

PROBLEMA INVERSO EN LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN ACÚSTICA PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE ENTRADA EN LA SIMULACIÓN DE RECINTOS

PACS: 43.60.Pt

Navarro, Juan Miguel.
Universidad Católica San Antonio de Murcia.
Avd. de los Jerónimos, s/n
30.107 Guadalupe (Murcia). España
Tel: +34 968 278 825
Fax: +34 968 278 581
E-Mail: jmnavarro@ucam.edu

ABSTRACT

In order to achieve an accurate room acoustics simulation and a near reality resulting auralization, it is very important that input parameters in the simulation should be as much accurate as possible. The acoustics features of the materials that cover the room are one of the most important parameters. In this work, several numerical techniques are proposed to solve the inverse problem in the acoustic diffusion equation model for estimating the parameters values related with the geometry and acoustics features of the room.

RESUMEN

Para conseguir una simulación de recintos con precisión y que la auralización resultante sea cercana a la sensación real es muy importante que los parámetros de entrada sean correctos. Uno de los parámetros más importantes está relacionado con las características acústicas de los materiales que recubren el recinto. En este artículo se proponen varios métodos para resolver la ecuación de difusión acústica de forma inversa con el objetivo de estimar el valor de parámetros relacionados con la geometría y las características acústicas de la sala.

1. INTRODUCCIÓN

La definición precisa de los datos de entrada en la simulación de la acústica de salas es muy importante para la obtención de una buena auralización del recinto [1]. La absorción de los límites del local es una característica de la sala que tiene especial relevancia sobre los resultados de la simulación y en la evaluación subjetiva de la auralización [2, 3]. Durante el proceso de calibración del modelo a simular, el coeficiente de absorción de un material se suele buscar habitualmente en la bibliografía técnica o en la hoja de especificaciones del fabricante. En ocasiones es posible que el coeficiente de absorción no esté disponible en las referencias por lo que debe ser medido. La medición del coeficiente de absorción del material se realiza generalmente en una cámara reverberante, usando el estándar ISO 354 [4] para

incidencia aleatoria, o usando la técnica tradicional del tubo de ondas estacionarias, mediante el estándar descrito en la ISO 10534 [5] para incidencia normal. En los últimos años se han conseguido algunos avances en las técnicas de medición in-situ tales como el método de la función de transferencia, definido en el estándar ASTM E-1050 [6], la técnica de la sonda de intensidad [7], y la técnica de las agrupaciones paramétricas de micrófonos [8]. Sin embargo, en algunas ocasiones esta medición es excesivamente compleja de llevar a cabo en una sala real y los valores de absorción deben ser estimados mediante un método numérico. Este desarrollo se conoce como problema inverso de valores de borde y a menudo no tiene una solución única, aunque puede resolverse a través de modelo de simulación de acústica de salas [9]. Galindo et al. [10] usaron un procedimiento iterativo para ajustar el coeficiente de absorción de varios modelos de recintos de culto usando mediciones in-situ del tiempo de reverberación. Este procedimiento iterativo se realizaba cambiando de los valores del coeficiente de absorción de forma manual y calculado el tiempo de reverberación mediante las fórmulas clásicas.

En este trabajo de investigación se ha usado una solución numérica del modelo de la ecuación de difusión [11] para estimar el coeficiente de absorción de una superficie de la sala. Para ello se implementó un procedimiento iterativo automático aprovechando la versatilidad y la velocidad de computación del método de la ecuación de difusión [12]. Tomando como meta a alcanzar un conjunto de valores de tiempo de reverberación de diferentes posiciones de la sala, se puede calcular la solución temporal del modelo de la ecuación de difusión de forma iterativa para conseguir las condiciones de contorno que obtengan una simulación con el mínimo error relativo entre los datos de referencia y los valores calculados. Para minimizar el error es posible aplicar diferentes métodos. En este trabajo preliminar se ha aplicado con éxito una sencilla técnica de búsqueda bruta en un problema de tamaño limitado para mostrar las posibilidades de este método. Como ejemplo se ha modelado un recinto de geometría cúbica y se han realizado varias pruebas con diferentes distribuciones de coeficientes de absorción. Después de numerosas pruebas se ha observado que el coste computacional de esta técnica simple es proporcional al número de soluciones posibles y además tiende a crecer rápidamente. A partir de esta observación, en este trabajo se repasan y se proponen otras posibles aproximaciones al problema de estimación de estos parámetros.

