



FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIAACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

## VALIDAÇÃO DE UM MÉTODO NUMÉRICO FEM PERIÓDICO PARA ANÁLISE DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR ACÇÃO HUMANA

PACS no. 43.40

Alexandre Pinto<sup>1</sup>; Pedro Alves Costa<sup>1</sup>; Luís Godinho<sup>2</sup>; Paulo Amado-Mendes<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Construct-FEUP, University of Porto, Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal

{[aires@fe.up.pt](mailto:aires@fe.up.pt); [pacosta@fe.up.pt](mailto:pacosta@fe.up.pt); [amgcpinto@fe.up.pt](mailto:amgcpinto@fe.up.pt)}

<sup>2</sup>ISISE, Dep. Civil Engineering, University of Coimbra, Pólo II, Rua Luís Reis Santos, 3030-788 Coimbra, Portugal

{[lgodinho@dec.uc.pt](mailto:lgodinho@dec.uc.pt); [pamendes@dec.uc.pt](mailto:pamendes@dec.uc.pt);}

**PALAVRAS CHAVE:** Engenharia Ferroviária; 3D FEM-PML periódico; 2.5D FEM-PML; Eficiência computacional.

### ABSTRACT

In nowadays ground borne vibrations presents as a problem to the inhabitants in the vicinities of the railway network. In an attempt to analyse such problems, multiple numerical methods have been presented allowing, with great precision, the determination of the deformation field induced by a train passage. To reach computational efficiency many of the methods adopt a concept known as 2.5D modelling, imposing cross section invariance in the longitudinal direction. Such assumption may represent an obstacle to the analyses of many real cases. Thus, in the present paper is presented and validated one numerical method with a three-dimensional FEM-PML formulation with special boundaries conditions, which can simulate the periodicity of the model.

### RESUMO

Vibrações induzidas por tráfego ferroviário representam, atualmente, um problema ambiental que se reflecte nas populações circundantes sob a forma de vibrações e ruído re-radiado, e para o qual urge dar resposta. Numa tentativa de constituir modelos de previsão, diversos métodos numéricos têm sido apresentados, permitindo, com elevado rigor, a determinação do campo de vibrações induzidas pela passagem de um comboio. Por questões de eficiência computacional a generalidade dos métodos numéricos existentes adota um conceito denominado por 2.5D, onde se impõe a invariância da secção transversal na direcção de desenvolvimento da estrutura. Esta invariância da secção pode, muitas das vezes, apresentar-se como um obstáculo à análise de casos particulares. Assim no presente artigo apresenta-se a validação de um método numérico assente na formulação FEM-PML 3D, com condições de periodicidade nas fronteiras correspondentes ao desenvolvimento da via, tornando possível a inclusão de variabilidade longitudinal periódica.

## 1. INTRODUÇÃO

O transporte ferroviário apresenta-se como um dos mais eficientes sistemas de transportes de massas da atualidade, sendo largamente utilizado para viagens de muito curta a média distância. A sua eficiência energética bem como o conforto que lhe é intrínseco estão na gênese do seu caráter competitivo quando comparados com o tráfego rodoviário e aéreo [1]. Com o incremento da rede de tráfego ferroviário e metropolitano, novos desafios surgem em consequência do desconforto causado nos habitantes de edifícios implantados nas vizinhanças destas redes. A fim de solucionar estes desconfortos diversas análises são requeridas com o intuito de se encontrar qual das soluções perspetivadas origina um melhor comportamento. Para isto, modelos numéricos robustos e capazes de prever, com exatidão o campo de deformação induzido pela passagem de um comboio, são indispensáveis.

