

DIMENSIONAMENTO DE PLACAS METÁLICAS AFINADAS O INSTRUMENTO MUSICAL *BELL-PLATE*

M. Portela¹, R. Ribeiro², M. Bernat³, O. Inácio⁴

¹ Doutorando em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis
marceloacustica@yahoo.com.br

² UNIMAE – Unidade de Investigação da ESMAE-IPP – Laboratório de Acústica Musical, Porto
rmsribeiro@yahoo.com

³ ESMAE-IPP | Drumming - Grupo de Percussão
bernat@drumming.pt

⁴ UNIMAE – Unidade de Investigação da ESMAE-IPP – Laboratório de Acústica Musical, Porto
octavioinacio@esmae-ipp.pt

Resumo

Neste trabalho, o Método de Elementos Finitos (FEM) e um modelo analítico são aplicados ao dimensionamento de um instrumento musical, idiofone percutido, baseado nos denominados *Bell Plates*. Este instrumento consiste num conjunto de placas de Alumínio de 5 mm de espessura e com as demais dimensões ajustadas à nota musical pretendida, tipicamente associada à frequência modal do primeiro (1,1) ou segundo (2,0) modo vibratório, dependendo das condições de suporte.

O dimensionamento do conjunto das placas metálicas (para um total de 3 oitavas de tessitura) é realizado através da aplicação do FEM a um modelo de placa fina suspensa de modo a conhecer a resposta em frequência aproximada num determinado ponto devido à excitação num outro ponto.

Adicionalmente, foram realizados alguns testes experimentais para verificação dos resultados das simulações, permitindo comprovar a fidelidade do modelo e a sua aplicabilidade ao dimensionamento deste instrumento musical.

Palavras-chave: Acústica Musical, Análise Modal, Idiofone, Bell Plate, FEM.

Abstract

In this work, the Finite Element Method (FEM) and an analytical model is applied to the scaling of a musical instrument, a percussion idiophone, based on the so-called *Bell Plates*. This instrument consists of a group of Aluminium rectangular plates, with 5 mm thickness and with the remaining dimensions adjusted to the required musical note. Typically the musical note is associated with the modal frequency of the first (1,1) or second (0,2) flexural mode, depending on the support (boundary) conditions.

The dimensions of each metallic plate (for a total of 3 octaves) are given by the FEM model of a free thin plate model, where the frequency response in a determined location due to excitation in a different point is calculated.

Additionally, experimental tests were performed for verification of the simulation results to prove the accuracy of the model and its applicability to the scaling of this musical instrument.

Keywords: Musical Acoustics, Modal Analysis, Idiophone, Bell Plate, FEM.

PACS no. 43.75.Kk

1 Introdução

As placas afinadas, também conhecidas em inglês como *Bell Plates*, e em alemão *Plattenglocken*, são instrumentos musicais que surgiram no final do século XVIII. Encontram-se registos de sua utilização, por exemplo, desde a ópera *Camille* de Nicolas Dalayrac, em 1791, como também na banda sonora do filme *Lord of the Rings*, em 2001, composta por Howard Shore. Tudo indica que este instrumento tenha sido desenvolvido como uma alternativa aos sinos tradicionais, pois sua construção simples permite um fabrico mais acessível e uma maior facilidade de transporte e manutenção.

Cada nota é produzida por uma placa de metal plana usualmente retangular, suspensa por dois pontos através de fios. Ao percuti-la no centro com uma baqueta de ponteira maleável, produz-se um som transitório seguido por um tom puro, bem similar ao som de um sino tradicional [6].

Estes instrumentos têm sido utilizados em ópera e concerto, sobretudo nas baixas frequências. Enquanto os sinos tubulares, chamados *chimes*, cobrem o registo das altas frequências, os *Bell Plates* são mais adequados para a gama de frequências abaixo de C4 (261,63 Hz). Barras de aço maciço e outros objetos metálicos também foram e continuam a ser utilizados como alternativas ao sino [1].

