

## DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS ELÁSTICOS DE UN MATERIAL A PARTIR DE LAS MEDIDAS DE LA ACELERACIÓN DEL ENSAYO EXPERIMENTAL UTILIZADO PARA MEDIR LA RIGIDEZ DINÁMICA

PACS: \*43.55.+P, \*43.40+S.

Enrique Segovia<sup>2</sup>; Jeniffer Torres<sup>1</sup>; Jesús Carbajo<sup>1</sup>; Jaime Ramis<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Departamento de Física, Universidad de Alicante  
Carretera San Vicente del Raspeig, 03080, San Vicente del Raspeig, España  
{[jesus.carbajo@ua.es](mailto:jesus.carbajo@ua.es), [jtr17@alu.ua.es](mailto:jtr17@alu.ua.es), [jramis@ua.es](mailto:jramis@ua.es)}

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Alicante  
Carretera San Vicente del Raspeig, 03080, San Vicente del Raspeig, España  
{ [enrique.gonzalo@ua.es](mailto:enrique.gonzalo@ua.es) }

### RESUMEN

En este trabajo se describe un método para evaluar los parámetros elásticos de un material elástico lineal partiendo de medidas de aceleración como las realizadas en el ensayo experimental para medir la rigidez dinámica de un material. Excitando armónicamente la losa en un rango de frecuencias pueden hallarse los parámetros elásticos en dicho rango de frecuencias, por lo que el material a caracterizar puede presentar comportamiento viscoelástico lineal. El material de la losa ha de ser mucho más rígido que el de la lámina del material a caracterizar, no ha de haber deslizamiento ni entre losa y lámina ni entre lámina y suelo. El espesor de la lámina ha de ser mucho menor que su anchura.

### ABSTRACT

This paper describes a method to evaluate the elastic parameters of a linear elastic material based on acceleration measurements as those in the experimental test for measuring the dynamic stiffness of a material that can be viscoelastic. The material of the plate must be much more rigid than the material of the sheet to be characterized. There is no slip between slab and plate nor between sheet and floor and the thickness of the sheet must be much smaller than its width.

## 1. INTRODUCCIÓN

El procedimiento para la determinación de la rigidez dinámica de un material viene descrito en la normativa [1]. La configuración experimental básica está formada por un martillo de impactos con un sensor de fuerza y un acelerómetro. A partir de los datos de ambos sensores se determina la función de transferencia que, normalmente, si el golpe se lleva a cabo en el centro de la placa, presenta un máximo a una frecuencia determinada,  $f_s$ . A partir de este dato y de la masa de la placa se determina la rigidez dinámica del material.

En este trabajo se propone una metodología para determinar, no sólo la rigidez dinámica, sino todos los parámetros elásticos de un material elástico lineal partiendo de medidas de aceleración como las realizadas en el ensayo experimental para medir la rigidez dinámica de un material. El material de la losa ha de ser mucho más rígido que el de la lámina del material a caracterizar, no ha de haber deslizamiento ni entre losa y lámina ni entre lámina y suelo. El espesor de la lámina ha de ser mucho menor que su anchura.

## 2. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO. ANÁLISIS ARMÓNICO

Se aplica en un punto  $P(e + h, y_F, z_F)$  cualquiera de la superficie superior de la losa una fuerza armónica de valor  $\{F_0 e^{i\omega t}, 0, 0\}$  y se calcula la aceleración (según el eje X) en un punto  $Q(e + h, y_Q, z_Q)$  cualquiera de la superficie superior de la losa. Se intentan reproducir las medidas experimentales que sirven de base para medir la rigidez dinámica de un material (ver figuras 1)

El planteamiento es idéntico al seguido en [2] introduciendo en las ecuaciones de equilibrio dinámicas la fuerza armónica aplicada. Por completitud se citan las hipótesis del planteamiento:

- No hay deslizamiento entre la losa y la inter-capa ni entre el suelo y la inter-capa.
- La rigidez del material de la losa es mucho mayor que la rigidez del material de la inter-capa, pudiendo la losa ser considerada como un sólido rígido.
- El espesor  $e$  de la inter-capa es mucho más pequeño que su anchura  $A$  ( $e \ll \sqrt{A}$ )
- Existe linealidad: a) Del material de la inter-capa: es válida la ley de Hooke (elasticidad lineal); b) Geométrica: es válido el principio de los pequeños desplazamientos, según el cual, al aplicar las fuerzas sobre los cuerpos, los desplazamientos que se originan son pequeños en relación con las dimensiones de los mismos. Por tanto, las variaciones dimensionales no afectan prácticamente a las distancias implicadas en las ecuaciones de equilibrio dinámico.
- Las funciones  $u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t)$  son continuas, así como sus derivadas primeras (deformaciones, componentes de giros y componentes de la velocidad angular) y todas éstas (funciones y derivadas) son infinitésimos de primer orden (la derivada temporal se representará por un punto).

