

MODELADO DEL COMPORTAMIENTO ACÚSTICO DE CATALIZADORES CÓNICOS MEDIANTE COLOCACIÓN PUNTUAL

Referencia PACS: 43.50.Gf, 43.20.Mv, 43.20.Bi

Denia, F.D.; Sánchez-Orgaz, E.M.; Carballeira, J.; Fuenmayor, F.J.

Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica, Universitat Politècnica de València

Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, España

Tel: +34 963877007 Ext: 76225

Fax: +34 963877659

Email: fdenia@mcm.upv.es; evsnor@upvnet.upv.es; jacarmo@mcm.upv.es; ffuenmay@mcm.upv.es

ABSTRACT

In this work, a three-dimensional semianalytical model is presented for the sound attenuation assessment of automotive catalytic converters. Higher order mode propagation in the cylindrical inlet/outlet and tapered ducts is combined with one-dimensional wave propagation within the capillary ducts of the central monolith. The point collocation technique and the continuity conditions of the acoustic fields at the interfaces are considered to couple the solutions of the wave equation in the corresponding catalyst subdomains (Bessel functions are considered for the circular inlet/outlet, while spherical Hankel and Legendre functions are used for the expansion/contraction tapered ducts). Benchmarking of the developed semianalytical technique against finite element calculations is carried out, showing a good agreement and a lower computation expenditure. The influence of several design parameters on the sound attenuation of the catalyst is investigated.

RESUMEN

Este trabajo presenta un modelo semianalítico tridimensional para el estudio de la atenuación acústica en catalizadores de automoción. Se combina la propagación de modos de alto orden en los conductos de entrada y salida, de geometría cilíndrica y troncocónica, respectivamente, con un modelo unidimensional para los conductos capilares del monolito central. Para llevar a cabo el acoplamiento de las soluciones de la ecuación de ondas en los distintos dominios (funciones de Bessel en zonas cilíndricas, así como funciones de Hankel esféricas y de Legendre en las troncocónicas), se consideran las condiciones de continuidad del campo acústico en las interfases y la técnica de colocación puntual. Los resultados proporcionados por dicha técnica se validan mediante la comparación con simulaciones numéricas basadas en elementos finitos, mostrando una buena concordancia y un coste computacional menor. Además, se analiza la atenuación acústica del catalizador en función de algunos parámetros relevantes de diseño.

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, y debido a las limitaciones existentes en lo referente a emisiones contaminantes, la utilización de dispositivos de postratamiento tales como catalizadores se ha convertido en una práctica necesaria en el diseño del sistema de escape de MCI. Si bien el diseño de tales dispositivos se centra fundamentalmente en el control de emisiones nocivas, los aspectos acústicos asociados al catalizador juegan también un papel relevante y han de ser tenidos en cuenta en el diseño integral del sistema de escape del vehículo. De esta manera, y desde un punto de vista global, en el desarrollo de herramientas de predicción del comportamiento acústico de la línea de escape completa ha de considerarse no sólo la atenuación de ruido debida a los silenciadores, sino también la influencia del convertidor catalítico. Por este motivo, en las publicaciones científicas sobre control de emisiones sonoras en motores pueden encontrarse diversas referencias asociadas al modelado acústico del catalizador [1-6].

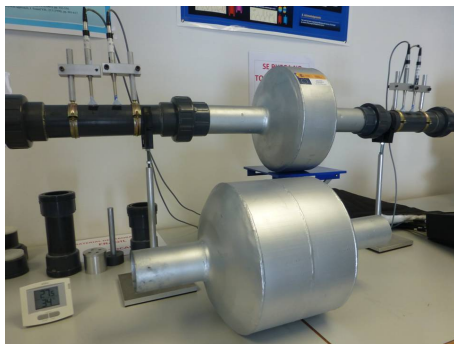
En primer lugar deben valorarse los fenómenos de propagación sonora en el interior del monolito, que está formado por miles de conductos capilares cuya sección transversal es de dimensiones muy reducidas (del orden de un milímetro cuadrado cada capilar). Especial relevancia tienen los fenómenos de interacción viscotérmica entre el aire y el conducto capilar. Una referencia obligada corresponde al trabajo de Kirchhoff [7], que presentó un modelo detallado para medio de propagación en reposo (sin flujo medio). Posteriormente, Zwicker y Kosten [8] obtuvieron soluciones relevantes para dicho modelo en el caso de capilares con sección transversal circular. De mayor interés práctico son las secciones rectangulares, tenidas en cuenta en los trabajos de Stinson [9] y Roh et al. [10]. La presencia de flujo medio fue tenida en cuenta por Dokumaci [11], que extendió el trabajo de Zwicker y Kosten [8] y obtuvo una solución analítica sencilla para considerar medio de propagación en movimiento en capilares circulares. Más tarde, el mismo autor presentó una solución analítica para conductos rectangulares de pequeñas dimensiones transversales, de nuevo en presencia de flujo medio [12].