Hoje, os Bell Plates já são comercializados por alguns fabricantes tradicionais de instrumentos musicais, geralmente em conjuntos de 12 (1 ½ oitava diatónica ou 1 oitava cromática) a 61 (5 oitavas cromáticas). A sua classificação organológica é a de um idiofone percutido com altura definida [3]. O suporte é feito através de uma estrutura metálica em forma de moldura, que sustenta as placas suspensas por meio de fios. Cada placa retangular é feita por uma liga de alumínio, bronze ou aço. As baquetas usadas para as percutir possuem a ponta de borracha ou em forma de disco de madeira, muitas vezes com um núcleo de metal, revestido com feltro ou couro. A sua extensão vai normalmente de C2 a C6 [7]. No entanto, existem placas para uma oitava inferior (de C1 a C2) [8], sendo estas grandes e muito pesadas.

1.1 Objectivo

Neste trabalho, o Método de Elementos Finitos (FEM) é aplicado ao dimensionamento de 37 placas com o objetivo de cobrir três oitavas de extensão (do C2 em 65,41Hz ao C5 em 523,25Hz). São realizados também testes experimentais, em três destas placas, para verificação dos resultados das simulações e comprovar a fidelidade do modelo e a sua aplicabilidade ao dimensionamento deste instrumento.

1.2 Modos vibratórios representativos

O modo de vibração mais grave, que normalmente caracteriza a afinação de uma placa rectangular é o modo (1,1), em que os números indicam o número de linhas nodais nas duas direções perpendiculares. No entanto, dependendo do tipo de suspensão utilizado, as regiões de máxima vibração para um determinado modo podem ser severamente amortecidas. Com a forma de suspensão usual dos *Bell Plates*, o modo com amortecimento negligenciável de mais baixa frequência, que acaba por caracterizar sua nota fundamental, é o modo (2,0). Neste segundo modo, as linhas nodais são representadas por linhas ligeiramente curvas ao longo dos lados mais curtos, tratados neste trabalho com a denominação de largura. Nestas linhas nodais, não há praticamente movimento, e estas dividem diferentes regiões de máxima amplitude, desfasadas de 180°. Ao longo destas linhas nodais pode-se suspender a placa sem retirar muita energia vibratória ao modo (2,0), bem como a muitos outros, sendo recomendado como o local adequado para o suporte. Os fabricantes já tinham descoberto empiricamente que os furos para suporte deveriam ser feitos a 1/4 do comprimento e 1/3 da largura.

Os dois modos citados anteriormente, bem como a posição usual de suporte desse instrumento são ilustrados na Figura 1.