La notación que se utiliza es la siguiente:  $G^*$  = centro de masas de la losa;  $O$  = centro cara inferior de la losa (o de la cara superior de la inter-capa);  $Q^*$  = origen del sistema de coordenadas cartesiano  $Q^*XYZ$  (centro de la cara inferior de la inter-capa);  $u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t)$  = movimientos de los puntos de la inter-capa (función de las coordenadas cartesianas  $x,y,z$  y del tiempo  $t$ );  $e$  = espesor de la inter-capa;  $A$  = área de las caras superior e inferior de la losa (o de la inter-capa);  $h$  = espesor de la losa  $h=m/\rho A$ ;  $m$  = masa de la losa;  $\rho$  = densidad del material de la losa;  $\nu$  es el coeficiente de Poisson;  $E$  es el módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young;  $K$  es el módulo de

compresibilidad;  $G$  es el módulo de elasticidad transversal;  $\lambda$  es el primer parámetro de Lamé;  $M$  es el módulo de onda  $P$

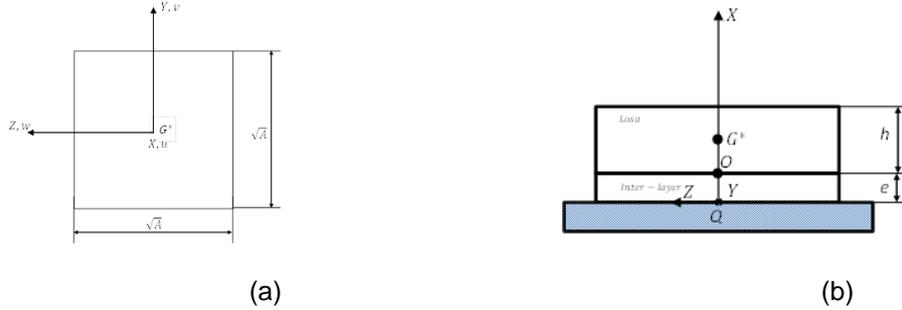


Figura 1 – Vista en planta (izquierda) y alzado (derecha) de la configuración bajo estudio.

El primer paso es resolver las nuevas ecuaciones de equilibrio dinámico y determinar los desplazamientos y las rotaciones del centro de masas de la losa. Para calcular la aceleración de  $Q$  se emplea la expresión (1), obteniendo la expresión (2):

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix}_Q = \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix}_{G^*} + \ddot{\theta} \times \overline{G^*Q} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_Q &= \ddot{u}_{G^*} + \ddot{\theta}_y z_Q - \ddot{\theta}_z y_Q \quad (2) \\ &= \frac{-\omega^2 F_0 e^{i\omega t}}{A\omega\sqrt{M\rho} \text{Cot}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) - m\omega^2} \\ &\quad + F_0 e^{i\omega t} (z_F z_Q \\ &\quad + y_F y_Q) \text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \left[ 12\omega \left[ -A\sqrt{G\rho} \text{Cos}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) + m\omega \text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \right] \right] \\ &\quad / \left[ 6Ahm\sqrt{GM} \text{Cos}^2\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \right. \\ &\quad + A\sqrt{G\rho} \text{Cos}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \left[ \left( -6hm\sqrt{\frac{M}{\rho}} + A^2\sqrt{M\rho} \right) \text{Cos}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \right. \\ &\quad \left. \left. - (A + e^2 + 3h^2)m\omega \text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \right] \right. \\ &\quad + m\text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \left( -A^2\omega\sqrt{M\rho} \text{Cos}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) + 6Ah\sqrt{GM} \text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \right. \\ &\quad \left. \left. + [-12AGh + (A + e^2)m\omega^2] \text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \right] \right] \end{aligned}$$

Dividiendo la expresión anterior por  $F_0 e^{i\omega t}$ :

$$\frac{\ddot{u}_Q}{F_0 e^{i\omega t}} = \frac{\ddot{u}_{G^*}}{F_0 e^{i\omega t}} + \frac{\ddot{\theta}_y z_Q - \ddot{\theta}_z y_Q}{F_0 e^{i\omega t}} \quad (3)$$