Por otro lado, tanto el desarrollo como la implementación de herramientas de predicción del comportamiento acústico del catalizador completo requieren adicionalmente modelos acústicos para los conductos de conexión de entrada y salida ubicados a ambos lados del monolito. Los modelos tradicionales de onda plana [11,12] presentan importantes limitaciones y sólo son aplicables en el rango de bajas frecuencias y para conductos de pequeñas dimensiones. Por estos motivos, y con vistas a tener mayor precisión en el análisis, en los últimos años se han desarrollado numerosos esquemas multidimensionales numéricos [5,6,13] y analíticos [2-4], estos últimos de menor coste computacional. Los esquemas multidimensionales pueden subdividirse en dos grandes grupos: (1) Por un lado, los denominados 3D/3D, de menor realismo y precisión, en los se considera propagación multidimensional tanto con los conductos de entrada y salida como en los capilares. Para ello se asume que el monolito se asemeja, acústicamente hablando, a un medio de propagación con comportamiento homogéneo e isótropo, definido por una densidad y una velocidad del sonido efectivas complejas y dependientes de la frecuencia [14]; (2) Por otro lado, la técnica 3D/1D, más realista [2-4], que consiste en la sustitución del convertidor catalítico por una matriz de transferencia que asume comportamiento acústico unidimensional (1D) en su interior, e ignora cualquier posible interacción acústica entre capilares adyacentes. De esta forma, la solución del campo acústico puede ser tridimensional (3D) en los conductos de entrada y salida, pero sólo se permite la presencia de ondas planas en el monolito, lo cual es más consistente con las características fundamentalmente unidimensionales de los conductos capilares que integran el catalizador.

En este trabajo, la aproximación 3D/1D se combina con la técnica de colocación puntual [15-21] para reducir el coste computacional de otras herramientas basadas en el método de elementos finitos [6,13] y la técnica analítica de ajuste modal por integración ponderada, desarrollada por el grupo investigador en trabajos anteriores [2]. Se combina la propagación de modos de alto orden (3D) en los conductos de entrada y salida, de geometría cilíndrica y troncocónica, respectivamente, con un modelo unidimensional (1D) para los conductos capilares del monolito central. El acoplamiento de las soluciones de la ecuación de ondas en los distintos dominios (funciones de Bessel en zonas cilíndricas, así como funciones de Hankel esféricas y de Legendre en las troncocónicas) se efectúa en base a las condiciones de continuidad del campo de presiones y velocidades acústicas axiales en las interfaces de entrada y salida. Dichas condiciones de continuidad no se imponen de forma integral, como en la técnica de ajuste modal [2,22], sino que se fuerzan a nivel puntual en una nube de puntos de colocación, con la consiguiente reducción de coste computacional al eliminar la necesidad de integración. Además, se evitan los problemas de mal condicionamiento del sistema de ecuaciones asociado a integración ponderada (debidos, en principio, a la inexistencia de ortogonalidad de las funciones de ponderación respecto a los modos transversales de presión). Los resultados obtenidos mediante la técnica de colocación puntual se validan por comparación con simulaciones numéricas basadas en elementos finitos, mostrando una buena concordancia y un coste computacional menor. Finalmente se analiza la atenuación acústica del catalizador en función de la porosidad del monolito y su resistividad.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ACÚSTICO Y ENFOQUE MATEMÁTICO

En la Fig. 1 se muestran fotografías de un prototipo de catalizador, un monolito cerámico, otro metálico y el esquema correspondiente al modelo analítico 3D/1D [2-4], en el que la propagación es tridimensional en las regiones de entrada/salida (*A*, *B*, *D* y *E*) y unidimensional en el dispositivo de postratamiento (monolito), cuya región asociada (*C*) ha sido sustituida por una matriz de transferencia de onda de plana T^m [2-5]. Como se verá posteriormente con mayor detalle, dicha matriz establece un acoplamiento entrada/salida que relaciona la presión y la velocidad acústica axial en la sección de transición *B/C* (entrada al monolito) con los mismos campos acústicos en la sección de transición *C/D* (salida del monolito). Los conductos de entrada y salida quedan caracterizados, desde un punto de vista acústico, por la densidad del aire ρ_0 y la velocidad del sonido c_0 . El monolito se representa mediante las propiedades acústicas efectivas ρ_m y c_m .



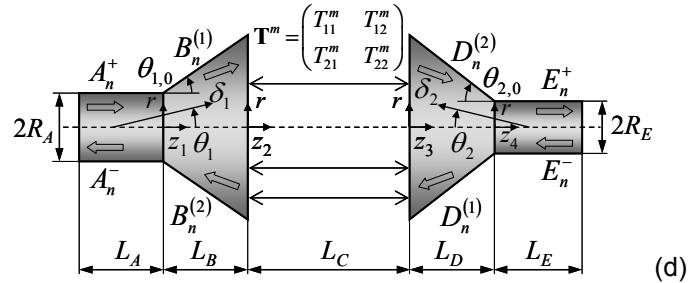
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1 – (a) Prototipos de catalizador; (b) monolito cerámico de capilar cuadrado; (c) monolito metálico de capilar triangular; (d) esquema de catalizador, modelo 3D/1D (monolito reemplazado por una matriz de transferencia).

2.1. Ecuaciones acústicas

La propagación del sonido satisface la ecuación de Helmholtz [14,15]

$$\nabla^2 P + \kappa^2 P = 0 \quad (1)$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano, P es la presión acústica y κ el número de onda de la región bajo estudio. Se tiene que

$$\kappa = \begin{cases} k_0 = \omega/c_0, & \text{aire, conductos } A, B, D, E \\ k_m = \omega/c_m, & \text{monolito, conducto } C \end{cases} \quad (2)$$

siendo k_0 y k_m los números de onda del aire y el monolito, respectivamente, y ω la frecuencia angular.