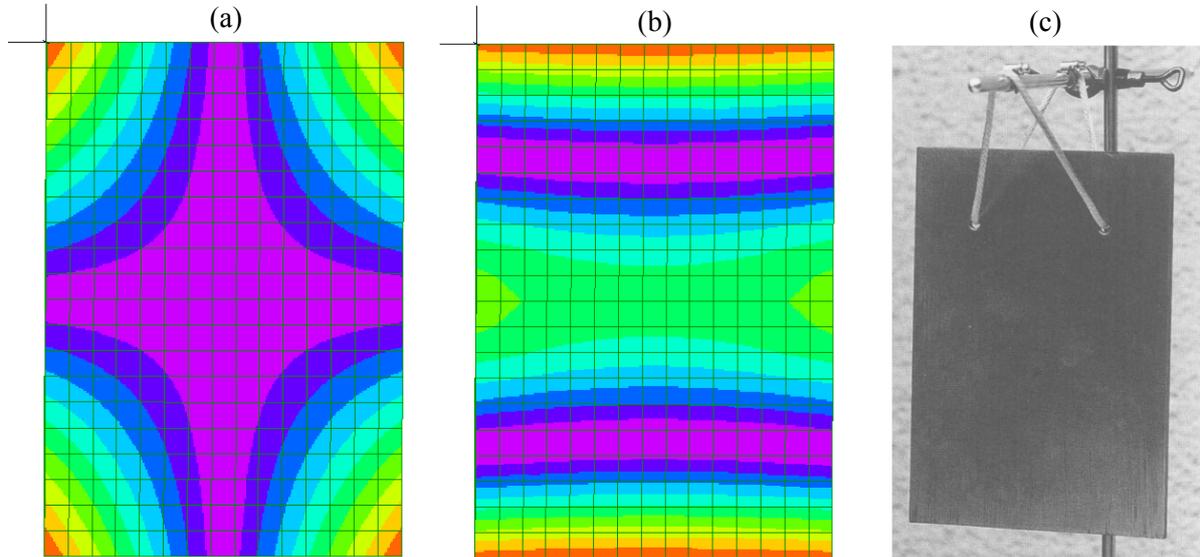


Figura 1 – (a) Modo vibratório (1,1); (b) modo vibratório (2,0); (c) suporte usual do *BellPlate* [6]

1.3 Dimensões das placas

As dimensões de 37 placas foram verificadas numericamente e usadas como dados de entrada para uma solução analítica. As relações de comprimento/largura das placas retangulares afinadas foram calculadas seguindo a mesma lógica dos tamanhos de papel definidos pela norma ISO 216, onde a razão entre a altura e largura deve ser igual à raiz quadrada de dois. Isto significa que quando, por exemplo, se unem duas folhas A4 obtém-se uma folha A3 com exatamente o dobro da área e com as mesmas proporções. Na prática, isso significa que uma placa para soar uma oitava acima (dobro da frequência) de uma referência conhecida, basta que esta seja reduzida a 71% do tamanho original (em cada dimensão) [6]. Simulações usando o método de elementos finitos utilizaram um valor ideal de $L/B = \sqrt{2}$ o que concorda com o valor aritmético médio da relação de dimensões das placas.

2 Solução analítica

Considere-se uma placa plana fina retangular de material isotrópico e linearmente elástico com módulo de elasticidade longitudinal E , módulo de cisalhamento G , coeficiente de Poisson ν e densidade ρ , tendo uma espessura uniforme h e ocupando uma região no plano $\Omega(x, y)$: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. A relação tensão (ϵ) – deformação (σ) é dada por

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

e o inverso desta equação matricial fica

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{\nu(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{E}{\nu(1-\nu^2)} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Serão aplicadas as condições de contorno ao longo das bordas da placa para o caso específico em que esta se encontra suspensa por fios, ou seja, está com suporte livre em todo o perímetro (F-F-F-F).

Considere-se M_x e M_y os momentos fletores por unidade de comprimento nas secções de placa, fletindo nos eixos x e y , respectivamente; M_{xy} e M_{yx} os momentos torsores por unidade de comprimento nas secções da placa, perpendiculares aos eixos x e y , respectivamente; T_x e T_y os esforços de corte por unidade de comprimento nas secções da placa, nas direções x e y , respetivamente.

Para uma das bordas, por exemplo $x = 0$, as condições de contorno podem ser expressas como se segue:

$$M_x|_{x=0} = 0 \quad M_{xy}|_{x=0} = 0 \quad T_x|_{x=0} = 0. \quad (3)$$

De acordo com a teoria clássica aplicada a placas finas [4], a equação que descreve as vibrações livres, válida para pequenos deslocamentos verticais $w = w(x, y, t)$, é

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

onde ρ_s é a densidade do material e D é a rigidez de flexão da placa.

Segundo Leissa [5], a partir do método de Rayleigh-Ritz, pode-se deduzir as frequências naturais da placa, para as condições fronteira especificadas, por:

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 D}{a^4 \rho} \left[G_x^4 + G_y^4 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 [v H_x H_y + (1 - v) J_x J_y] \right] \quad (5)$$

onde G_x , G_y , H_x , H_y , J_x e J_y são funções do modo de número (m, n) e dependem das condições de contorno, que são apresentados na Tabela 1. D é a rigidez de flexão da placa, dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6)$$

Tabela 1 – Coeficientes da Equação 5.

