

## MODELAÇÃO NUMÉRICA 3D DO COMPORTAMENTO DE CORNETAS ACÚSTICAS

PACS: 43.58.Ta, 43.38.Ja, 43.20.Rz

Paulo Amado-Mendes<sup>1</sup>; Luís Godinho<sup>1</sup>; Jesus Carbajo<sup>2</sup>; Jaime Ramis Soriano<sup>2</sup>

<sup>1</sup> CICC, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra  
Rua Luís Reis Santos - Pólo II da Universidade, 3030-788 Coimbra, Portugal  
Tel. +351-239 797 192  
[pamendes@dec.uc.pt](mailto:pamendes@dec.uc.pt); [lgodinho@dec.uc.pt](mailto:lgodinho@dec.uc.pt)

<sup>2</sup> DFISTS, Universidad de Alicante  
Mail Box 99, 03080 Alicante, España  
[jesus.carbajo@ua.es](mailto:jesus.carbajo@ua.es); [jramis@ua.es](mailto:jramis@ua.es)

### ABSTRACT

The possibility of numerically simulate the behaviour of devices such as acoustic horns is very interesting, namely enabling the incorporation of the design optimization and, in an ulterior step, the study of the generated sound environment. The finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM) have frequently been adopted in the acoustic numerical modelling. More recently, the method of fundamental solutions (MFS) has also been suggested, mainly when modelling the three-dimensional (3D) behaviour of such devices, since it requires low computational times while presenting high accuracy.

In this work, a 3D model based on the MFS has been implemented and the authors have applied it to the analysis of the behaviour of an acoustic horn.

### RESUMO

A possibilidade de prever numericamente o comportamento de dispositivos como cornetas acústicas revela um interesse significativo, nomeadamente, integrando o processo de otimização da geometria do dispositivo e, numa fase posterior, permitindo o estudo do ambiente sonoro por ele produzido. O FEM e o BEM têm sido frequentemente adotados na modelação numérica, contudo, em face de inegáveis vantagens (precisão e tempo de cálculo), o método das soluções fundamentais (MFS) foi igualmente proposto, principalmente na modelação tridimensional (3D) do comportamento daqueles dispositivos.

No presente trabalho, um modelo 3D baseado no MFS foi implementado, sendo aplicado na análise do comportamento de uma corneta acústica.

### 1. INTRODUÇÃO

O estudo teórico de cornetas acústicas remonta a trabalhos pioneiros de investigadores como Euler, Lord Rayleigh e Webster. Com efeito, no final da primeira década do século passado, Webster foi o primeiro a introduzir conceitos como impedância acústica específica e impedância acústica análoga, ambos amplamente utilizados em análises acústicas [1]. Depois daqueles estudos iniciais, registaram-se muitos desenvolvimentos significativos, com algumas das abordagens mais recentes a sugerir a necessidade de desenvolver técnicas numéricas de modelação eficazes para o projeto e análise de cornetas acústicas de desempenho elevado, do ponto de vista da eficiência e da diretividade. De entre estas metodologias numéricas, as que

têm sido mais frequentemente adotadas são, provavelmente, os métodos dos elementos finitos (FEM), das diferenças finitas (FDM) e dos elementos fronteira (BEM).

Morita et al. [2] e Beltran [3], entre outros, recorreram a análises de elementos finitos para modelar cornetas acústicas axissimétricas. Por outro lado, Hodgson e Underwood [4], utilizaram o BEM para calcular a impedância na garganta da corneta e a pressão a alguma distância, tendo observado uma boa concordância com os dados experimentais. O BEM e o FEM foram usados em conjunto com um algoritmo de otimização para melhorar as propriedades de transmissão de uma corneta acústica com boca variável [5, 6]. Nestes trabalhos, salientam-se as vantagens da utilização do BEM, uma vez que não obriga a refazer ou modificar as malhas de cálculo ao longo do processo de otimização. Também Morgans [7] descreveu um método de otimização, baseado no BEM e no FEM, para definir a configuração de altifalantes com corneta acústica que apresentem largura de banda constante.