Para medio de propagación en reposo, es decir, en ausencia de flujo medio, los fenómenos acústicos en el seno de los conductos capilares del monolito pueden ser descritos considerando las propiedades equivalentes definidas anteriormente, ρ_m y c_m , dadas por [1,14]

$$\rho_m = \rho_0 (1 + R\phi G_c(s) / (j\omega\rho_0)), \quad c_m = c_0 \left((1 + R\phi G_c(s) / (j\omega\rho_0)) (\gamma - (\gamma - 1)F) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3,4)$$

donde R es la resistividad al flujo, ϕ es la porosidad del monolito, $G_c(s)$ es una función del número de onda tangencial s , γ es el cociente de calores específicos y F tiene como definición

$$F = \left(1 + R\phi G_c(\sqrt{\text{Pr}}s) / (j\text{Pr}\omega\rho_0) \right)^{-1} \quad (5)$$

siendo Pr el número de Prandtl.

Para conductos circulares como el de entrada A (y el de salida E), la solución axisimétrica de la Ec. (1) puede escribirse como

$$P_A(r, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n^+ e^{-jk_{A,n}z_1} + A_n^- e^{jk_{A,n}z_1} \right) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R_A} r \right) \quad (6)$$

donde $j = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria, A_n^+ y A_n^- son las amplitudes modales (incógnitas) progresivas y regresivas, n es el número modal, (r, z_1) son coordenadas cilíndricas, J_0 es la función de Bessel de primera especie y orden cero, α_n es la n -ésima raíz (o valor característico) asociado a la condición de conducto de pared rígida $J_0'(\alpha_n) = 0$ y $k_{A,n}$ es el número de onda axial del modo n , dado por

$$k_{A,n} = \pm \sqrt{k_0^2 - (\alpha_n/R_A)^2} \quad (7)$$

Conocida la presión, la ecuación de Euler permite obtener la velocidad axial, por ejemplo en el conducto A , como

$$U_A(r, z_1) = \frac{1}{\omega \rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} k_{A,n} \left(A_n^+ e^{-jk_{A,n}z_1} - A_n^- e^{jk_{A,n}z_1} \right) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R_A} r \right) \quad (8)$$

Para el conducto cónico B (y también el D), la solución axisimétrica de la Ec. (1) puede expresarse como [2,23,24]

$$P_B(\delta_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(B_n^{(1)} h_{\nu_{B,n}}^{(1)}(k_0 \delta_1) + B_n^{(2)} h_{\nu_{B,n}}^{(2)}(k_0 \delta_1) \right) g_{\nu_{B,n}}(\cos \theta_1) \quad (9)$$

$B_n^{(1)}$ y $B_n^{(2)}$ son las amplitudes modales (incógnitas) de las ondas divergentes y convergentes, (δ_1, θ_1) son coordenadas esféricas, $h_{\nu_{B,n}}^{(1)}$ y $h_{\nu_{B,n}}^{(2)}$ son las funciones de Hankel esféricas de primera y segunda especie, $g_{\nu_{B,n}}$ es la función de Legendre y $\nu_{B,n}$ es el n -ésimo valor, dependiente del semiángulo de apertura, asociado a la condición de conducto troncocónico de pared rígida [23]

$$\left. \frac{\partial g_{\nu_{B,n}}(\cos \theta_1)}{\partial \cos \theta_1} \right|_{\theta_1 = \theta_{1,0}} = 0 \quad (10)$$

La Tabla 1 muestra algunos valores para diferentes ángulos.

Tabla 1 - Valores $\nu_{B,n}$ de un conducto cónico en función del semiángulo de apertura.

$\theta_{1,0}$ (grados)	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
20	0	10.49	19.60
40	0	5.01	9.56
60	0	3.20	6.22

La aplicación posterior de la técnica de colocación puntual requiere la obtención previa de la velocidad acústica en la expansión troncocónica. En concreto se utiliza la componente axial, paralela al eje z , dada por [2,24]

$$U = U_\delta \cos \theta - U_\theta \sin \theta; \quad U_\delta = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P}{\partial \delta}; \quad U_\theta = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{1}{\delta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (11-13)$$

Combinando las Ecs. (9) y (11)-(13), la velocidad axial en el conducto cónico B se puede expresar como

$$\begin{aligned} U_B(\delta_1, \theta_1) &= -\frac{1}{j\omega\rho_0} \left(\frac{\partial P_B(\delta_1, \theta_1)}{\partial \delta_1} \cos \theta_1 - \frac{1}{\delta_1} \frac{\partial P_B(\delta_1, \theta_1)}{\partial \theta_1} \sin \theta_1 \right) \\ &= -\frac{1}{j\omega\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(B_n^{(1)} \frac{\partial h_{v_{B,n}}^{(1)}(k_0 \delta_1)}{\partial \delta_1} + B_n^{(2)} \frac{\partial h_{v_{B,n}}^{(2)}(k_0 \delta_1)}{\partial \delta_1} \right) g_{v_{B,n}}(\cos \theta_1) \cos \theta_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\delta_1} \frac{\partial g_{v_{B,n}}(\cos \theta_1)}{\partial \theta_1} \left(B_n^{(1)} h_{v_{B,n}}^{(1)}(k_0 \delta_1) + B_n^{(2)} h_{v_{B,n}}^{(2)}(k_0 \delta_1) \right) \sin \theta_1 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Las condiciones de continuidad del campo acústico en las interfases entre conductos pueden escribirse como

$$P_A(r, z_1)|_{z_1=0} = P_B(\delta_1, \theta_1)|_{z_1=0}, \quad U_A(r, z_1)|_{z_1=0} = U_B(\delta_1, \theta_1)|_{z_1=0} \quad \text{para } 0 \leq r \leq R_A \quad (15,16)$$

$$P_B(\delta_1, \theta_1)|_{z_2=0} = P_C(r, z_2)|_{z_2=0}, \quad U_B(\delta_1, \theta_1)|_{z_2=0} = \phi U_C(r, z_2)|_{z_2=0} \quad \text{para } 0 \leq r \leq R_C \quad (17,18)$$

$$P_C(r, z_2)|_{z_2=L_C} = P_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_3=0}, \quad \phi U_C(r, z_2)|_{z_2=L_C} = U_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_3=0} \quad \text{para } 0 \leq r \leq R_C \quad (19,20)$$

$$P_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_4=0} = P_E(r, z_4)|_{z_4=0}, \quad U_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_4=0} = U_E(r, z_4)|_{z_4=0} \quad \text{para } 0 \leq r \leq R_E \quad (21,22)$$

