

## ESTUDIO ANALÍTICO LINEAL DEL MOVIMIENTO DE LOSA CUADRADA RÍGIDA SOBRE LÁMINA FLEXIBLE DE PEQUEÑO ESPESOR PEGADA AL SUELO

PACS: \*43.55.+P, \*43.40+S.

Enrique Segovia<sup>2</sup>; Jeniffer Torres<sup>1</sup>; Jesús Carbajo<sup>1</sup>; Jaime Ramis<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Departamento de Física, Universidad de Alicante  
Carretera San Vicente del Raspeig, 03080, San Vicente del Raspeig, España  
{[jesus.carbajo@ua.es](mailto:jesus.carbajo@ua.es), [jtr17@alu.ua.es](mailto:jtr17@alu.ua.es), [jramis@ua.es](mailto:jramis@ua.es)}

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Alicante  
Carretera San Vicente del Raspeig, 03080, San Vicente del Raspeig, España  
{ [enrique.gonzalo@ua.es](mailto:enrique.gonzalo@ua.es) }

### RESUMEN

En este trabajo se encuentra la solución al problema elástico lineal de una losa cuadrada rígida excitada armónicamente y moviéndose sobre una lámina flexible de espesor despreciable frente a la anchura. No existe deslizamiento ni entre losa y lámina ni entre lámina y suelo. Losa y lámina son cuadradas de la misma anchura. En acústica arquitectónica se diría que la losa se comporta como un suelo flotante, siendo una de las medidas de la aceleración del ensayo experimental para medir la rigidez dinámica de un material un ejemplo de aplicación de la solución analítica aquí propuesta, hallándose también una relación entre dicha rigidez dinámica de un material y sus parámetros elásticos. La validez de la solución analítica se comprueba mediante un modelo numérico de elementos finitos.

### ABSTRACT

In this work the solution to the linear elastic problem of a harmonically excited rigid square slab and moving on a flexible sheet of negligible thickness compared to the width is found. There is no slip between slab and plate nor between sheet and floor. The plate and the sheet are square of the same width. In architectural acoustics it would be said that the plate acts as a floating floor. This analytical solution can be applied performed to calculate the movement of the slab of the experimental configuration used to determine the dynamic stiffness of a material. The validity of the analytical solution is verified by a numerical finite element model.

## 1. INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO

El objeto de este trabajo es el de llevar a cabo un estudio analítico de la configuración experimental que se describe en la normativa [1], para la determinación de la rigidez dinámica de un material, dando explicación, de esta forma, a la aparición de otras frecuencias distintas de la fundamental cuando se lleva a cabo la experiencia. Además, el estudio abre el camino a nuevas vías para la caracterización de materiales.

Técnicamente hablando, el problema es la determinación del movimiento de una losa cuadrada rígida cuando está pegada sobre una lámina flexible de pequeño espesor. En las figuras 1 (a) y (b) se presentan las variables involucradas en el problema

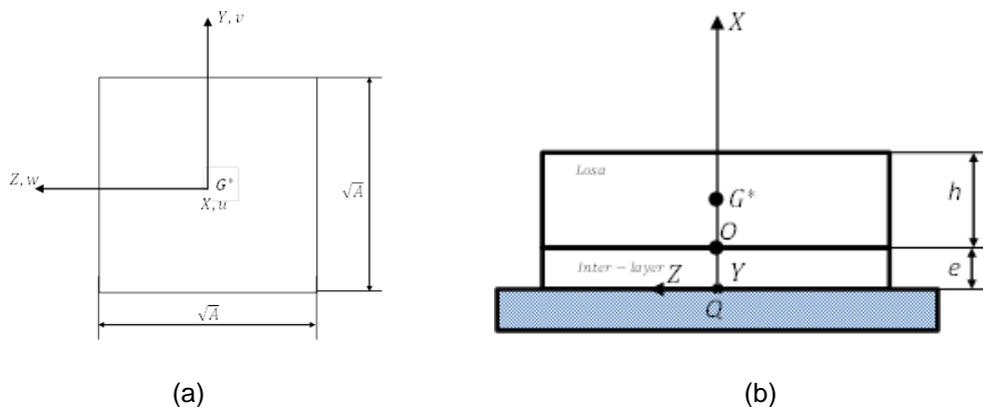


Figura 1 – Vista en planta (izquierda) y alzado (derecha) de la configuración bajo estudio.