Existe hoje em dia uma vasta panóplia de métodos numéricos que tornam possíveis as análises elastodinâmicas necessárias na temática das vibrações induzidas por atividades humanas. A multiplicidade de métodos numéricos é explicada pela particularidade intrínseca de cada um, i.e. a adequabilidade de lidar com o problema em questão de forma eficiente e precisa. Um método numérico implementado sobre uma formulação de elementos finitos está capacitado de modelar geometrias de cariz complexo comparativamente com uma formulação assente em elementos fronteira. Por outro lado, esta mesma formulação acarreta um novo problema em análises elastodinâmicas, o qual não se verifica numa formulação em elementos fronteira, tais como tratamento das fronteiras artificiais ou a necessidade de discretizações com número incomportável de graus de liberdade. Esta dicotomia explica a necessidade de adequar o método numérico ao caso de estudo em questão.

Como já foi referido, o aumento da demanda por soluções que corrijam os problemas causados pela passagem cíclica dos comboios cria a necessidade de se implementarem ferramentas numéricas capazes de analisarem o problema em questão. Adicionando ao facto anterior a crescente investigação no campo das estruturas periódicas como soluções de mitigação [2], também conhecidas como meta-materiais, surge a necessidade de modelos numéricos que permitam a simulação das características geométricas destas soluções. Assistimos assim, à limitação do conceito de modelação 2.5D, largamente utilizado na temática em questão, em virtude da necessidade de modelos com características verdadeiramente tridimensionais.

Deste modo, o presente artigo tem como objetivo a apresentação de um modelo tridimensional assente numa formulação por elementos finitos compatibilizando-se condições fronteira especiais, dotando modelo numérico de periodicidade, e, por essa forma reduzindo de forma acentuada o esforço computacional requerido.

## 2. DESCRIÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

O modelo numérico aqui descrito foi criado para levar a cabo análises de cariz elastodinâmico, como por exemplo a determinação do campo de deformação induzido pela passagem de um comboio. Seguindo uma formulação clássica do método dos elementos finitos [3, 4] no domínio da frequência, o equilíbrio do sistema é ditado pela equação (1), onde  $K$  faz referência à matriz de rigidez do sistema,  $M$  à matriz de massa,  $u$  ao vetor de deslocamentos,  $F$  ao vetor de forças,  $k_1$  ao número de onda e  $\omega$  à frequência de oscilação da carga, todos estes no domínio transformado. A técnica dos "Perfectly Matched Layers", PML, foi adotada para tratar os limites artificiais do domínio modelado a fim de se evitar a reflexão de energia nestes [5, 6].

$$[K(k_1, \omega) - \omega^2 M(k_1, \omega)] \cdot u(k_1, \omega) = F(k_1, \omega) \quad (1)$$

FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

A equação previamente enunciada é então resolvida para diversas configurações de ondas planas, sendo uma carga pontual simulada através da sobreposição de um conjunto de cargas distribuídas definidas com recurso ao número de onda  $k_1$ , conforme traduzido pela equação (2).

$$F(k_1, \omega) = A * e^{ik_1x} \quad (2)$$

onde  $A$  representa a amplitude do carregamento e  $x$  o desfasamento do nó carregado relativamente a um referencial estabelecido.

A resposta no domínio de origem, domínio do espaço, é conseguida através da sobreposição dos resultados obtidos para cada um dos números de onda considerados. A combinação destes é alcançada com recurso a uma transformada inversa de Fourier, obtendo-se então o campo de deslocamentos no domínio do espaço.

Um aspeto particular do método aqui discutido, em comparação com métodos numéricos puramente tridimensionais, reside nas condições fronteiras particulares adotadas. A fim de elucidar o leitor para o funcionamento do método aqui exposto, 3D FEM-PML periódico, apresenta-se, na Figura 1, um esquema que ilustra o impacto da adoção de tais condições fronteira. A grande vantagem deste está bem presente na Figura 1 a), onde se pode observar a divisão do modelo global em várias secções parcelares. Assim, apenas uma parcela da secção global é resolvida com recurso ao modelo numérico, sendo as restantes obtidas, sem esforço computacional, por intermédio de uma operação analítica expressa na equação (3). A redução da secção discretizada implica obrigatoriamente a redução das matrizes envolvidas e consequentemente o aumento da eficiência computacional do modelo. Deste modo, uma análise tridimensional de uma secção pode ser vista como a sobreposição de várias células, criando uma só célula solicitação computacional.