Se introduce la siguiente nomenclatura para los modos acústicos de los conductos cónicos, con objeto de compactar las ecuaciones asociadas al procedimiento de colocación puntual

$$\Theta_{X,n}^{(j)}(\delta_i, \theta_i) = h_{v_{X,n}}^{(j)}(k_0 \delta_i) g_{v_{X,n}}(\cos \theta_i) \quad (23)$$

$$\Xi_{X,n}^{(j)}(\delta_i, \theta_i) = \frac{\partial h_{v_{X,n}}^{(j)}(k_0 \delta_i)}{\partial \delta_i} g_{v_{X,n}}(\cos \theta_i) \cos \theta_i - \frac{1}{\delta_i} \frac{\partial g_{v_{X,n}}(\cos \theta_i)}{\partial \theta_i} h_{v_{X,n}}^{(j)}(k_0 \delta_i) \sin \theta_i \quad (24)$$

donde $X = B$, $i = 1$ hace referencia al cono divergente y $X = D$, $i = 2$ se refiere al convergente. Además, $j = 1, 2$ se asocia con las funciones de Hankel esféricas $h_{v_{B,n}}^{(1)}$ y $h_{v_{B,n}}^{(2)}$, respectivamente.

Como se muestra en la Fig. (1), el monolito cerámico se reemplaza por una matriz de transferencia que representa propagación de onda plana en el interior de los conductos capilares. Dicha matriz establece una relación entre los campos acústicos de presión y velocidad a ambos lados del monolito dentro de la región C , y viene dada por [1-6, 14]

$$\begin{Bmatrix} P_C(r, z_2)|_{z_2=0} \\ U_C(r, z_2)|_{z_2=0} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k_m L_C) & j\rho_m c_m \sin(k_m L_C) \\ j\sin(k_m L_C)/(\rho_m c_m) & \cos(k_m L_C) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} P_C(r, z_2)|_{z_2=L_C} \\ U_C(r, z_2)|_{z_2=L_C} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Esta última ecuación se combina con las Ecs. (17)-(20), para obtener las relaciones entre los campos acústicos a ambos lados del monolito, en las zonas externas de las interfaces (B y D). Para ello, nótese que entra en juego la porosidad ϕ del monolito y puede escribirse

$$P_B(\delta_1, \theta_1)|_{z_2=0} = T_{11}^m P_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_3=0} + T_{12}^m U_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_3=0} \quad \text{para } 0 \leq r \leq R_C \quad (26)$$

$$U_B(\delta_1, \theta_1)|_{z_2=0} = T_{21}^m P_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_3=0} + T_{22}^m U_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_3=0} \quad \text{para } 0 \leq r \leq R_C \quad (27)$$

donde la matriz de transferencia

$$\begin{pmatrix} T_{11}^m & T_{12}^m \\ T_{21}^m & T_{22}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k_m L_C) & j\rho_m c_m \sin(k_m L_C)/\phi \\ j\phi \sin(k_m L_C)/(\rho_m c_m) & \cos(k_m L_C) \end{pmatrix} \quad (28)$$

difiere de la utilizada en la Ec. (25) únicamente en los términos fuera de la diagonal, que quedan afectados por ϕ .

El conjunto de Ecs. (15)-(22) queda finalmente como

$$P_A(r, z_1)|_{z_1=0} = P_B(\delta_1, \theta_1)|_{z_1=0}, \quad U_A(r, z_1)|_{z_1=0} = U_B(\delta_1, \theta_1)|_{z_1=0} \quad \text{para } 0 \leq r \leq R_A \quad (29,30)$$

$$P_B(\delta_1, \theta_1)|_{z_2=0} = T_{11}^m P_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_3=0} + T_{12}^m U_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_3=0} \quad \text{para } 0 \leq r \leq R_C \quad (31)$$

$$U_B(\delta_1, \theta_1)|_{z_2=0} = T_{21}^m P_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_3=0} + T_{22}^m U_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_3=0} \quad \text{para } 0 \leq r \leq R_C \quad (32)$$

$$P_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_4=0} = P_E(r, z_4)|_{z_4=0}, \quad U_D(\delta_2, \theta_2)|_{z_4=0} = U_E(r, z_4)|_{z_4=0} \quad \text{para } 0 \leq r \leq R_E \quad (33,34)$$

Dicho sistema de ecuaciones se combinará con el método de colocación puntual en la siguiente la sección para obtener las amplitudes modales A_n^+ , A_n^- , $B_n^{(1)}$, $B_n^{(2)}$, $D_n^{(1)}$, $D_n^{(2)}$, E_n^+ y E_n^- .