Godinho et al. [8] apresentaram uma abordagem alternativa aos modelos numéricos mais utilizados, para a análise de cornetas acústicas axissimétricas, instaladas num ecrã rígido infinito. A metodologia proposta baseia-se na aplicação dos métodos das soluções fundamentais (MFS), aplicando uma técnica de divisão em subdomínios para modelar o comportamento acústico do dispositivo acoplado ao ecrã infinito. Nomeadamente no que se refere à sua eficiência computacional e precisão observadas, esta metodologia revelou-se como muito interessante quando comparada com outras abordagens numéricas mais correntes. No seguimento daquele trabalho, apresenta-se agora uma generalização do modelo, incorporando uma formulação do mesmo método numérico (MFS) para o caso mais genérico de geometrias tridimensionais (3D), aplicável a cornetas acústicas instaladas num ecrã rígido infinito. Complementarmente, e uma vez que é sabido que a qualidade dos resultados do MFS depende do posicionamento das fontes virtuais que simulam o campo de pressões [9], sugere-se também uma estratégia para determinar automaticamente a posição ideal das fontes virtuais, melhorando a fiabilidade e a flexibilidade da formulação apresentada.

O presente artigo encontra-se estruturado da seguinte forma: inicialmente, apresenta-se de forma breve a formulação matemática do modelo implementado no domínio da frequência, incluindo as equações de propagação do som, as soluções fundamentais 3D e a formulação do método numérico de resolução (MFS). Segue-se a aplicação do modelo implementado à análise do comportamento de uma corneta acústica 3D com geometria complexa, ilustrando-se a discretização utilizada e o posicionamento ótimo das fontes virtuais, e demonstrando-se a verificação dos resultados do modelo por comparação com resultados de um modelo comercial baseado no FEM. Apresenta-se ainda, para algumas frequências selecionadas, o mapeamento dos níveis de pressão sonora que documenta o comportamento radiante do dispositivo segundo planos ortogonais, bem como um conjunto de instantâneos ilustrando a propagação de energia sonora a partir da corneta acústica analisada.

## 2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A propagação do som num meio acústico homogêneo pode ser representada matematicamente, no domínio da frequência, pela equação diferencial de Helmholtz,

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (1)$$

em que  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , no caso de um problema 3D,  $p$  representa a pressão sonora,

$k = \omega/c$  o número de onda,  $\omega = 2\pi f$  a frequência angular,  $f$  a frequência e  $c$  a velocidade de propagação do som no meio acústico.

### 2.1. SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS 3D

Para o caso 3D, considerando uma fonte pontual, localizada no ponto  $\mathbf{x}_0$  de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ , no meio de propagação, é possível estabelecer as soluções fundamentais  $G$ , para

a pressão sonora, e  $H$ , para a velocidade das partículas, num dado ponto  $\mathbf{x}$  de coordenadas  $(x, y, z)$ , que se podem escrever, respetivamente:

$$G^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) = \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (2)$$

$$H^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k, \vec{n}) = \frac{1}{-i\rho\omega} \frac{(-ikr-1)e^{-ikr}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \vec{n}}. \quad (3)$$

Quando a geometria do problema apresenta simetria em relação a dois planos ortogonais, o método das fontes-imagem pode ser igualmente aplicado àquelas soluções 3D, de modo a reduzir o esforço computacional requerido para o problema 3D puro. Assim, considerando um plano vertical rígido, localizado em  $z = 0$ , e um plano horizontal também rígido, localizado em  $y = 0$ , a solução fundamental da equação (2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$G_{2sym}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) = \frac{e^{-ikr}}{r} + \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} + \frac{e^{-ikr_3}}{r_3} \quad (4)$$

onde

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad (5a)$$

$$r_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad (5b)$$

$$r_2 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2} \quad (5c)$$

$$r_3 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z+z_0)^2}. \quad (5d)$$