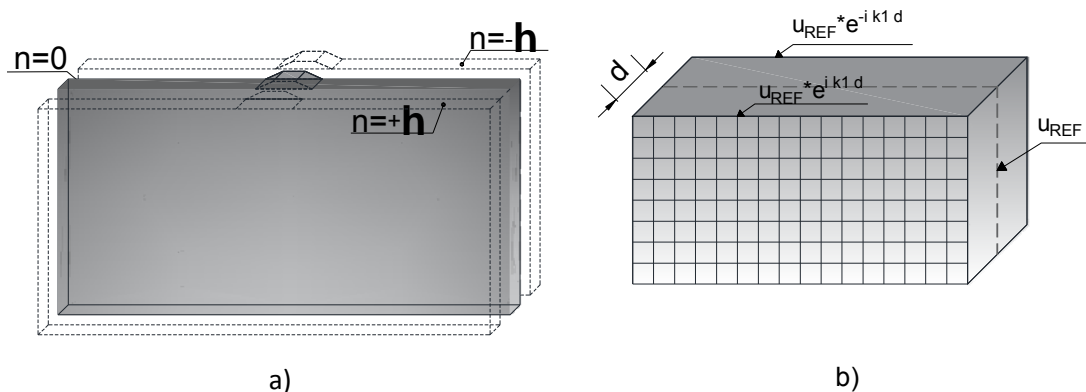


Figura 1 – Esquema ilustrativo do funcionamento do modelo numérico 3D FEM-PML periódico: a) divisão do modelo global segundo a sua periodicidade; b) condições de fronteira periódicas impostas na célula.

$$u_n = u_{ref} * e^{ik_1 2d * n} \quad (3)$$

onde  $2d$  representa a espessura da parcela considerada,  $n$  o número da parcela a determinar e  $u_n$  o campo de deslocamentos na parcela  $n$ .

Assim, a resolução de uma secção global passa pelos seguintes passos:

1. Primeiramente é determinado o campo de deslocamentos, de forma numérica, de uma secção parcelar, correspondendo a sua espessura à periodicidade do modelo global, submetido a uma onda plana;
2. De seguida determinam-se as restantes parcelas, analiticamente com recurso à equação (3), necessárias à análise em questão, i.e. considerando tantos valores de  $n$  quantas parcelas a determinar.

FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

A redução do modelo a considerar é conseguida pela adoção de condições fronteiras especiais, capazes de atender à periodicidade da secção global. Como se pode verificar pela Figura 1 b) os limites, na direção longitudinal, da parcela modelada passam a obedecer a uma condição fronteira descrita nas seguintes equações.

$$u_{\text{fronteira anterior}} = u_{\text{ref}} * e^{-ik_1 d} \quad (4)$$

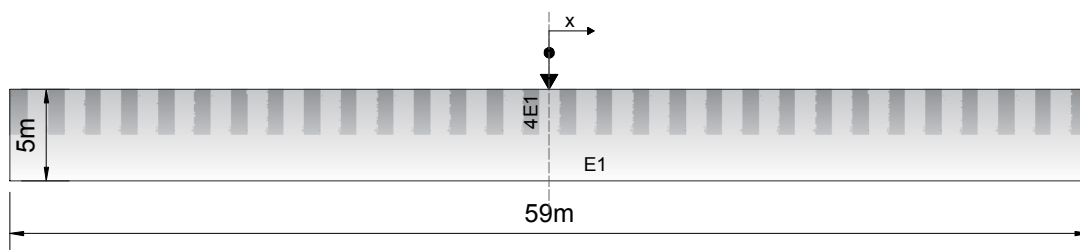
$$u_{\text{fronteira posterior}} = u_{\text{ref}} * e^{ik_1 d} \quad (5)$$

sendo  $d$  metade da espessura da parcela em causa.