2.2. Colocación puntual

En la interfase de transición entre los conductos A y B se utilizan las condiciones de continuidad de presión y velocidad axial dadas por las Ecs. (29) y (30), y por tanto al tomar N_{c_AB} puntos de colocación se cumple que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ + A_n^-) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R_A} r_p\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^{(1)} \Theta_{B,n}^{(1)}(\delta_{1p}, \theta_{1p}) + B_n^{(2)} \Theta_{B,n}^{(2)}(\delta_{1p}, \theta_{1p})) \quad (35)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_{A,n} (A_n^+ - A_n^-) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R_A} r_p\right) = j \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^{(1)} \Xi_{B,n}^{(1)}(\delta_{1p}, \theta_{1p}) + B_n^{(2)} \Xi_{B,n}^{(2)}(\delta_{1p}, \theta_{1p})) \quad (36)$$

para $p = 1, 2, 3, \dots, N_{c_AB}$. Los puntos de colocación tienen coordenadas r_p y $z_{1p} = 0$ (y por ello en este último caso las exponenciales dependientes de z_1 valen la unidad en las Ecs. (35) y (36)) en el sistema cilíndrico del conducto A , y pueden ser elegidos mediante distintos criterios [15], entre los cuales se opta en este trabajo por el de distribución espacial *equiespaciada*. En el sistema esférico del tronco de cono (conducto B) las coordenadas correspondientes son δ_{1p} y θ_{1p} , y vienen dadas por:

$$\delta_{1p} = \sqrt{\text{Vert}_{B1}^2 + r_p^2}, \quad \theta_{1p} = \text{atan}\left(\frac{r_p}{\text{Vert}_{B1}}\right), \quad \text{Vert}_{B1} = \frac{R_A L_B}{R_C - R_A} \quad (37-39)$$

En la transición entre los conductos B y D (monolito), las relaciones entre presiones y velocidades asociadas a la matriz \mathbf{T}^m , dadas por las Ecs. (31) y (32), se fuerzan en $N_{c_{BD}}$ puntos de colocación (con la misma coordenada r_p a ambos lados del monolito)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B_n^{(1)} \Theta_{B,n}^{(1)}(\delta_{1p}, \theta_{1p}) + B_n^{(2)} \Theta_{B,n}^{(2)}(\delta_{1p}, \theta_{1p})) \quad (40)$$

$$= T_{11}^m \sum_{n=0}^{\infty} (D_n^{(1)} \Theta_{D,n}^{(1)}(\delta_{2p}, \theta_{2p}) + D_n^{(2)} \Theta_{D,n}^{(2)}(\delta_{2p}, \theta_{2p})) + \frac{T_{12}^m}{j\omega \rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} (D_n^{(1)} \Xi_{D,n}^{(1)}(\delta_{2p}, \theta_{2p}) + D_n^{(2)} \Xi_{D,n}^{(2)}(\delta_{2p}, \theta_{2p}))$$

$$- \frac{1}{j\omega \rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^{(1)} \Xi_{B,n}^{(1)}(\delta_{1p}, \theta_{1p}) + B_n^{(2)} \Xi_{B,n}^{(2)}(\delta_{1p}, \theta_{1p})) \quad (41)$$

$$= T_{21}^m \sum_{n=0}^{\infty} (D_n^{(1)} \Theta_{D,n}^{(1)}(\delta_{2p}, \theta_{2p}) + D_n^{(2)} \Theta_{D,n}^{(2)}(\delta_{2p}, \theta_{2p})) + \frac{T_{22}^m}{j\omega \rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} (D_n^{(1)} \Xi_{D,n}^{(1)}(\delta_{2p}, \theta_{2p}) + D_n^{(2)} \Xi_{D,n}^{(2)}(\delta_{2p}, \theta_{2p}))$$

para $p = 1, 2, 3, \dots, N_{c_{BD}}$. Los puntos de colocación en el tronco de cono divergente (conducto B) tienen coordenadas δ_{1p} y θ_{1p} dadas por

$$\delta_{1p} = \sqrt{\text{Vert}_{B2}^2 + r_p^2}, \quad \theta_{1p} = \text{atan}\left(\frac{r_p}{\text{Vert}_{B2}}\right), \quad \text{Vert}_{B2} = \frac{R_C L_B}{R_C - R_A} = \text{Vert}_{B1} + L_B \quad (42-44)$$

En el caso de los puntos de colocación en el tronco de cono convergente (conducto D) se tiene que δ_{2p} y θ_{2p} están dadas por

$$\delta_{2p} = \sqrt{\text{Vert}_{D2}^2 + r_p^2}, \quad \theta_{2p} = \text{atan}\left(\frac{r_p}{\text{Vert}_{D2}}\right), \quad \text{Vert}_{D2} = \frac{R_C L_D}{R_C - R_E} \quad (45-47)$$

Por último, en la interfase de transición entre los conductos D y E , las condiciones de continuidad de presión y velocidad axial dadas por las Ecs. (33) y (34) se cumplen en $N_{c_{DE}}$ puntos de colocación

$$\sum_{n=0}^{\infty} (D_n^{(1)} \Theta_{B,n}^{(1)}(\delta_{2p}, \theta_{2p}) + D_n^{(2)} \Theta_{B,n}^{(2)}(\delta_{2p}, \theta_{2p})) = \sum_{n=0}^{\infty} (E_n^+ + E_n^-) J_0\left(\frac{\alpha_n r_p}{R_E}\right) \quad (48)$$

$$- j \sum_{n=0}^{\infty} (D_n^{(1)} \Xi_{D,n}^{(1)}(\delta_{2p}, \theta_{2p}) + D_n^{(2)} \Xi_{D,n}^{(2)}(\delta_{2p}, \theta_{2p})) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{E,n} (E_n^+ - E_n^-) J_0\left(\frac{\alpha_n r_p}{R_E}\right) \quad (49)$$

para $p = 1, 2, 3, \dots, N_{c_{DE}}$. En este caso, los puntos de colocación tienen coordenadas r_p y $z_{4p} = 0$ en el sistema cilíndrico (conducto E). En el sistema esférico del tronco de cono (conducto D), las coordenadas δ_{2p} y θ_{2p} vienen dadas por:

$$\delta_{2p} = \sqrt{\text{Vert}_{D1}^2 + r_p^2}, \quad \theta_{2p} = \text{atan}\left(\frac{r_p}{\text{Vert}_{D1}}\right), \quad \text{Vert}_{D1} = \frac{R_E L_D}{R_C - R_E} \quad (50-52)$$