No caso de existir, adicionalmente, um outro plano de simetria vertical, localizado em  $x = x_{sym}$ , esta solução fundamental fica,

$$G_{3sym}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) = \frac{e^{-ikr}}{r} + \sum_{j=1}^7 \frac{e^{-ikr_j}}{r_j} \quad (6)$$

em que, considerando  $x_{sym} \geq 0$ , as distâncias  $r_j$ , para  $j = 4 \dots 7$ , são dadas por:

$$r_4 = \sqrt{(x-2x_{sym}+x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad (7a)$$

$$r_5 = \sqrt{(x-2x_{sym}+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad (7b)$$

$$r_6 = \sqrt{(x-2x_{sym}+x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2} \quad (7c)$$

$$r_7 = \sqrt{(x-2x_{sym}+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z+z_0)^2}. \quad (7d)$$

## 2.2. MFS 3D PARA UM MEIO ACÚSTICO COM UM ECRÃ RÍGIDO

Considere-se a configuração esquematicamente representada na Figura 1, para modelar com o MFS o comportamento de uma corneta acústica instalada num ecrã rígido, encontrando-se a boca da corneta alinhada com o ecrã de extensão infinita. Naquela figura, considere-se uma superfície rígida, simulando a presença de um ecrã rígido infinito em  $x_{sym} = L$ , a extremidade da corneta. Para analisar este sistema com o MFS, recorre-se a um modelo com dois subdomínios, em que o subdomínio  $\Omega_1$  incorpora a geometria complexa da corneta acústica, e o subdomínio  $\Omega_2$  corresponde ao meio de propagação semi-infinito e ao ecrã rígido (ver Figura 1). Considere-se uma interface de continuidade entre aqueles subdomínios, ao longo da qual se impõe a continuidade de pressões e de velocidades das partículas, e ainda existência de superfícies ao longo das quais se prescreve a velocidade segundo a direção normal. Na modelação deste problema, são impostas velocidades nulas ao longo da superfície rígida da corneta acústica, prescrevendo-se uma velocidade unitária na superfície vibrante da garganta da corneta.

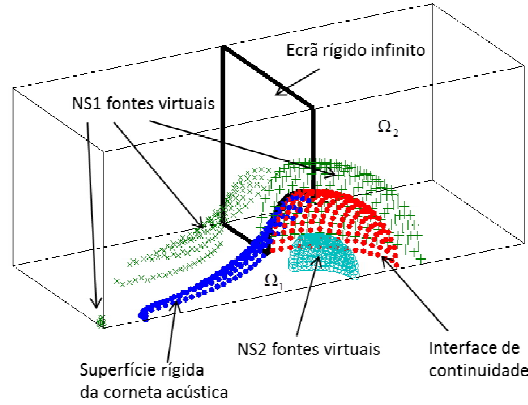


Figura 1 – Representação esquemática da configuração do problema analisado.

Deste modo, considerando a simetria do sistema 3D descrito, em relação a dois planos ortogonais, as correspondentes soluções fundamentais a utilizar representam-se através das equações (4) e (6), podendo-se definir o campo de pressões através das expressões:

$$p(\mathbf{x}, k)_{\Omega_1} = \sum_{j=1}^{NS1} Q_j G_{2sym}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{1,j}, k) \quad \text{para } \mathbf{x} \text{ em } \Omega_1 \quad (8)$$

$$p(\mathbf{x}, k)_{\Omega_2} = \sum_{j=1}^{NS2} P_j G_{3sym}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{2,j}, k) \quad \text{para } \mathbf{x} \text{ em } \Omega_2. \quad (9)$$

A imposição das condições de fronteira adequadas ao problema – velocidades nulas ao longo da superfície da corneta acústica, velocidade unitária na garganta do dispositivo e continuidade de pressões e velocidades ao longo da interface entre subdomínios – permite o estabelecimento de um sistema de  $NC$  equações lineares com  $NS = NS1 + NS2$  incógnitas, para determinação das amplitudes das soluções fundamentais,  $Q_j$  e  $P_j$ .  $NC$  representa o número de pontos de colocação dispostos ao longo das fronteiras/interfaces, enquanto  $NS1, NS2$  representam os números de fontes virtuais colocadas no exterior dos domínios de propagação,  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , e que reproduzem o campo de pressões (ver Figura 1). Quando  $NS = NC$ , o sistema de equações linear pode ser resolvido utilizando técnicas correntes.