Este documento está dividido en los siguientes apartados. Después de esta introducción, se repasa brevemente el modelo de la ecuación de difusión acústica y se explican algunos detalles sobre cómo se realiza la predicción del tiempo de reverberación con este método. A continuación, se presenta la técnica propuesta para la resolución del problema inverso. También se estudiará un problema de pruebas con el objetivo de mostrar las prestaciones de esta técnica. Después se discute sobre otras técnicas alternativas que permitan resolver este problema. Finalmente, se enuncian las conclusiones del estudio.

2. EL MODELO DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN ACÚSTICA

Recientemente, Valeau et al. [12] propusieron un método alternativo para predecir el campo sonoro en salas con precisión y con bajo tiempo de cálculo basándose en un modelo de difusión. El modelo de la ecuación de difusión acústica es una aproximación asintótica al modelo más complejo de la ecuación de transferencia radiativa [13]. Su derivación se consigue a través de varias suposiciones que requieren que las reflexiones con los objetos y con las paredes de la sala sean difusas. Además, las variaciones de la densidad de energía sonora deben ser bajas tanto en el espacio como en el tiempo.

Aplicando esta aproximación se puede expresar la distribución de la densidad de energía sonora $w(\mathbf{r}, t)$ en diferentes posiciones, \mathbf{r} , y tiempo, t definidas dentro de un dominio V y con una fuente sonora omnidireccional $P(t)$ situada en la posición \mathbf{r}_s como una ecuación diferencial en derivadas parciales.

$$\frac{\partial w(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - D \nabla^2 w(\mathbf{r}, t) + cmw(\mathbf{r}, t) = P(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \text{ in } V. \quad (1)$$

La ecuación 1 es una ecuación diferencial en derivadas parciales parabólica inhomogénea, donde ∇^2 es el operador de Laplace, y $D = \lambda c/3$ se define como el coeficiente de difusión donde c es la velocidad del sonido. Este coeficiente de difusión tiene en cuenta la geometría de la sala a través del recorrido libre medio dado por $\lambda = 4V/S_t$, con un volumen V y un área interior total S_t . El término $cmw(\mathbf{r}, t)$ modela la atenuación atmosférica dentro de la sala, donde m es el coeficiente de absorción del aire.

Para poder utilizar la ecuación de difusión en una sala de forma arbitraria es necesario contar con unas condiciones de contorno adecuadas. Una manera habitual de expresar los cambios de energía con los límites del medio ∂V en situaciones reales es la condición de contorno mixta [12],

$$-D \frac{\partial w(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{n}} = A_X(\mathbf{r}, \alpha) cw(\mathbf{r}, t) \text{ on } \partial V. \quad (2)$$

La ecuación 2 modela los efectos en el campo sonoro que provocan los diferentes niveles de absorción de las superficies. El término \mathbf{n} representa el vector unitario normal a la superficie límite. Esta condición de contorno permite expresar las propiedades absorbentes de las diferentes superficies de la sala a través del llamado factor de absorción $A_X = A_X(\mathbf{r}, \alpha)$, donde α es el coeficiente de absorción. En varios artículos científicos se han presentado diferentes definiciones de A_X que dependen de la teoría física utilizada [14]. Para este trabajo, se ha utilizado el conocido como factor de absorción modificado que ha demostrado ser más preciso en condiciones de alta absorción de valores hasta 0,7. Este factor de absorción está basado en unas condiciones de contorno de la difusión de la luz en un medio [14, 13],

$$A_M(\mathbf{r}, \alpha) = \frac{\alpha}{2(2 - \alpha)}. \quad (3)$$

Finalmente, para simular los procesos de difusión acústica de una sala, se debe resolver el sistema de ecuaciones (Ecuación 1 y Ecuación 2) en todo el dominio V y en los bordes ∂V .