2.3. Truncado y cálculo de las amplitudes modales

A partir de las igualdades definidas por las Ecs. (35), (36), (40), (41), (48) y (49) se dispone de un sistema de $2 N_{c_{AB}} + 2 N_{c_{BD}} + 2 N_{c_{DE}}$ ecuaciones. Las expansiones modales pueden truncarse para $n = N_t$, generando $8 (N_t + 1)$ incógnitas. Las condiciones habituales para el cálculo de la atenuación mediante el TL [15] implican

$$A_0^+ = 1, \quad A_n^+ = 0 \quad \forall n \quad \text{onda plana incidente} \quad E_n^- = 0 \quad \forall n \quad \text{terminación anecoica} \quad (53-55)$$

con lo cual el número de incógnitas queda reducido a $6 (N_t + 1)$. Para conseguir el mismo número de ecuaciones e incógnitas, una combinación inmediata es $N_{c_{AB}} = N_{c_{BD}} = N_{c_{DE}} = N_t + 1 = N_c$. Resuelto el sistema de ecuaciones y obtenidas las amplitudes modales $A_n^-, B_n^{(1)}, B_n^{(2)}, D_n^{(1)}, D_n^{(2)}$ y E_n^+ , el TL viene dado por [15,22]

$$TL = -20 \log |E_0^+| \quad (53)$$

3. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

3.1. Validación de la técnica de colocación puntual

La configuración geométrica seleccionada se define por medio de los siguientes valores [2,3]: conductos de entrada y salida de longitud $L_A = L_E = 0.1$ m, transiciones troncocónicas con longitud de valor $L_B = L_D = 0.03$ m, monolito con capilares definidos mediante $L_C = 0.135$ m, radios de los conductos implicados dados por $R_A = R_E = 0.0268$ m y radio del monolito cilíndrico $R_C = 0.0886$ m. De esta forma, los semiángulos de apertura son $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = 64.106^\circ$. Para el monolito, se asume que los conductos capilares tienen sección transversal cuadrada [1,14], con una resistividad $R = 500$ rayl/m y una porosidad $\phi = 0.8$ como valores por defecto. En los cálculos analíticos se consideran dos conjuntos de puntos de colocación con $N_{c1} < N_{c2}$; en cuanto a los cálculos numéricos, la malla de elementos finitos está formada por elementos cuadriláteros cuadráticos axisimétricos de 8 nodos, con un tamaño uniforme de valor 0.0025 m aproximadamente. Los resultados se muestran en la Fig. 2, que incluye adicionalmente predicciones basadas en un modelo de onda plana [1]. Como puede observarse, las predicciones analíticas convergen adecuadamente y guardan gran similitud con las basadas en elementos finitos, lo cual permite validar los desarrollos analíticos de colocación puntual presentados en las secciones previas. Las predicciones basadas en onda plana presentan buena concordancia con el resto de resultados a bajas frecuencias, por debajo de 500 Hz, tal como cabe esperar, pero empeoran considerablemente a frecuencias mayores.

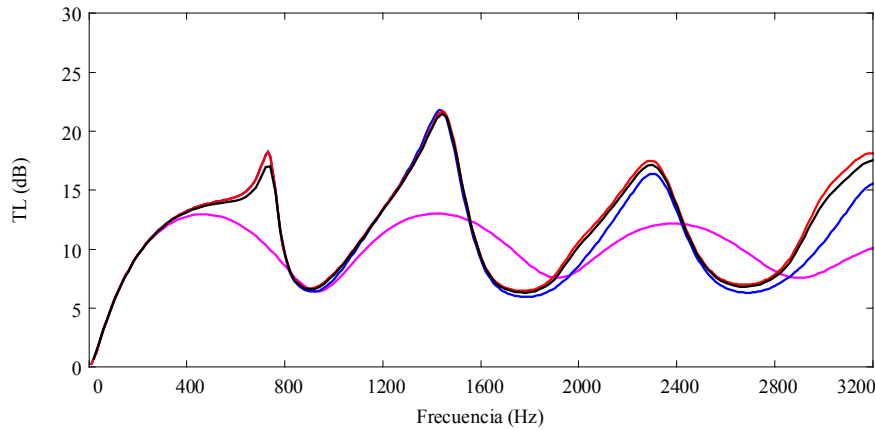


Figura 2 - TL de catalizador cónico: —, onda plana [1]; —, elementos finitos [6]; —, colocación puntual, N_{c2} ; —, colocación puntual, N_{c1} .