Uma vez que a distância entre as fontes virtuais e as fronteiras do sistema deve ser definida, utilizou-se um procedimento de otimização para o seu cálculo. Assim, define-se o seguinte funcional, em termos de velocidades das partículas:

$$\sum_{i=1}^{NP} \left| \bar{v}(\mathbf{x}_i, k, \vec{n}_i) - v_{K,i} \right| \quad (10)$$

sendo  $NP$  um número total de pontos de controlo distribuídos ao longo de três superfícies, designadamente, a superfície rígida que define a geometria da corneta acústica ( $\Gamma_1$ ), a superfície vibrante da garganta da corneta acústica ( $\Gamma_v$ ) e a superfície da interface entre os subdomínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  ( $\Gamma_c$ ). A distância a adotar entre as fontes virtuais e as fronteiras deverá ser a que minimiza aquele funcional, considerando as soluções numéricas aproximadas,  $\bar{v}(\mathbf{x}_i, k, \vec{n}_i)$ , e os valores  $v_{K,i}$  que deveriam ser obtidos ao longo daquelas superfícies (velocidade nula, em  $\Gamma_1$ , velocidade unitária, em  $\Gamma_v$ , e continuidade de velocidades entre subdomínios, em  $\Gamma_c$ ).

### 3. EXEMPLO DE APLICAÇÃO NUMÉRICA

O modelo descrito foi utilizado na análise do comportamento de uma corneta acústica com geometria 3D. A corneta acústica analisada corresponde ao modelo beyrna TD460/N, cujo

modelo 3D e características geométricas detalhadas se apresentam na Figura 2, construída em espuma rígida de poliuretano de alta densidade. Segundo as especificações de catálogo, as características de diretividade constante deste modelo permitem assegurar uma cobertura de  $60^\circ$  na horizontal e de  $40^\circ$  na vertical, na gama operacional de frequências, apresentando uma frequência de *cutoff* de 800 Hz.

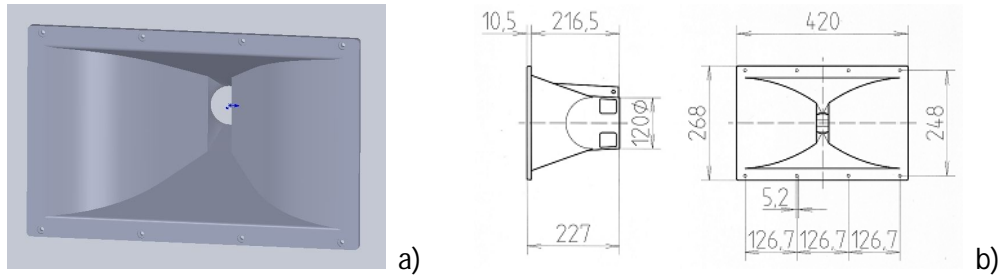


Figura 2 – Corneta acústica analisada: a) modelo 3D; b) configuração geométrica detalhada.

Atendendo à dupla simetria do sistema, em relação a dois planos ortogonais, designadamente o plano horizontal XZ, em  $y=0$ , e o plano vertical XY, em  $z=0$ , é possível tirar partido do MFS 3D apresentado, discretizando apenas um quarto do sistema real, o que se pode observar na Figura 3a. Tal como se referiu, procurou-se otimizar o posicionamento das fontes virtuais, minimizando o erro médio ao longo dos pontos de colocação, para um conjunto de distâncias das fontes virtuais às superfícies da corneta e à interface de continuidade entre subdomínios. A título de exemplo, apresenta-se, na Figura 3b, a distribuição do erro médio para uma gama de distâncias considerada numa discretização com um total de 801 pontos de colocação, para a frequência de 2 kHz, tendo-se optado pelo valor correspondente ao mínimo da curva.