La notación que se utiliza es la siguiente:  $G^*$  = centro de masas de la losa;  $O$  = centro cara inferior de la losa (o de la cara superior de la inter-capa);  $Q$  = origen del sistema de coordenadas cartesiano  $QXYZ$  (centro de la cara inferior de la inter-capa);  $u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t)$  = movimientos de los puntos de la inter-capa (función de las coordenadas cartesianas  $x,y,z$  y del tiempo  $t$ );  $e$  = espesor de la inter-capa;  $A$  = área de las caras superior e inferior de la losa (o de la inter-capa);  $h$  = espesor de la losa;  $h=m/\rho A$ ;  $m$  = masa de la losa;  $\rho$  = densidad del material de la losa;  $\nu$  es el coeficiente de Poisson;  $E$  es el módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young;  $K$  es el módulo de compresibilidad;  $G$  es el módulo de elasticidad transversal;  $\lambda$  es el primer parámetro de Lamé;  $M$  es el módulo de onda  $P$

Las hipótesis de partida son las siguientes:

- No hay deslizamiento entre la losa y la inter-capa ni entre el suelo y la inter-capa.
- La rigidez del material de la losa es mucho mayor que la rigidez del material de la inter-capa, pudiendo la losa ser considerada como un sólido rígido.
- El espesor  $e$  de la inter-capa es mucho más pequeño que su anchura, ( $e \ll \sqrt{A}$ )
- Existe linealidad: a) Del material de la inter-capa: es válida la ley de Hooke (elasticidad lineal); b) Geométrica: es válido el principio de los pequeños desplazamientos, según el cual, al aplicar las fuerzas sobre los cuerpos, los desplazamientos que se originan son pequeños en relación con las dimensiones de los mismos. Por tanto, las variaciones dimensionales no afectan prácticamente a las distancias implicadas en las ecuaciones de equilibrio dinámico.
- Las funciones  $u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t)$  son continuas, así como sus derivadas primeras (deformaciones, componentes de giros y componentes de la velocidad

angular) y todas éstas (funciones y derivadas) son infinitésimos de primer orden (la derivada temporal se representará por un punto).

Entre dos puntos cualesquiera A y B de la losa, se pueden aplicar las ecuaciones siguientes de un sólido rígido [2]:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix}_A + \dot{\vec{\theta}} \times \overline{AB} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix}_A + \ddot{\vec{\theta}} \times \overline{AB} + \dot{\vec{\theta}} \times (\dot{\vec{\theta}} \times \overline{AB}) \approx \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix}_A + \ddot{\vec{\theta}} \times \overline{AB} \quad (2)$$

ya que  $\dot{\vec{\theta}} \times (\dot{\vec{\theta}} \times \overline{AB})$  es un infinitésimo de segundo orden, mientras que los otros dos sumandos son infinitésimos de primer orden.

Además, por la misma razón, todos los vectores se pueden expresar en los ejes X,Y,Z correspondientes a las direcciones de la losa sin deformar, considerando que las direcciones de los vectores unitarios se mantienen constantes.

Supondremos, además, que es despreciable el amortiguamiento de la losa y que el amortiguamiento de la inter-capa puede simularse considerando parte imaginaria en los parámetros elásticos

## 2. ANÁLISIS MODAL

### 2.1. Analítico

Se trata de encontrar los modos de "sólido rígido de la losa" que se pueden excitar. Para ello aplicaremos las ecuaciones de conservación del momento lineal y angular para la losa rígida (supuesta sólido rígido). Así, las 6 ecuaciones son [2]:

$$F_x = m\ddot{u}_{G^*} \quad (3a) \quad M_{xG^*} = I_{xG^*}\ddot{\theta}_x \quad (3d)$$

$$F_y = m\ddot{v}_{G^*} \quad (3b) \quad M_{yG^*} = I_{yG^*}\ddot{\theta}_y \quad (3e)$$

$$F_z = m\ddot{w}_{G^*} \quad (3c) \quad M_{zG^*} = I_{zG^*}\ddot{\theta}_z \quad (3f)$$