### 3. EXEMPLO DA VALIDAÇÃO 2D

A estratégia de validação do modelo numérico previamente explanado contemplou diversas fases, inicialmente abordou-se um exemplo bidimensional seguindo-se uma validação tridimensional generalista. Ambas as fases comparam resultados provenientes de dois modelos numéricos, um modelo 2.5D FEM-PML previamente validado [5], sendo o outro resultado proveniente do modelo numérico aqui apresentado. Para isto, idealizou-se um caso de estudo com características bidimensionais, onde se definiu uma geometria a analisar bem como as propriedades intrínsecas dos materiais constituintes. A Figura 2 apresenta uma ilustração do referido caso (Figura 2 a) de estudo bem como das estratégias de modelação do problema para ambos os modelos numéricos (Figura 2 b; Figura 2 c). Como se pode observar, a secção transversal necessária ao modelo 2D FEM-PML periódico apresenta-se como uma pequena fração da considerada no modelo 2D FEM-PML. A prescrição das condições fronteira previamente enunciadas permitem que a resolução da geometria global seja vista como a combinação de diversas parcelas idênticas entre si, sendo resolvida numericamente uma só. As restantes são obtidas por intermédio de uma operação analítica, onde a parcela numericamente determinada é multiplicada por um coeficiente que atende ao afastamento entre secções. Assim, um problema que obrigue à consideração de uma secção discretizada com recurso a 19101 nós (Figura 2 b) pode ser reduzida a uma secção com somente 2565 (Figura 2 c).

O caso de estudo contempla dois materiais distintos, como se verificar pela Figura 2, diferindo unicamente no módulo de deformabilidade assumido, sendo um quatro vezes mais rígido que o outro. Para o solo mais flexível foram assumidos 1500 Kg/m<sup>3</sup> como massa volúmica, 0.3 de coeficiente de Poisson, 0.03 como coeficiente de amortecimento e 50 MPa como módulo de deformabilidade.



a)

FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

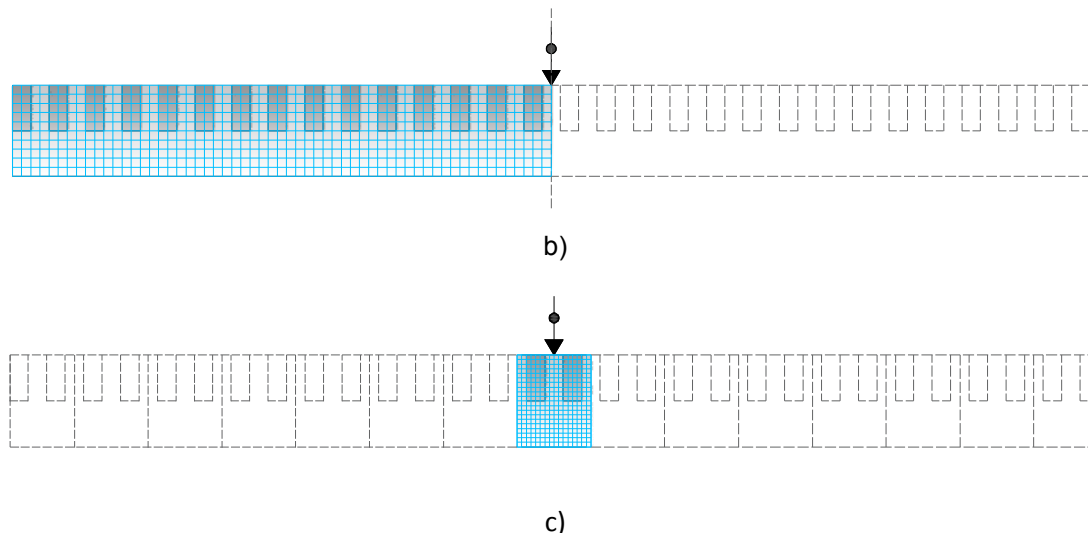


Figura 2 – Caso de estudo: a) geometria da secção; b) malha de elementos finitos utilizada no modelo 2.5D FEM-PML; c) malha de elementos finitos utilizada no modelo 2D FEM-PML periódico.