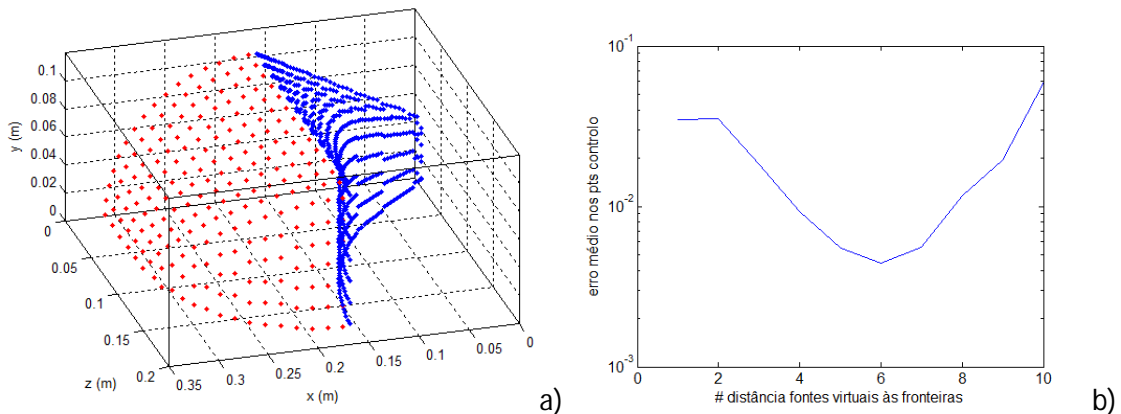


Figura 3 – Modelação da corneta acústica: a) discretização das superfícies rígidas (pts. a azul) e da interface de continuidade (pts. a vermelho); b) otimização do posicionamento das fontes virtuais - erro médio nos pontos de controlo para diferentes distâncias às fronteiras (2 kHz).

Para verificar numericamente o modelo MFS 3D implementado, obtiveram-se também resultados de diretividade da corneta acústica através de um *software* comercial de elementos finitos (FEM), apresentando-se, na Figura 4, uma parte dos resultados recolhidos, nomeadamente no que se refere à diretividade no plano horizontal XZ, para frequências de 500 Hz a 4 kHz. Tal como é possível observar na comparação das Figuras 4a e 4b, os diagramas polares de diretividade determinados pelas duas abordagens numéricas são muito semelhantes, não apresentando diferenças significativas e corroborando a proximidade dos resultados no plano vertical XY (não ilustrados neste artigo). Contudo, deverá referir-se que, de modo a obter resultados precisos, a malha de discretização do FEM apresenta um número significativamente mais elevado de nós e elementos. Por esta razão, o MFS 3D permite reduzir muito consideravelmente o tempo de computação, quando comparado com o FEM.

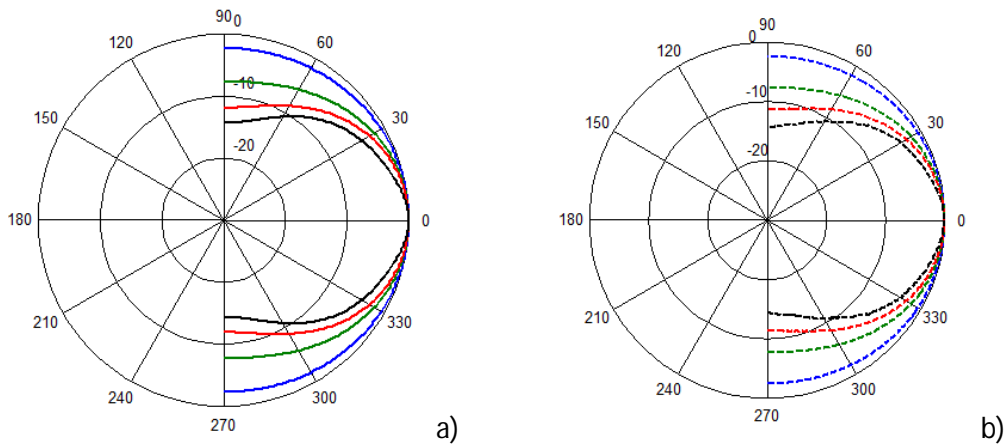


Figura 4 – Diretividade da corneta acústica no plano horizontal XZ, para diferentes frequências (500 Hz a azul, 1 kHz a verde, 2 kHz a vermelho e 4 kHz a preto): a) MFS 3D, e b) FEM.