Haciendo:

$$\frac{\ddot{u}_{G^*}}{F_0 e^{i\omega t}} = \frac{-\omega^2}{A\omega\sqrt{M\rho} \text{Cot}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) - m\omega^2} = AcG^*(\omega, M, \rho, e, A, m) \quad (4)$$

y:

$$\frac{\ddot{\theta}_y z_Q - \ddot{\theta}_z y_Q}{F_0 e^{i\omega t}} = (z_F z_Q + y_F y_Q) f_\theta(\omega, M, \rho, e, A, m, h, G) \quad (5)$$

donde:

$$\begin{aligned} f_\theta(\omega, M, \rho, e, A, m, h, G) & \quad (6) \\ &= \text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \left[ 12\omega \left[ -A\sqrt{G\rho}\text{Cos}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) + m\omega\text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \right] \right. \\ & \quad / \left[ 6Ahm\sqrt{GM}\text{Cos}^2\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \right. \\ & \quad + A\sqrt{G\rho}\text{Cos}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \left[ \left( -6hm\sqrt{\frac{M}{\rho}} + A^2\sqrt{M\rho} \right) \text{Cos}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \right. \\ & \quad \left. \left. - (A + e^2 + 3h^2)m\omega\text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \right] \right. \\ & \quad + m\text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \left( -A^2\omega\sqrt{M\rho}\text{Cos}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) + 6Ah\sqrt{GM}\text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \right. \\ & \quad \left. \left. + [-12AGh + (A + e^2)m\omega^2]\text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \right] \right] \end{aligned}$$

Resulta:

$$\begin{aligned} AcQ(\omega, M, \rho, e, A, m, h, G, y_F, z_F, y_Q, z_Q) &= \frac{\ddot{u}_Q}{F_0 e^{i\omega t}} \quad (7) \\ &= AcG^*(\omega, M, \rho, e, A, m) + (z_F z_Q + y_F y_Q) f_\theta(\omega, M, \rho, e, A, m, h, G) \end{aligned}$$

### 3. METODOLOGÍA PROPUESTA

Se conocen  $\rho, e, A, m, h$  y se desea hallar los parámetros elásticos  $M(\omega)$  y  $G(\omega)$  para cada frecuencia  $\omega = 2\pi f$

Al hacer las medidas, se tienen, para cada frecuencia  $\omega = 2\pi f$

- $AcQ_1$  medida en el punto  $Q_1(e + h, y_{Q_1}, z_{Q_1})$  cuando se aplica la fuerza en el punto  $P_1(e + h, y_{F_1}, z_{F_1})$ , y
- $AcQ_2$  medida en el punto  $Q_2(e + h, y_{Q_2}, z_{Q_2})$  cuando se aplica la fuerza en el punto  $P_2(e + h, y_{F_2}, z_{F_2})$

Se pueden plantear estas dos ecuaciones:

$$AcQ_1 = AcG^* + (z_{F_1}z_{Q_1} + y_{F_1}y_{Q_1})f_\theta \quad (8)$$

$$AcQ_2 = AcG^* + (z_{F_2}z_{Q_2} + y_{F_2}y_{Q_2})f_\theta$$

Se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas  $AcG^*$  y  $f_\theta$  cuya solución es:

$$AcG^*_{Exp} = \frac{AcQ_2y_{F_1}y_{Q_1} - AcQ_1y_{F_2}y_{Q_2} + AcQ_2z_{F_1}z_{Q_1} - AcQ_1z_{F_2}z_{Q_2}}{y_{F_1}y_{Q_1} - y_{F_2}y_{Q_2} + z_{F_1}z_{Q_1} - z_{F_2}z_{Q_2}} \quad (9)$$

$$f_{\theta Exp} = \frac{AcQ_1 - AcQ_2}{y_{F_1}y_{Q_1} - y_{F_2}y_{Q_2} + z_{F_1}z_{Q_1} - z_{F_2}z_{Q_2}}$$

La única condición que deben cumplir los puntos  $P_1, P_2, Q_1$  y  $Q_2$  es que sus coordenadas verifiquen:

$$y_{F_1}y_{Q_1} - y_{F_2}y_{Q_2} + z_{F_1}z_{Q_1} - z_{F_2}z_{Q_2} \neq 0 \quad (10)$$

para que el sistema anterior sea compatible determinado.