Siendo los momentos de inercia centroidales del sólido rígido:

$$I_{xG^*} = m \frac{A}{6}, I_{yG^*} = I_{zG^*} = \frac{m}{12} (A + e^2) \quad (4)$$

Para determinar los desplazamientos lineales y angulares del centro de masas se utiliza la expresión:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{G^*} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_O + \vec{\theta} \times \overline{OG^*} \quad (5)$$

Por tratarse de un sólido rígido, las rotaciones son idénticas para O que para G. Es necesario por tanto, determinar los desplazamientos y las rotaciones del punto O perteneciente a la lámina. El siguiente paso es determinar el campo de desplazamiento de la lámina para particularizar al punto O a posteriori. Dado que no existen deslizamientos y  $0 \leq x \leq e$ :

$\partial v \partial y = 0$  en la inter-capa en  $x=0$  suelo inmóvil y  $x=e$  (losa rígida)

$\partial w \partial z = 0$  en la inter-capa en  $x=0$  suelo inmóvil y  $x=e$  (losa rígida)

y como la raíz cuadrada del área,  $A$ , debe ser mucho mayor que el espesor  $\Rightarrow \partial v \partial y = \varepsilon y \ll$ , en la mayor parte de la inter-capa y  $\Rightarrow \partial w \partial z = \varepsilon z \ll$ , en la mayor parte de la inter-capa, se puede suponer:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) &\cong v(x, z, t) \\ w(x, y, z, t) &\cong w(x, y, t) \end{aligned} \quad (6)$$

Con el objeto de facilitar el cumplimiento de la condiciones de contorno en  $x=0$ :

$$\begin{aligned} u(0, y, z, t) &= 0 \\ v(0, z, t) &= 0 \\ w(0, y, t) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Se buscan soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= e^{i\omega t} f_u(x) g_u(y, z) \\ v(x, z, t) &= e^{i\omega t} f_v(x) g_v(z) \\ w(x, y, t) &= e^{i\omega t} f_w(x) g_w(y) \end{aligned} \quad (8)$$

de forma que se pueda aplicar el método de separación de variables

Tomando como de partida las ecuaciones cinemáticas (también llamadas de compatibilidad) se deducirían las deformaciones. Considerando las ecuaciones de Lamé se deducirían las tensiones y obligando a que se verifiquen las ecuaciones de equilibrio interno se obtendrían los movimientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  [3].:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= e^{i\omega t} C_5 \text{Sin} \left( \omega \sqrt{\frac{\rho}{M}} x \right) [C_1 y z + C_3 y + C_2 z + C_4] \\ v(x, z, t) &= e^{i\omega t} \left[ C_9 \text{Sin} \left( \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} x \right) + \frac{C_5}{\omega} \sqrt{\frac{M}{\rho}} \text{Cos} \left( \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} x \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_5}{\omega} \sqrt{\frac{M}{\rho}} \text{Cos} \left( \omega \sqrt{\frac{\rho}{M}} x \right) \right] (C_1 z + C_3) \\ w(x, y, t) &= e^{i\omega t} \left[ C_{13} \text{Sin} \left( \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} x \right) + \frac{C_5}{\omega} \sqrt{\frac{M}{\rho}} \text{Cos} \left( \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} x \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_5}{\omega} \sqrt{\frac{M}{\rho}} \text{Cos} \left( \omega \sqrt{\frac{\rho}{M}} x \right) \right] (C_1 y + C_2) \end{aligned} \quad (9)$$

Donde  $C_i$  son constantes arbitrarias.