O comportamento da corneta acústica pode agora ser ilustrado através do cálculo dos níveis de pressão sonora observados no interior da corneta acústica e no espaço semi-infinito no exterior da sua boca e do ecrã onde se encontra instalada. Deste modo, considerando duas frequências de vibração da superfície que constitui a garganta da corneta acústica, é possível representar, na Figura 5, a distribuição dos níveis de pressão sonora ao longo dos planos ortogonais de simetria (planos horizontal XZ e vertical XY) para as frequências de 1 kHz e 4 kHz. A análise deste tipo de resultados, numa gama alargada de frequências, pode ser utilizada na interpretação do desempenho acústico destes dispositivos, permitindo identificar os padrões de decaimento da pressão sonora ao longo do espaço e a eventual presença de zonas de concentração ou de “sombreamento” da energia sonora.

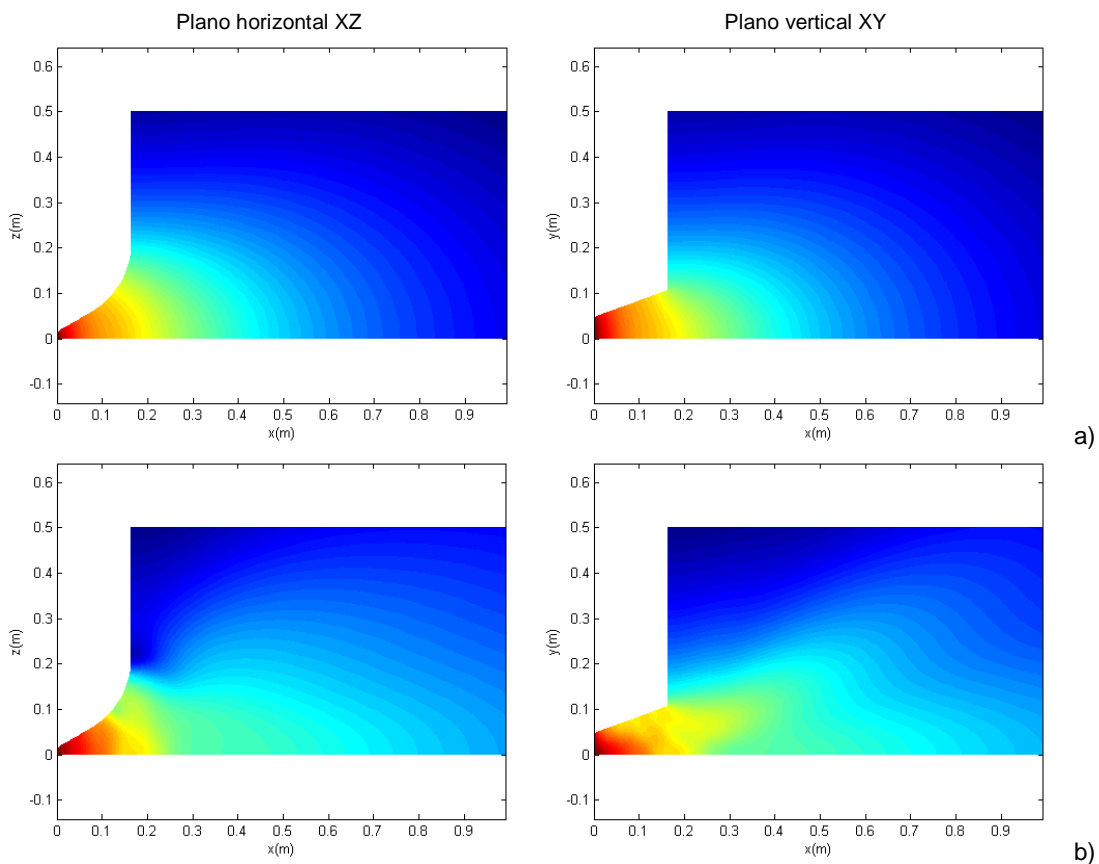


Figura 5 – Mapeamento de níveis de pressão sonora em planos ortogonais, XZ em  $y = 0$  e XY em  $z = 0$ , para duas frequências: a)  $f = 1$  kHz, e b)  $f = 4$  kHz.

Como se referiu, os resultados obtidos diretamente pela formulação proposta encontram-se no domínio da frequência, sendo possível a análise de respostas no domínio do tempo utilizando uma transformada inversa de Fourier. Para este exemplo de aplicação, os cálculos foram efetuados numa gama de frequências de 32 Hz a 8192 Hz, com incremento de 32 Hz. Para evitar fenómenos de *aliasing* as respostas foram calculadas usando frequências complexas, sendo o efeito da introdução deste tipo de frequências removido no domínio do tempo, aplicando uma exponencial adequada [10]. A Figura 6 ilustra o campo de pressões num conjunto de instantes separados de aproximadamente 1.1 ms, tendo-se assumido que a fonte sonora emite um pulso de *Ricker*, com uma frequência característica de 2500 Hz, a partir do instante  $t = 0.0$  ms. Nos planos ortogonais onde se representam as respostas, é possível identificar os instantes iniciais de propagação do pulso no interior da corneta acústica rígida. No segundo instantâneo da Figura 6, já se observa a difração dos pulsos junto da extremidade da corneta, onde a boca liga ao ecrã rígido. Nos instantes seguintes, é visível a propagação da energia sonora ao longo do meio acústico, evidenciando, para a frequência característica seleccionada, padrões de radiação relativamente semelhantes ao longo das direções horizontal e vertical.