Condições de contorno em	m	Gx	Hx	Jx
F (x=0) F (x=a)	0	0	0	0
	1	0	0	$12/\pi^2$
	2	1,506	1,248	5,017
	3,4,5, ...	$m - \frac{1}{2}$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{6}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$

A solução analítica de uma placa livremente apoiada não é tão precisa quanto aos outros casos de condições de fronteira. Leissa [5] comenta que há uma grande confusão na literatura sobre a existência de modos para este problema, concluindo-se que certos modos de vibração não são descobertos nesse tipo de análise.

Na Secção 4 são apresentados os resultados obtidos experimentalmente em comparação com os obtidos através dos cálculos das formulações analíticas e da simulação numérica desenvolvida por Elementos Finitos, usando para todos os casos as mesmas propriedades básicas da estrutura, que são:

- Comprimento e largura (a e b): variam de acordo com as notas musicais
- Espessura (h)= 0.005 mm
- Módulo de elasticidade (E)= 72 GPa (Alumínio 6061 T6)
- Densidade (ρ) = 2700 kg/m³
- Poisson (ν) = 0,33

3 Análise numérica por elementos finitos (FEM)

Para a análise das frequências características das placas de alumínio, foi utilizado o módulo de mecânica estrutural para tensão-deformação de sólidos do programa *COMSOL Multiphysics*. O tipo de material foi escolhido a partir da biblioteca do próprio programa e todas as condições de fronteira foram configuradas como livres. Foi assumido um modelo sem amortecimento, da mesma forma que no modelo analítico. Depois de gerar uma malha, constituída de 646 elementos triangulares, o modelo foi resolvido para uma análise do tipo '*eigenfrequency*', que são as frequências características do sistema.

Uma análise das frequências características de um sistema é basicamente um tratamento matemático de um modelo através de dois conjuntos de variáveis: os valores próprios (autovalores), transformados posteriormente em frequências em Hz para uma análise estrutural, sendo estes absolutos e precisos, e os vectores próprios (autovectores) ou formas modais próprias, que não possuem valor absoluto para as suas amplitudes. Estes só podem ser comparados com amplitudes relativas, como se tratasse de um sistema com ressonâncias (amplitudes) infinitas.

Para casos especiais, como na análise de condições de fronteira livres a importância numérica dos seis primeiros modos, ditos "modos de corpo rígido", em comparação com os outros "modos elásticos" é muito diferente [4]. Os resultados podem não ser muito precisos, dependendo dos algoritmos utilizados detetam o mau condicionamento das matrizes de massa e rigidez e de como lidam com esse problema. Por outro lado, existem os modelos totalmente restritos (condições de fronteira independentes) para os quais não existe ou ocorrem apenas pequenos deslocamentos de corpo rígido e modos são principalmente elásticos. Neste caso, a comparação dos modos de vibração é mais precisa, mas ainda assim apenas se comparam as formas relativas.

A Figura 2 apresenta a forma do segundo modo (modo 2,0) para uma placa que também foi objeto de análise modal experimental.