3.2. Influencia de la porosidad

En esta sección se repiten las simulaciones mostradas en las referencias [2,3], pero ahora los cálculos se realizan en base a la técnica de colocación puntual en lugar de recurrir al método de ajuste modal. La Fig. 3 muestra la influencia de la porosidad del monolito en el TL , para los valores $\phi = 0.7, 0.8$ y 0.9 . El resto de dimensiones y propiedades se mantiene igual que en el caso de la figura anterior. Puede observarse que una reducción de la porosidad origina una disminución de la atenuación a baja frecuencia (primera cúpula de atenuación). Este resultado es consistente con las predicciones de estudios previos [1,13], pero se opone a los resultados de otras referencias [11,12]. Tal como se indica en [3], esta aparente contradicción se justifica dado que en los trabajos [1,13] se asume que los cambios en la porosidad no tienen efecto en la resistividad, lo cual no es posible salvo que algún parámetro adicional asociado con el monolito también se modifique. Un análisis más detallado [10] muestra una dependencia entre R y ϕ , dada por $R = 8 \mu q^2 s_f / (l_p \phi)$, donde q , s_f y l_p son, respectivamente, la tortuosidad, el factor de forma y el semiancho del conducto capilar. Para frecuencias superiores a 800 Hz aproximadamente, por encima de la primera cúpula de atenuación, las predicciones discrepan respecto a lo anterior, con un mayor TL asociado a menor porosidad cuando la frecuencia aumenta.

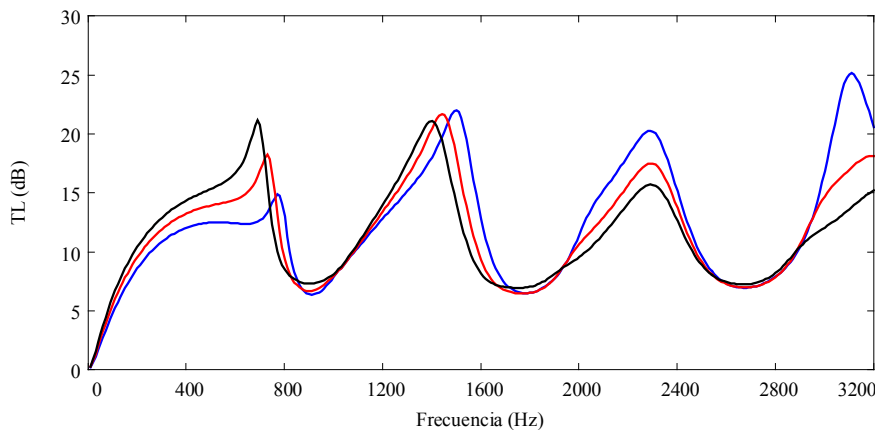


Figure 3 - TL de catalizador cónico obtenido mediante colocación puntual: —, $\phi = 0.7$; —, $\phi = 0.8$; —, $\phi = 0.9$.

3.3. Influencia de la resistividad

Se muestra aquí el efecto de la resistividad de monolito en la atenuación acústica del catalizador. Como en el caso anterior, se recurre a las configuraciones previamente estudiadas en las referencias [2,3]; los resultados mostrados en el trabajo actual, sin embargo, se han obtenido mediante la técnica de colocación puntual. Los resultados del modelo analítico de colocación se pueden observar en la Fig. 4 para tres valores de resistividad dados por $R = 500$ rayl/m, 750 rayl/m y 1000 rayl/m, así como una porosidad $\phi = 0.8$. Tal como se indica en [3], en comparación con la influencia de la porosidad, ahora la atenuación del catalizador presenta una tendencia más homogénea en todo el rango de frecuencia de interés, dado que mayores resistividades proporcionan mayores índices de pérdidas de transmisión, excepto en pequeños intervalos de frecuencia cercanos a los picos de atenuación. A baja frecuencia, la influencia de la resistividad es menor, al igual que ya se ha mostrado en trabajos anteriores [2,3].

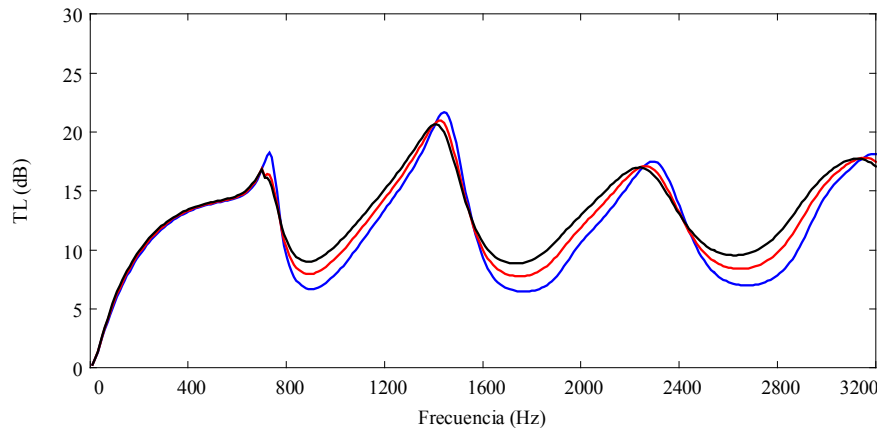


Figure 4 - TL de catalizador cónico obtenido mediante colocación puntual: —, $R = 500$ rayl/m; —, $R = 750$ rayl/m; —, $R = 1000$ rayl/m.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado una técnica analítica basada en colocación puntual para la simulación acústica de dispositivos de la línea de escape de motores de combustión, tales como catalizadores. Dicho modelo permite considerar la presencia de modos de orden superior en geometrías axisimétricas formadas por conductos circulares y cónicos y monolito circular. El procedimiento propuesto combina la colocación por puntos con las funciones de Hankel esféricas y de Legendre para los conductos cónicos y las funciones de Bessel en las regiones cilíndricas. El comportamiento acústico del monolito se ha enfocado mediante un modelo 3D/1D, en el que se sustituye el convertidor catalítico por una matriz de transferencia de tipo unidimensional (resultados previos han establecido que dicha aproximación es más consistente con las características acústicas reales de los conductos capilares que integran el monolito). Dicho modelo ha sido aplicado con éxito en trabajos anteriores mediante el método de elementos finitos y el de ajuste modal, y en la presente investigación se ha abordado su extensión a la técnica de colocación puntual para reducir el coste computacional asociado a los cálculos. De esta forma, se asume que el campo acústico puede ser tridimensional en los conductos de entrada y salida, pero no es posible la existencia de modos de orden superior en el monolito.