Para determinar el movimiento de la losa hay que tener en cuenta que las ecuaciones de continuidad en  $x=e$  en la región entre la intercapa y la losa rígida, constituyen las condiciones de contorno para los movimientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  anteriores, estas ecuaciones son:

$$u(e, y, z, t)_{interlayer} = u(e, y, z, t)_{plate} \quad (10)$$

$$v(e, z, t)_{interlayer} = v(e, z, t)_{plate}$$

$$w(e, y, t)_{interlayer} = w(e, y, t)_{plate}$$

Por tanto, en  $x = e$ :

$$\frac{\partial u}{\partial y}_{interlayer} = \frac{\partial u}{\partial y}_{plate} \quad (11a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}_{interlayer} = \frac{\partial u}{\partial z}_{plate} \quad (11c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}_{interlayer} = \frac{\partial v}{\partial z}_{plate} \quad (11b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}_{interlayer} = \frac{\partial w}{\partial y}_{plate} \quad (11d)$$

En la losa, suponiendo que es deformable, cuando se trata de pequeños giros, la componente  $\theta_x$  del giro de sólido rígido en un punto cualquiera de la misma es:

$$\theta_{x_{plate}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{plate(in\ x=e)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{interlayer\ (in\ x=e)} \quad (12)$$

$$\theta_{y_{plate}} \approx \frac{\partial u}{\partial z}_{plate} = \frac{\partial u}{\partial z}_{interlayer\ (in\ x=e)} \approx -\frac{\partial w}{\partial x}_{plate}$$

$$\theta_{z_{plate}} \approx -\frac{\partial u}{\partial y}_{plate} = -\frac{\partial u}{\partial y}_{interlayer\ (in\ x=e)} \approx \frac{\partial v}{\partial x}_{plate}$$

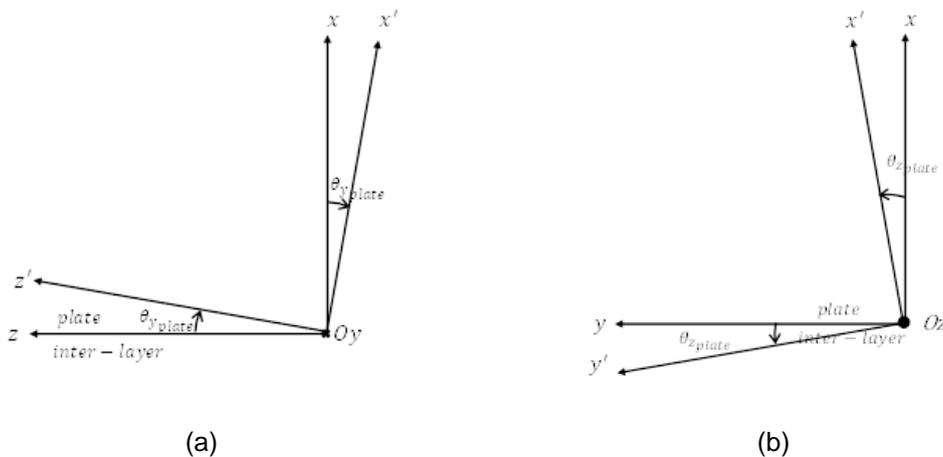


Figura 2 – (a) Giro respecto OY de la cara superior de la inter-capa. (b) Giro respecto OZ de la cara superior de la lámina

El movimiento de translación del centro de gravedad  $G^*$  del sólido rígido se puede calcular a partir de la ecuación (5) (al existir linealidad geométrica se puede aproximar un arco de circunferencia por la tangente).

Las componentes de las fuerzas y los momentos se calculan a partir de las expresiones de las tensiones internas en función de los movimientos. No se expone el proceso por falta de espacio.

Ya se dispone de todas las variables necesarias para poder aplicar las ecuaciones (3), con lo que ahora ya se pueden plantear las ecuaciones de la dinámica del sólido rígido para la losa.