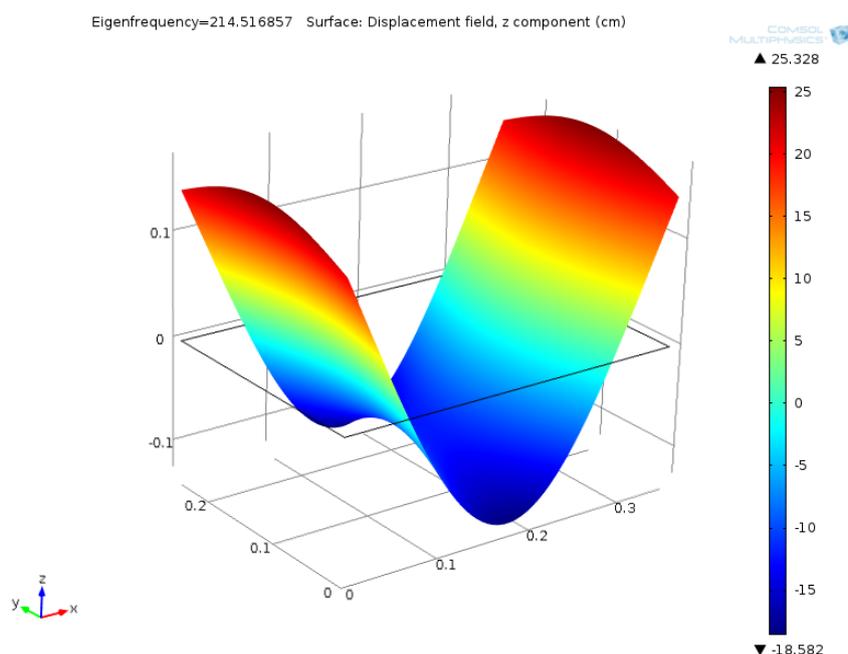


Figura 2 – Forma modal para o modo (2,0) simulada numericamente.

Pelo que se pode observar através da análise da frequência natural para o segundo modo (Tabela 2) e a forma modal resultante (Figura 2), os resultados encontram-se próximos da referência, sendo o modelo gerado pelo método de elementos finitos uma boa representação do sistema real.

4 Análise Experimental

Foi realizada a análise modal experimental a três placas retangulares, em condições diferentes às de seu suporte usual. Para uma caracterização modal mais completa, optou-se por uma fixação que permitisse identificar desde o modo (1,1), através de um ponto a 1/4 do comprimento e à metade da largura, conforme indica a Figura 3. Em termos práticos, na utilização da placa musicalmente, esta posição pode causar problemas de equilíbrio em suspensão.

Foram obtidos assim, na faixa de frequência de 0 a 1250Hz, os modos de vibração e suas respectivas frequências naturais. Para isso, foi utilizado um analisador de sinais *SigLab* para obtenção das funções de resposta em frequência e através do programa *Star7* da *Spectral Dynamics* foram identificadas as características modais do sistema.

A cadeia de instrumentos e aparelhos utilizados é ilustrada na Figura 3, onde se observa que a placa possui condições de fronteira livre, sendo suspensas por cabos de borracha.



Figura 3 - Cadeia de instrumentos e aparelhos utilizados na análise experimental.

Para medir os pontos de resposta e excitação, esta placa afinada na nota A3, foi dividida em 96 pontos (malha de 2cm x 2cm), ilustrados na Figura 4a, onde foi excitada em diferentes pontos através do martelo de impacto tendo a resposta sido obtida através de três acelerómetros em pontos da estrutura, escolhidos estrategicamente para evitar as primeiras linhas nodais. Uma geometria simplificada da estrutura em análise foi construída no programa de identificação modal, conforme os pontos ilustrados na Figura 4b, e posteriormente os dados medidos foram associados a esses pontos para construção das formas modais.