La técnica de colocación puntual se ha validado de manera satisfactoria con resultados numéricos obtenidos mediante el método de elementos finitos. Además, se ha analizado el efecto de la porosidad y la resistividad del monolito en la atenuación acústica del catalizador.

5. AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo recibido del Ministerio de Economía y Competitividad (proyecto TRA2013-45596-C2-1-R), así como de la Conselleria d'Educació, Cultura i Esport (proyecto Prometeo/2012/023).

REFERENCIAS

- [1] A. Selamet, V. Easwaran, J. M. Novak, R. A. Kach, Wave attenuation in catalytic converters: reactive versus dissipative effects, *Journal of the Acoustical Society of America*, 103 (1998), 935–943.
- [2] F. D. Denia, L. Baeza, R. Kirby, A. Selamet, A multidimensional analytical study of sound attenuation in catalytic converters, 39th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering (Inter-noise), Lisboa, Portugal, (2010).
- [3] F. D. Denia, J. Martínez-Casas, J. Albelda, F. J. Fuenmayor, Atenuación de ruido en dispositivos de postratamiento de MCI. Modelado analítico modal multidimensional, XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Ciudad Real, España, (2010).
- [4] A. G. Antebas, Contribución al modelado acústico de la línea de escape en motores de combustión. Aplicación a silenciadores y catalizadores, Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de València, (2010).
- [5] C. Jiang, T. W. Wu, M. B. Xu, C. Y. R. Cheng, BEM modeling of mufflers with diesel particulate filters and catalytic converters, *Noise Control Engineering Journal*, 58 (2010), 243-250.
- [6] F. D. Denia, J. Martínez-Casas, L. Baeza, F. J. Fuenmayor, Acoustic modelling of exhaust devices with nonconforming finite element meshes and transfer matrices, *Applied Acoustics*, 73 (2012), 713-722.
- [7] G. Kirchhoff, Ueber den einfluss der wärmeleitung in einem gase auf die schallbewegung, *Annalen der Physik und Chemie*, 134 (1868), 177-193.
- [8] C. Zwikker, C. W. Kosten, *Sound Absorbing Materials*, Elsevier (1949).
- [9] M. R. Stinson, The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape, *Journal of the Acoustical Society of America*, 89 (1991), 550-558.
- [10] H. S. Roh, W. P. Arnott, J. M. Sabatier, R. Raspet, Measurement and calculation of acoustic propagation constants in arrays of small air-filled rectangular tubes, *Journal of the Acoustical Society of America*, 89 (1991), 2617-2624.
- [11] E. Dokumaci, Sound transmission in narrow pipes with superimposed uniform mean flow and acoustic modelling of automobile catalytic converters, *Journal of Sound and Vibration*, 182 (1995), 799-808.
- [12] E. Dokumaci, On transmission of sound in circular and rectangular narrow pipes with superimposed mean flow, *Journal of Sound and Vibration*, 210 (1998), 375-389.
- [13] F. D. Denia, A. G. Antebas, R. Kirby, F. J. Fuenmayor, Multidimensional acoustic modelling of catalytic converters, 16th International Congress on Sound and Vibration, Cracovia, Polonia (2009).
- [14] J. F. Allard, N. Atalla, *Propagation of Sound in Porous Media*, Wiley (2009), ISBN 978-0-470-746615-0
- [15] M. L. Munjal, *Acoustics of Ducts and Mufflers*, Wiley (2014), ISBN 978-1-118-44312-5.
- [16] R. Glav, The point-matching method on dissipative silencers of arbitrary cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, 189 (1996), 123-135.
- [17] R. Glav, The transfer matrix for a dissipative silencer of arbitrary cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, 236 (2000), 575-594.
- [18] R. Kirby, J.B. Lawrie, A point collocation approach to modelling large dissipative silencers, *Journal of Sound and Vibration*, 286 (2005), 313-339.

- [19] R. Kirby, Transmission loss predictions for dissipative silencers of arbitrary cross section in the presence of mean flow, *Journal of the Acoustical Society of America*, 114 (2003), 200-209.
- [20] L. Yang, Z. L. Ji, T. W. Wu, Transmission loss prediction of silencers by using combined boundary element method and point collocation approach, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 61 (2015), 265-273.
- [21] F. D. Denia, E. M. Sánchez-Orgaz, L. Baeza, R. Kirby, Point collocation scheme in silencers with temperature gradient and mean flow, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 291 (2016), 127-141.
- [22] R. Kirby, F. D. Denia, Analytic mode matching for a circular dissipative silencer containing mean flow and a perforated pipe, *Journal of the Acoustical Society of America*, 122 (2007), 3471-3482.
- [23] M. Willatzen, The influence of a liquid flow on sound fields confined by conical walls, *Journal of Sound and Vibration*, 248 (2001), 847-863.
- [24] F. D. Denia, F. J. Fuenmayor, J. Carballeira, Three-dimensional analysis of mufflers with conical ducts. Analytical, numerical and experimental Studies, *Internoise 2003*, 32nd International Congress and Exposition on Noise Control Engineering, Jeju, Corea (2003).