De la ecuación (3 a) se llega al modo de vibración correspondiente a translación pura en el eje x y a la ecuación  $Tan\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) = \frac{A\sqrt{M\rho}}{m\omega}$  que nos proporciona la frecuencia natural  $\omega$

En las condiciones habituales de los experimentos para determinar la rigidez dinámica,  $e$  y  $\rho$  suelen ser muy pequeños  $\Rightarrow e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}} \ll 1$  y se tiene:

$$Tan\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \sim \left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) = \frac{A\sqrt{M\rho}}{m\omega} \quad (13)$$

Entonces, si  $e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}} \ll 1$ :

$$\omega^2 = \frac{MA}{em} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{AM}{em}} \quad (14)$$

La rigidez dinámica  $k_d = 4\pi^2 \frac{m}{A} f^2 = \omega^2 \frac{m}{A} = \frac{M}{e}$

Luego  $k_d = \frac{M}{e} \rightarrow M = k_d e$  esta es la ecuación para hallar  $M$  si  $e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}} \ll 1$

Para determinar los otros modos hay que seguir explotando el resto de ecuaciones (3).

En concreto, de la ecuación (3 b) y (3 f) ( $F_y = m\ddot{v}_{G^*}$  y  $M_{zG^*} = I_{zG^*}\ddot{\theta}_z$ )

La ecuación para hallar las frecuencias naturales asociadas a estos modos de vibración serán, después de operar:

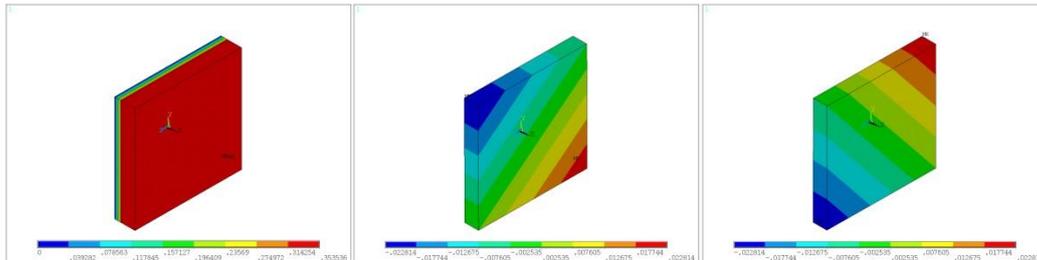
$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}f^2\pi^2 \left( 6Ahm\sqrt{GM} \cos^2\left(2ef\pi\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \right. \\ & + 2m \sin\left(2ef\pi\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \left( -A^2f\pi\sqrt{M\rho} \cos\left(2ef\pi\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \right. \\ & + 3Ah\sqrt{GM} \sin\left(2ef\pi\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \\ & + 2(-3AGh + (A + e^2)f^2m\pi^2) \sin\left(2ef\pi\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \\ & + A \cos\left(2ef\pi\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \left[ \sqrt{GM}(-6hm + A^2\rho) \cos\left(2ef\pi\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \right. \\ & \left. \left. - 2f(A + e^2 + 3h^2)m\pi\sqrt{G\rho} \sin\left(2ef\pi\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \right] \right) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

La solución  $f = 0$  doble corresponde a los modos de vibración de sólido rígido libre en la translación según el eje Y y la rotación según el eje Z.

Si se analizaran las ecuaciones (3 c) y (3 e) se llegaría a otros modos de vibración que tienen las mismas frecuencias naturales porque la ecuación, por simetría es la misma.

De la ecuación (3 d), se obtendría el modo de vibración correspondiente a la losa girando alrededor del eje x.

En la figura 3, se muestran los modos discutidos obtenidos analíticamente.