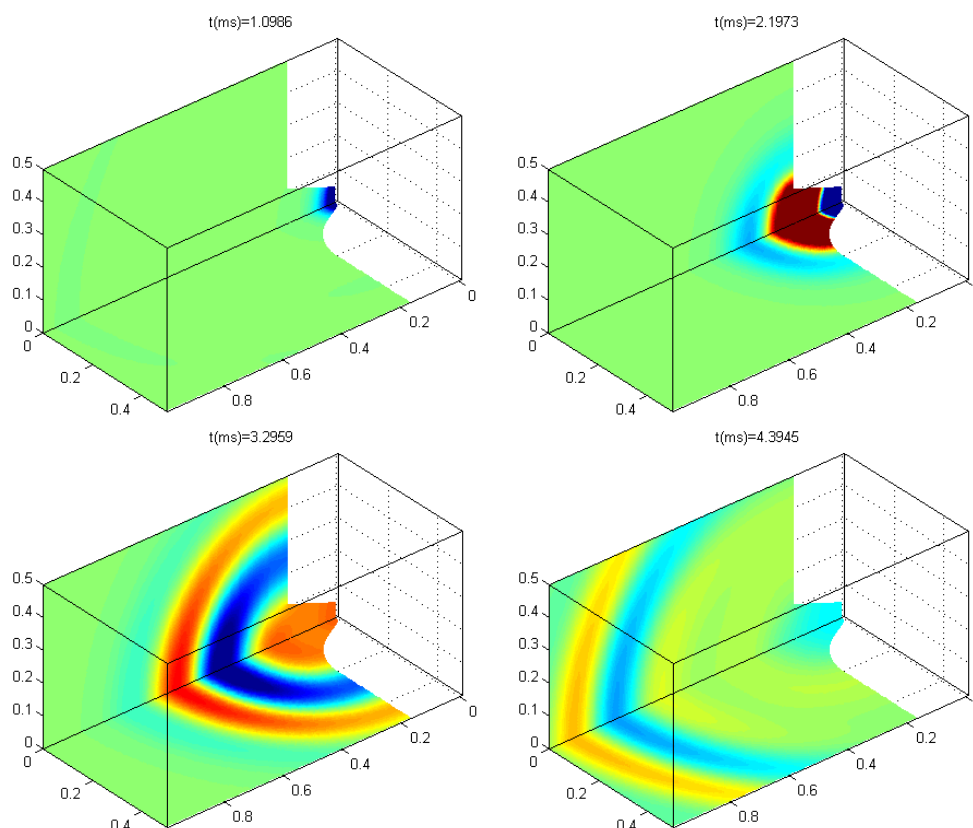


Figura 6 – Evolução temporal dos níveis de pressão sonora a partir da corneta acústica instalada num plano rígido infinito.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, adotou-se o MFS para modelar o comportamento de uma corneta acústica 3D com geometria complexa. No modelo implementado fez-se uso da divisão em duas sub-regiões, uma incorporando a corneta rígida e outra o espaço semi-infinito exterior ao ecrã rígido onde aquela foi instalada. A formulação clássica do MFS foi complementada com uma estratégia de otimização para determinar o posicionamento das fontes virtuais, através da minimização de um funcional em pontos de controlo seleccionados sobre superfícies definidas. Esta abordagem permite a utilização de um menor número de pontos de colocação, mantendo resultados precisos.

O modelo 3D proposto foi aplicado a uma corneta acústica, tendo-se comparado alguns resultados do modelo, em termos de diretividade, com resultados de um *software* comercial baseado no FEM. Os resultados obtidos através de ambas as metodologias são praticamente coincidentes, destacando-se o menor esforço de cálculo requerido pelo MFS 3D. O comportamento da corneta acústica foi ilustrado através da apresentação de mapas de níveis de pressão sonora para determinadas frequências de análise e de resultados no domínio do tempo, relativos à evolução da energia sonora radiada pelo dispositivo acústico.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho de investigação foi suportado por fundos do FEDER, através do Programa Operacional Factores de Competitividade – COMPETE, e por fundos nacionais, através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), no âmbito do projeto de investigação PTDC/ECM-COM/1438/2012.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D. Davis, E. Patronis - *Sound system engineering*. Focal Press, 2006.