Ambas as secções transversais foram submetidas às mesmas condições de carregamento, uma força harmónica distribuída na direcção longitudinal com uma frequência de oscilação de 30Hz. A validação do modelo aqui proposto passou pela comparação direta dos deslocamentos à superfície determinados pelos dois modelos numéricos, estando estes apresentados na Figura 3. A linha sólida azul faz referência ao resultado obtido com recurso ao modelo 2.5D FEM-PML, estando o resultado obtido pelo modelo 2D FEM-PML periódico representado pelos círculos vermelhos. Como se pode observar, a deformada da superfície determinada por este último subdivide-se em duas zonas, a cor vermelha indica a secção calculada numericamente e a verde as subsequentes secções determinadas analiticamente (ver equação (3)).

Várias conclusões podem retirar-se com a comparação entre os resultados obtidos, sendo evidente a boa aproximação entre os modelos numéricos. Tal aproximação valida o modelo 2D FEM-PML periódico já que este consegue, com considerável precisão, determinar o campo de deformação induzido. A eficiência computacional do modelo é facilmente observada visto que a secção considerada consiste numa ínfima parcela da secção global, exigindo, por sua vez, um esforço computacional menor para a sua determinação.

FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

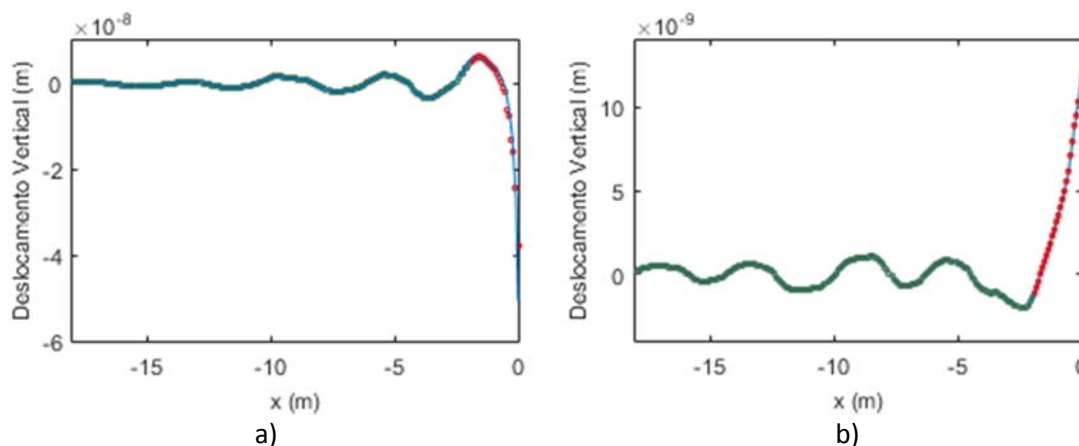
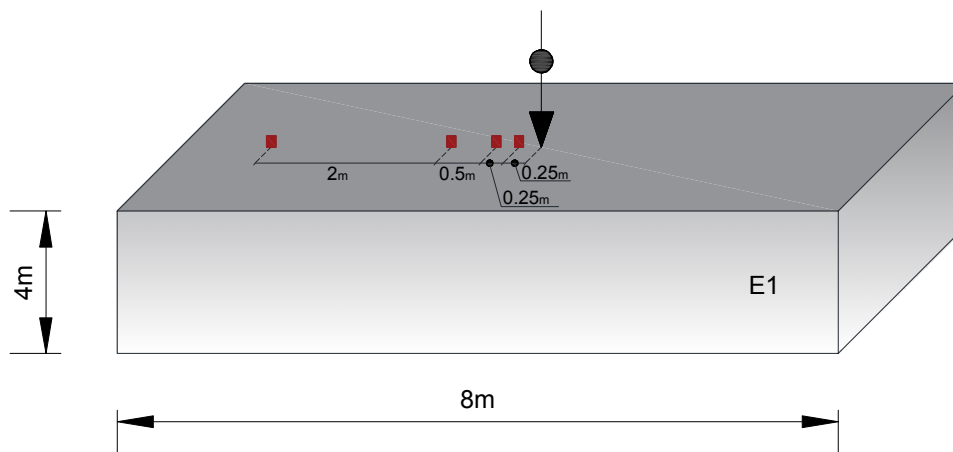