(a)

(b)

(c)

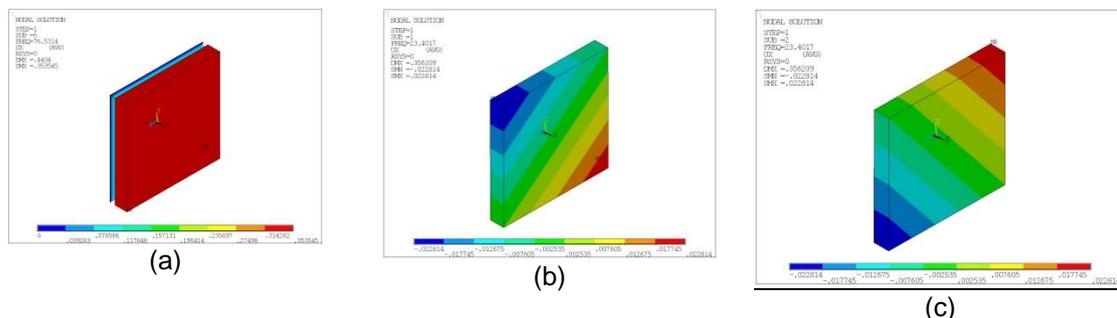
Figura 3 – Modos obtenidos analíticamente. (a) Modo de translación pura en el eje x (La losa se comporta como un sólido rígido). (b) Modo de rotación respecto a un eje diagonal en el plano de la lámina (combinado con translación en el mismo plano) ; (c) Modo de rotación respecto a un eje diagonal (perpendicular al anterior) en el plano de la lámina (combinado con translación en el mismo plano)

## 2.2. Numérico

Se ha implementado un experimento numérico en Ansys (Versión 15.0.7). El modelo tiene 12800 elementos del tipo solid186 de alto orden 3D (20 nudos por elemento) y 58097 nudos con un mallado regular. Se ha seguido el criterio habitual en cuanto al tamaño de elementos. Se comprobó que no había error de discretización (disminuyendo el tamaño de los elementos no había variaciones apreciables en los resultados).

Los resultados muestran modos de vibración en los que parece que el movimiento de la losa es el de un sólido rígido, lo cual es lógico, pues el material de la losa es mucho más rígido que el de la inter-capa. Además, uno de estos modos es el que sirve para determinar la rigidez dinámica de la inter-capa. Es importante señalar que, debido a que la sección es cuadrada hay dos frecuencias naturales dobles lo cual implica que cualquier combinación lineal de dos modos también será modo de vibración.

Se muestran sólo tres modos de vibración ya .....



(a)

(b)

(c)

Figura 4 – Modos obtenidos numéricamente (a) Modo de translación pura en el eje x (La losa se comporta como un sólido rígido). (b) Modo de rotación respecto a un eje diagonal en el plano de la lámina (combinado con translación en el mismo plano) ; (c) Modo de rotación respecto a un eje diagonal (perpendicular al anterior) en el plano de la lámina (combinado con translación en el mismo plano)

### 3. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha descrito el proceso para determinar analíticamente los modos y frecuencias naturales de una losa cuadrada rígida excitada armónicamente y moviéndose sobre una lámina flexible de espesor despreciable frente a la anchura suponiendo que no existe deslizamiento ni entre losa y lámina ni entre lámina y suelo. Losa y lámina son cuadradas de la misma anchura. En acústica arquitectónica se diría que la losa se comporta como un suelo flotante, siendo una de las medidas de la aceleración del ensayo experimental para medir la rigidez dinámica de un material un ejemplo de aplicación de la solución analítica aquí propuesta, hallándose también una relación entre dicha rigidez dinámica de un material y sus parámetros elásticos. La validez de la solución analítica se ha comprobado comparando con los resultados de un modelo numérico de elementos finitos obteniendo una correlación completa.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha podido realizar gracias a la ayuda concedida por la Generalitat Valenciana para la realización de proyectos de I+D para grupos de investigación emergentes (expediente GV/2013/019).

### REFERENCIAS

- [1] UNE-EN ISO 29052-1 Acústica de la edificación. Determinación de la Rigidez Dinámica. Parte 1 Materiales usados bajos suelos flotantes en viviendas. (1989).
- [2] Beer, F.P et Al, *Vector Mechanics for engineers. Dynamics*, 9<sup>th</sup> Edition; Mc Graw Hill; New York 2010.
- [3] Ortiz Berrocal, L; *Elasticidad*, 3ª Edición Mc Graw Hill; Madrid , 1998.