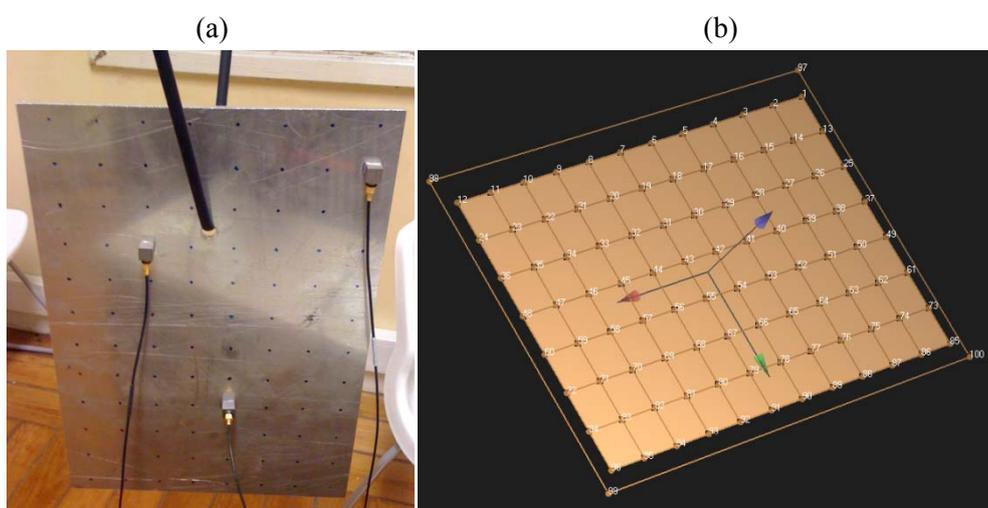


Figura 4 – (a) posição dos pontos de medição da resposta; (b) geometria simplificada da estrutura modelada no *Star7*.

Como pode ser visto na Figura 4, para esta placa em particular, os pontos de excitação estão distribuídos em 8 linhas ao longo da placa, com o objetivo de captar os modos de flexão e torção. Assim, todos os pontos foram percutidos e medidas as respostas através de três acelerômetros nos pontos 9, 30 e 68. Desta maneira, foram obtidas 288 funções de resposta em frequência.

Com todos os pontos medidos foi realizada a análise das formas modais e as respectivas frequências naturais. Para determinar quais são os modos reais de vibração da estrutura, cabe ao operador identificar os pontos que coincidem com os picos da curva soma para que assim sejam extraídos os parâmetros modais da placa. Depois de identificar a localização dos modos e configurar o tipo de ajustes de curva, o sistema *Star7* processa os dados de medição de todo o conjunto, gerando as formas modais, como a apresentada na Figura 5.

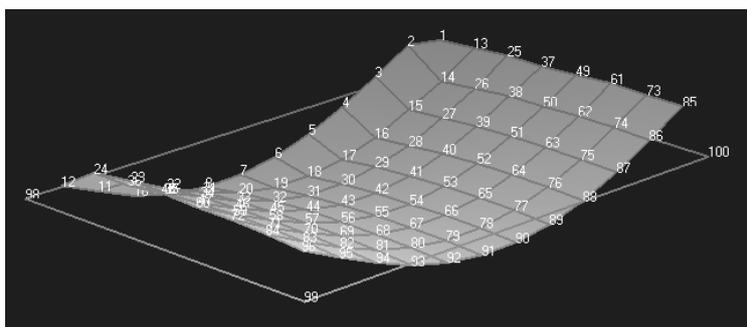


Figura 5 – Forma modal para o modo (2,0) medido experimentalmente.

5 Análise dos Resultados

Através da formulação analítica apresentada na Secção 2, as formas modais e as respectivas frequências naturais foram calculadas para os dois primeiros modos de flexão. No entanto, conforme justificado na Secção 1.2, apenas serão comparados os resultados para segundo modo. As comparações dos valores das frequências naturais calculadas pelo método analítico com as obtidas experimentalmente e numericamente, para três placas distintas, podem ser feitas através da Tabela 2. As formas modais obtidas para o modo (2,0) pelos métodos numérico e experimental são apresentados nas Figuras 4 e 5, respetivamente.

Tabela 2 – Comparação dos resultados das frequências naturais para o modo (2,0). Todos os valores de frequência estão em Hz.