- [2] S. Morita, N. Kyono, S. Sakay, T. Yamabuchi, Y. Kagawa - Acoustic radiation of a horn loudspeaker by the finite element method – A consideration of the acoustic characteristic of horns. *J. Acoust. Soc. Am.* 30, 896-905, 1982.
- [3] C. Beltran - Calculated response of a compression driver using a coupled field finite element analysis. Presented at the *105th Convention of the Audio Eng. Soc.*, 1998.
- [4] T. Hodgson, R. Underwood - BEM computations of a finite-length acoustic horn and comparison with experiment. *The Built Environment* 28, 213-222, 1997.
- [5] D. Noreland, R. Udawalpola, P. Seoane, E. Wadbro, M. Berggren - An efficient loudspeaker horn designed by numerical optimization: an experimental study. *Technical Report UMINF 10.1*, Dep. of Computing Science, Umeå University, 901 87 Umeå, Sweden, 2010.
- [6] R. Udawalpola, E. Wadbro, M. Berggren - Optimization of a variable mouth acoustic horn. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 85, 591–606, 2011.
- [7] R. Morgans - *Optimisation techniques for Horn Loaded Loudspeakers*. School of Mechanical Engineering, The University of Adelaide, Australia, 2004.
- [8] L. Godinho, J. Ramis, W. Cardenas, J. Carbajo, P. Amado Mendes - A numerical MFS model for computational analysis of acoustic horns. *Acta Acustica united with Acustica* 98, 916-927, 2012.
- [9] G. Fairweather, A. Karageorghis, P. Martin - The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 27, 759–69, 2003.
- [10] E. Kausel, J.M. Roesset - Frequency domain analysis of undamped systems. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 118, 721-734, 1992.