presentado dos diseños de lentes ultrasónicas: el primero es un diseño en el que se ha tomado directamente de la Óptica y el segundo es una modificación del primero con la finalidad de mejorar su focalización en el campo de la acústica. Ambas lentes se construyen según la secuencia del fractal de Cantor, pero no llegando a iteraciones elevadas por motivos de tamaño. Por este motivo, se han



denominado pre-fractales. El cambio realizado sobre la traslación del modelo presentado en óptica por otros autores, introducido en el tamaño de los bloques, se refleja en el grosor de los anillos de la lente fractal, consigue mejorar la focalización en un 165%, lo cual da idea de cómo simplemente variando la la posición de los elementos difractores, se puede condicionar la presión obtenida en el foco. Este trabajo amplía el campo para el diseño de lentes planas en el campo acústico y en particular en HIFU, lo que puede utilizarse, entre otras aplicaciones, para la ablación de tejidos..

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Generalitat Valenciana a través de la ayuda GVA-AICO/2015/119.

## Referencias

- [1] Mandelbrot, B.B. *The fractal geometry of nature*; W.H. Freeman & Co: San Francisco, USA, 1982.
- [2] Takayasu, H. *Fractal in Physical Sciences*; Manchester University Press: Manchester, UK, 1992.
- [3] Petri, A.; Alippi, A.; Bettucci, A.; Cracium, Farrelly, F. Vibrational properties of a continuous self-similar structure. *Physical Review B* **1994**, *49*, 15067–15075.
- [4] Sapoval, B.; Haeberlé, O.; Russ, S. Acoustical properties of irregular and fractal cavities. *Journal of the Acoustical Society of America* **1997**, *102*, 2014-2019.
- [5] Lubniewski, Z.; Stepnowski, A.; Application of the fractal analysis in the sea bottom recognition. *Archives of Acoustics* **1998**, *25*, 499-511.
- [6] Castiñeira-Ibáñez, S.; Romero-García, V.; Sánchez-Pérez, J.V.; García-Raffi, L.M. Overlapping of acoustic bandgaps using fractal geometries *EPL* **2010**, *92*, 24007.
- [7] Castiñeira-Ibáñez, S.; Rubio, C.; Romero-García, V.; Sánchez-Pérez, J.V.; García-Raffi, L.M. Design, manufacture and characterization of an acoustic barrier made of multi-phenomena cylindrical scatterers arranged in a fractal-based geometry. *Archives of Acoustics* **2012**, *37*, 455-462.
- [8] Gomez-Lozano, V.; Uris, A.; Candelas, P.; Belmar, F. Acoustic transmission through perforated plates with fractal subwavelength apertures. *Solid State Communications* **2013**, *165*, 11-14.
- [9] Calvo, D.C.; Thangawng, A.L.; Nicholas M.; Layman, C. N. Thin Fresnel zone plate lenses for focusing underwater sound. *Applied Physics Letters* **2015**, *107*, 014103.
- [10] Jaggard, A.D.; Jaggard, D.L. Cantor ring diffractals. *Optics Communications* **1998**, *158*, 141-148.