- **Cálculo de  $M$ :**

A partir del valor  $AcG^*_{Exp}$  calculado anteriormente y recordando que son conocidos  $\omega, \rho, e, A, m$ , el valor de  $M$  se puede calcular resolviendo la ecuación no lineal:

$$AcG^*_{Exp} = AcG^*(\omega, M, \rho, e, A, m) = \frac{-\omega^2}{A\omega\sqrt{M\rho} \cot\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) - m\omega^2} \quad (11)$$

Esta ecuación admite una solución aproximada si  $e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}} \ll 1$ , en cuyo caso

$$\cot\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) = \frac{1}{\tan\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right)} \approx \frac{1}{e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}} \quad (12)$$

Entonces, la ecuación anterior quedaría así:

$$AcG^*_{Exp} = \frac{-\omega^2}{A\omega\sqrt{M\rho} \frac{1}{e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}} - m\omega^2} = \frac{-\omega^2}{\frac{AM}{e} - m\omega^2} \quad (13)$$

Cuya solución se obtiene fácilmente:

$$M_{Exp} = \frac{e\omega^2(AcG^*_{Exp}m - 1)}{A AcG^*_{Exp}} \quad (14)$$

Este valor se puede tomar como el valor inicial de un algoritmo iterativo para calcular el valor exacto de  $M$  que satisface la ecuación no lineal (11) hallada antes.

- **Cálculo de  $G$ :**

A partir del valor  $f_{\theta_{Exp}}$  calculado anteriormente, recordando que son conocidos  $\omega, \rho, e, A, m, h$  y que se ha calculado  $M = M_{Exp}$ , el valor de  $G$  se puede calcular resolviendo la ecuación no lineal:

$$\begin{aligned} f_{\theta_{Exp}} &= f_{\theta}(\omega, M, \rho, e, A, m, h, G) & (15) \\ &= \text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \left[ 12\omega \left[ -A\sqrt{G\rho}\text{Cos}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) + m\omega\text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \right] \right. \\ & / \left[ 6Ahm\sqrt{GM}\text{Cos}^2\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \right. \\ & + A\sqrt{G\rho}\text{Cos}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \left[ \left( -6hm\sqrt{\frac{M}{\rho}} + A^2\sqrt{M\rho} \right) \text{Cos}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \right. \\ & \left. \left. - (A + e^2 + 3h^2)m\omega\text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \right] \right. \\ & + m\text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \left[ -A^2\omega\sqrt{M\rho}\text{Cos}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) + 6Ah\sqrt{GM}\text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\right) \right. \\ & \left. \left. + [-12AGh + (A + e^2)m\omega^2]\text{Sin}\left(e\omega\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right) \right] \right] \end{aligned}$$

Como valor inicial de  $G$  para el proceso iterativo de resolución de esta ecuación puede tomarse, dando al coeficiente de Poisson un valor aproximado de 0,3 por ejemplo:

$$G = \frac{M(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} \quad (16)$$

Resto de parámetros elásticos:

Una vez calculados M y G, ya se pueden calcular el resto de parámetros elásticos:

$$v = \frac{M - 2G}{2(M - G)} \quad (17)$$

$$\lambda = M - 2G$$

$$K = M - \frac{4}{3}G$$

$$E = \frac{G(4G - 3M)}{G - M}$$

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha descrito un método para determinar los parámetros elásticos de un material elástico lineal partiendo de medidas de aceleración como las realizadas en el ensayo experimental para medir la rigidez dinámica de un material. El punto de partida son las ecuaciones obtenidas para los desplazamientos lineales y angulares del centro de masas de la losa obtenidos a partir de las ecuaciones de equilibrio dinámico de la referencia [2]. Excitando armónicamente la losa en un rango de frecuencias pueden hallarse los parámetros elásticos en dicho rango de frecuencias, por lo que el material a caracterizar puede presentar comportamiento viscoelástico lineal. El material de la losa ha de ser mucho más rígido que el de la lámina del material a caracterizar, no ha de haber deslizamiento ni entre losa y lámina ni entre lámina y suelo. El espesor de la lámina ha de ser mucho menor que su anchura.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha podido realizar gracias a la ayuda concedida por la Generalitat Valenciana para la realización de proyectos de I+D para grupos de investigación emergentes (expediente GV/2013/019).

## REFERENCIAS

- [1] UNE-EN ISO 29052-1 Acústica de la edificación. Determinación de la Rigidez Dinámica. Parte 1 Materiales usados bajos suelos flotantes en viviendas. (1989).
- [2] Segovia et Al.. *Estudio analítico lineal del movimiento de losa cuadrada rígida sobre lámina flexible de pequeño espesor pegada al suelo. Techniacústica 2014; Murcia 2014.*