Figura 3 – Deslocamento vertical à superfície: a) Parte real; b) Parte Imaginária. (linha azul - 2D FEM-PML; círculos vermelhos – resultado numérico do 2D FEM-PML Periódico; círculos verdes – resultado analítico do 2D FEM-PML por aplicação da equação (2))

#### 4. EXEMPLO DA VALIDAÇÃO 3D

Com a validação do modelo periódico para condições bidimensionais urge a necessidade de verificar a sua adequabilidade na análise de casos mais complexos, nomeadamente tridimensionais. O carácter tridimensional do modelo aqui apresentado torna possível a consideração de variabilidade periódica no sentido longitudinal da secção transversal, bem como a modelação dos constituintes de uma via férrea, impossível para os modelos assentes no conceito de 2.5D [7].

À semelhança do exemplo de validação anterior, um caso de estudo foi idealizado onde se adotou uma secção com geometria regular caracterizada por um só material, como se pode testemunhar pela Figura 4 a). Novamente, a validação passou pela comparação direta dos obtido por dois modelos numéricos, um já previamente validado, 2.5D FEM-PML [5], e o modelo que se procura validar 3D FEM-PML periódico. A fim de clarificar como ambos os métodos atacam a secção expressa na Figura 4 a), ilustram-se nas Figura 4 b) e Figura 4 c) as estratégias de modelação intrínsecas a cada um dos modelos utilizados.



a)



FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

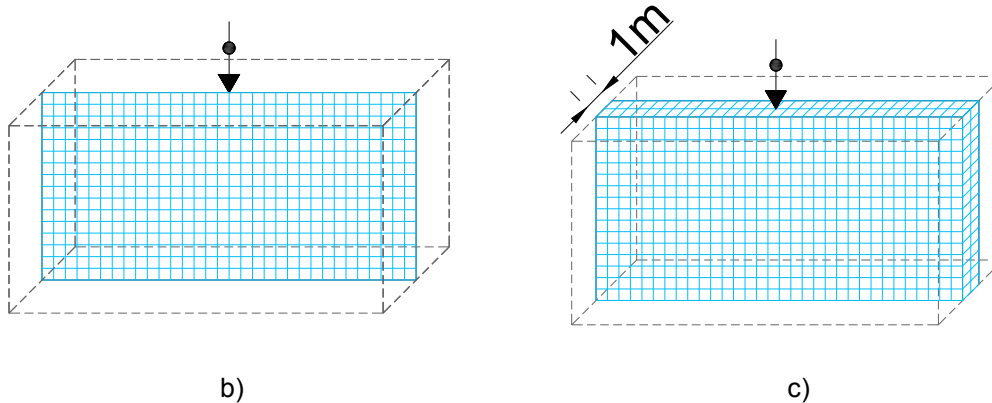
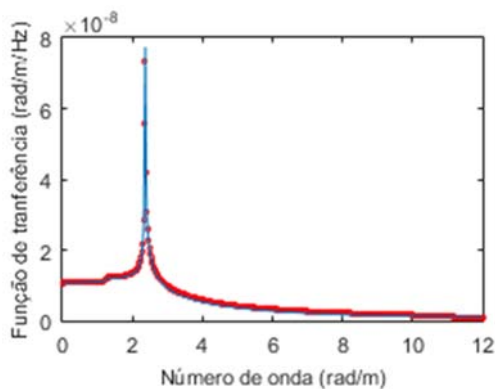