BELL PLATE	a (cm)	b (cm)	Numérico	erro %	Dif.Cents	Experimental	erro %	Dif.Cents	Analítico	erro %	Dif.Cents
C3 (130,81)	45,4	31,6	128,98	1,40%	24	132,17	1,04%	18	125,00	4,44%	79
A3 (220,00)	35,2	24,4	214,52	2,49%	44	217,97	0,92%	16	208,79	5,10%	91
C4 (261,63)	32,2	22,2	256,35	2,02%	35	261,21	0,16%	3	250,85	4,12%	73

A coluna *Dif. Cents* denota a diferença em *cents* entre o resultado obtido e a referência, que é a frequência nominal teórica absoluta da nota musical. Considerando que um *cent* é a centésima parte de um semitom, e sendo o semitom é o menor intervalo dentro de uma escala musical cromática, acredita-se que a modelagem numérica (elementos finitos) apresentou bons resultados, mas podendo implicar uma afinação final, manual, após construção do instrumento.

O erro percentual, que também é calculado em relação à frequência nominal da nota esperada, está relacionado com a diferença que existe entre o modelo real e o analítico. Como comentado anteriormente, a forma de suspensão através de fios não foi levada em consideração no cálculo analítico. Esse detalhe pode ser o principal responsável pela discrepância dos resultados obtidos onde, devido à adição de amortecimento, os valores de frequência naturais se tornam mais baixos. Uma pequena fração de massa adicionada à estrutura também está associada com a massa dos acelerômetros fixados à placa.

Os erros associados ao procedimento experimental podem ser interpretados como os próprios erros de fabricação da placa real, que pode estar fora da afinação dada pela frequência nominal teórica.

6 Conclusões

Através das comparações realizadas na Secção 5, pode-se verificar a validade do modelo numérico, que representou bem as formas modais e as respectivas frequências naturais da placa suspensa. Pode-se observar que os valores das frequências naturais experimentais em relação aos valores analíticos apresentam as maiores discrepâncias. Estas diferenças podem ser explicadas devido ao facto de a placa real ter uma quantidade de massa maior que a calculada analiticamente. Para o modelo numérico, pretende-se futuramente considerar valores de amortecimento obtidos através da análise experimental, assim que uma quantidade mais significativa de placas forem sujeitas à análise modal.

Como sugestão para futuros estudos, seria importante estudar parâmetros para quantificar a radiação sonora real do instrumento, conforme o tipo de excitação aplicado e a densidade modal da estrutura, tais como a eficiência de radiação para cada modo, conhecida como eficiência de radiação modal, ou a eficiência de radiação total, que leva em consideração o efeito de todos os modos estruturais. Em princípio, a eficiência de radiação de uma placa pode ser obtida através da soma do efeito de todos os modos que contribuam de forma significativa na faixa de frequências em questão. Isto permitiria avaliar melhor a relação de contribuição de cada modo para a afinação considerada para cada nota.

Outro ponto interessante a ser desenvolvido será a otimização da resposta em frequência da placa, através de modificações em sua forma, tal como foi estudado por Henrique e Antunes [2] com aplicação a outro idiofone de altura definida, o vibrafone.

Referências

- [1] FLETCHER, N. *Materials for Musical Instruments*, Acoustics Australia, 27, 1 – 5, 1999.
- [2] HENRIQUE, L.; ANTUNES, J. *Optimal Design and Physical Modelling of Mallet Percussion Instruments*. Acta Acustica, Vol. 89, pp.948-963, 2003.
- [3] HENRIQUE, L. *Instrumentos Musicais*. 5ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2006.
- [4] LEISSA, A. W. *The free vibration of rectangular plates*. Journal of Sound and Vibration, 31, tópico 3, pp.257-293, 1973
- [5] LEISSA, A.W. *Vibration of plates*. NASA SP-160, 1969.
- [6] SCHAD, C.R.; FRIK, G. *Plate Bells Plattenglocken*. Acta Acustica, Volume 82, Número 1, pp.158-168, 1996.
- [7] *Kolberg Percussion* [http://products.kolberg-percussion.com/en_GB/363/category.html]
- [8] *Ultimate Bell Plates* [<http://www.ultimatebellcase.com/plate.htm>]