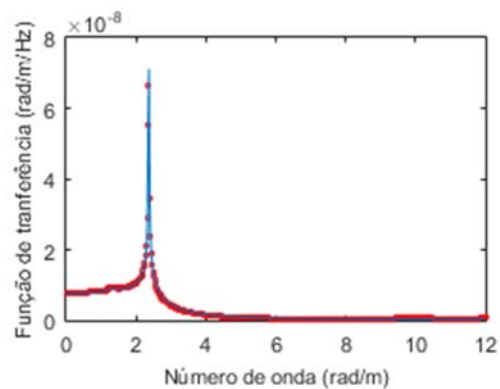
Figura 4 – Caso de estudo: a) geometria da secção com os pontos de medição da resposta; b) malha de elementos finitos utilizada no modelo 2.5D FEM-PML; c) malha de elementos finitos utilizada no modelo 3D FEM-PML periódico.

Comparando as Figura 4 b) e Figura 4 c) é possível verificar a particularidade dos modelos numéricos com conceitos 2.5D, onde a determinação de uma secção tridimensional é alcançada recorrendo unicamente a uma discretização bidimensional. Todavia, uma análise pormenorizada da Figura 4 c) revela que embora o modelo numérico assente numa formulação 3D só uma parcela da secção a analisar precisa de ser considerada. Assim, as condições fronteiras periódicas podem ser vistas como a aproximação de um modelo perfeitamente tridimensional ao conceito 2.5D.

Ambas as secções foram submetidas a uma carga pontual de cariz vibratório, oscilando com uma frequência de 50Hz. A estratégia de representação dos resultados obtidos difere da implementada na validação anterior, sendo apresentadas as funções de transferência para quatro pontos localizados no mesmo alinhamento transversal.



a)



b)

FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

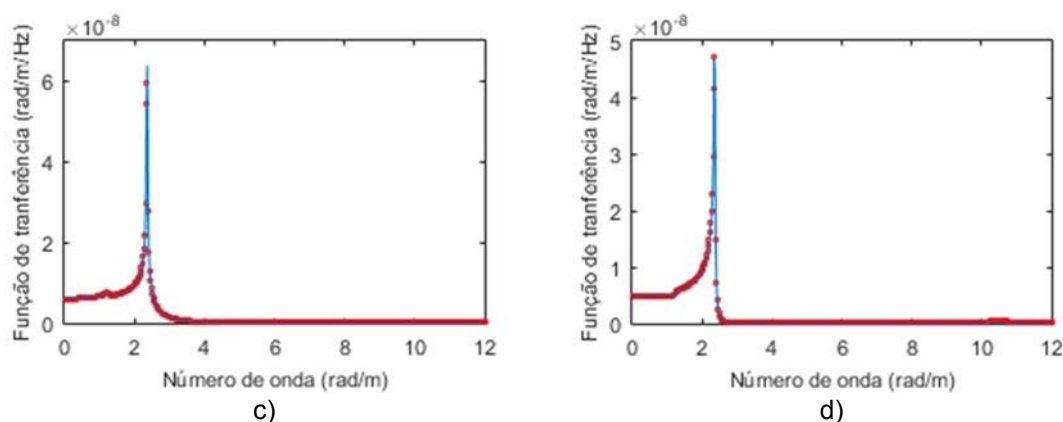


Figura 5 – Funções de transferência para domínio transformado para : a) Ponto a 0.25m do Carregamento; b) Ponto a 0.5m do Ponto de Carregamento; c) Ponto a 1m do Ponto de Carregamento; d) Ponto a 3m do Ponto de Carregamento (linha sólida azul – 2.5D FEM-PML; esferas vermelhas – 3D FEM-PML Periódico)

Os resultados ilustrados apresentam uma boa correspondência entre modelos numéricos, sendo, o modelo periódico, capaz de determinar com elevada precisão o campo de deslocamentos sob ação de uma carga pontual vibratória.

## 5. CONCLUSÕES

A consideração da variabilidade na direção longitudinal apresenta-se como uma grande vantagem do modelo aqui apresentado em comparação com os modelos 2.5D, estando estes restritos a uma secção transversal invariante no sentido longitudinal [8]. Esta vantagem acarreta um inconveniente em termos de exigência computacional requerida para levar a cabo uma análise, já que a dimensão das matrizes é consideravelmente incrementada com a consideração da terceira dimensão. Contudo, o impacto negativo que advém do uso de modelos 3D é ultrapassado com a adoção de condições fronteiras capazes de considerarem a periodicidade do modelo analisado. Assim, a resolução do modelo global consiste num processo híbrido, sendo determinada uma pequena parcela do modelo numericamente e a restante de forma analítica. A transformação de exigência numérica em operações analíticas é uma das maiores vantagens do modelo numérico aqui apresentado, já que parte da secção previamente calculada com recurso a um modelo numérico 3D é agora obtida por intermédio de uma operação de multiplicação. Esta transformação origina uma redução na força computacional solicitada para a análise em questão pelo facto de reduzir as matrizes envolvidas no processo de cálculo. Tal redução não é só particularmente interessante quando os domínios de análise forem a geometrias alargadas, mas também quando os perfis geotécnicos se caracterizam por solos mais flexíveis obrigando a adoção de malhas mais refinadas e consequentemente matrizes substancialmente maiores.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado por:

- Projeto POCI-01-0145-FEDER-007457 - CONSTRUCT - Instituto de I&D em Estruturas e Construções - financiado pelo Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional (FEDER), através do COMPETE2020 – Programa Operacional Competitividade e



## FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

Internacionalização (POCI) e por fundos nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia I.P.; Projecto PTDC/ECMCOM/1364/2014.

- Fundos FEDER através do Programa Operacional Fatores de Competitividade - COMPETE e por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projeto POCI-01-0145-FEDER-007633 (ISISE) e através do Programa Operacional Regional CENTRO2020 no âmbito do projeto CENTRO-01-0145-FEDER-000006 (SUSpENSÉ).”
- Comissão Europeia através do Projeto H2020 MARIE SKŁODOWSKA-CURIE RISE, Grant No. 691135 “RISEN: Rail Infrastructure Systems Engineering Network”.

## REFERÊNCIAS

1. Barron de Angoití, I., *High speed rail: development around the world*, in *Noise and vibration on high-speed railways*, R. Calçada, et al., Editors. 2008: Porto. p. 1-14.
2. Hussein, M., M. Leamy, and M. Ruzzene, *Dynamics of Phononic Materials and Structures: Historical Origins, Recent Progress, and Future Outlook*. Applied Mechanics Reviews, 2014. **66**(4): p. 040802.
3. Zienkiewicz, O.C. and R.L. Taylor, *The Finite Element Method*. Vol. 1. 2000, Oxford: Butterworth-Heinemann.
4. Onate, E., *Structural Analysis with Finite Element Method. Linear Statics*. 2009: Springer.
5. Lopes, P., et al., *Vibrations inside buildings due to subway railway traffic. Experimental validation of a comprehensive prediction model*. Science of The Total Environment, 2016. **568**: p. 1333-1343.
6. Lopes, P., et al., *Numerical Modeling of Vibrations Induced in Tunnels: A 2.5D FEM-PML Approach*, in *Traffic Induced Environmental Vibrations and Controls: Theory and Application*, H. Xia and R. Calçada, Editors. 2013, Nova. p. 133-166.
7. Alves Costa, P., R. Calçada, and A. Silva Cardoso, *Track-ground vibrations induced by railway traffic: In-situ measurements and validation of a 2.5D FEM-BEM model*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2012. **32**(1): p. 111-128.
8. Yang, Y.B. and H.H. Hung, *A 2.5D finite/infinite element approach for modelling viscoelastic body subjected to moving loads*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001. **51**: p. 1317-1336.