En este estudio, el modelo de difusión acústica se ha utilizado para estimar la respuesta al impulso de la sala en diferentes puntos con el objetivo de calcular el tiempo de reverberación. Mediante la respuesta al impulso de una sala es posible definir la acústica de una sala. Existe una única respuesta al impulso de la sala para cada par de posiciones fuente-receptor. La ecuación de difusión acústica modela la evolución temporal de la densidad de energía acústica, $w(\mathbf{r}, t)$, propagándose a través del interior del recinto y reflejándose en sus diferentes paredes. Por lo tanto, cuando la señal emitida por la fuente es un impulso el resultado de la predicción de la ecuación de difusión acústica será una aproximación de la respuesta al impulso energética. A partir de la solución temporal de $w(\mathbf{r}, t)$, la función temporal de la energía sonora se puede expresar como,

$$L_p(\mathbf{r}, t) = 10 \log_{10} \left(\frac{w(\mathbf{r}, t) \rho c^2}{P_{ref}^2} \right), \quad (4)$$

donde P_{ref}^2 es 2.10^{-5} Pa y ρ es la densidad del aire. El tiempo de reverberación se puede calcular mediante la pendiente resultante de la integración de Schroeder de la respuesta al impulso energética. La pendiente se suele obtener desde el nivel de -5 dB al nivel de -35 dB, definido como T_{30} debido a la dificultad de obtener el rango dinámico requerido para evaluar una caída de 60 dB.

3. MÉTODO PROPUESTO

En este trabajo se utilizó una implementación de un esquema de diferencias finitas [11] para resolver el sistema de ecuaciones del modelo de difusión acústica, ver Ecuación 1 y 2. El método de las diferencias finitas proporciona esquemas eficientes y sencillos que permiten resolver la ecuación de difusión en el dominio del tiempo. Cuando se aplica un esquema de diferencias finitas el dominio del problema a resolver se discretiza, por lo tanto los valores de la variable dependiente desconocida son considerados sólo en un número finito de puntos o celdas en lugar de los infinitos puntos de un dominio. Es importante resaltar que mediante esta implementación se obtienen con una ejecución de la simulación la predicción de los valores en todas las celdas, es decir, la respuesta al impulso de la sala en cada uno de los puntos receptores se estima al mismo tiempo.

Consideremos el problema de determinar el factor de absorción A_x o el coeficiente de absorción $\alpha(r)$ de una superficie de la sala, ver Ecuación 3, en un medio homogéneo tridimensional de grandes dimensiones en el cual se conoce el tiempo de reverberación en varias posiciones. Estos valores pueden provenir, por ejemplo, de mediciones de la respuesta al impulso de la sala en esos puntos. Mediante la aplicación del siguiente método numérico se puede encontrar una solución a este problema inverso de bordes. Este proceso se lleva a cabo utilizando un procedimiento iterativo cuyo objetivo final es conseguir que el tiempo de reverberación promedio en el espacio estimado difiera lo mínimo posible de los datos de referencia.

El procedimiento iterativo se divide en las siguientes etapas:

- 1) Considerar el caso sencillo en el cual una cantidad escalar T_{30} es medida directamente afectada por ruido uniforme. Entonces, la medición i -ésima se define como

$$d_i = T_{30} + n_i. \quad (5)$$

- 2) Obtener el promedio de las M mediciones de T_{30}

$$\bar{T}_{30} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M d_i, \quad (6)$$

para calcular una estimación que sirva de valor inicial del coeficiente de absorción, α_i , mediante la fórmula de Sabine.

$$\alpha_i = \frac{0.162V}{\bar{T}_{30}S_t}. \quad (7)$$

- 3) Resolver numéricamente el modelo de la ecuación de difusión acústica usando α_i y calcular el error, e_i , entre los valores estimados del tiempo de reverberación, \hat{T}_{30i} , y los valores medidos del tiempo de reverberación, d_i

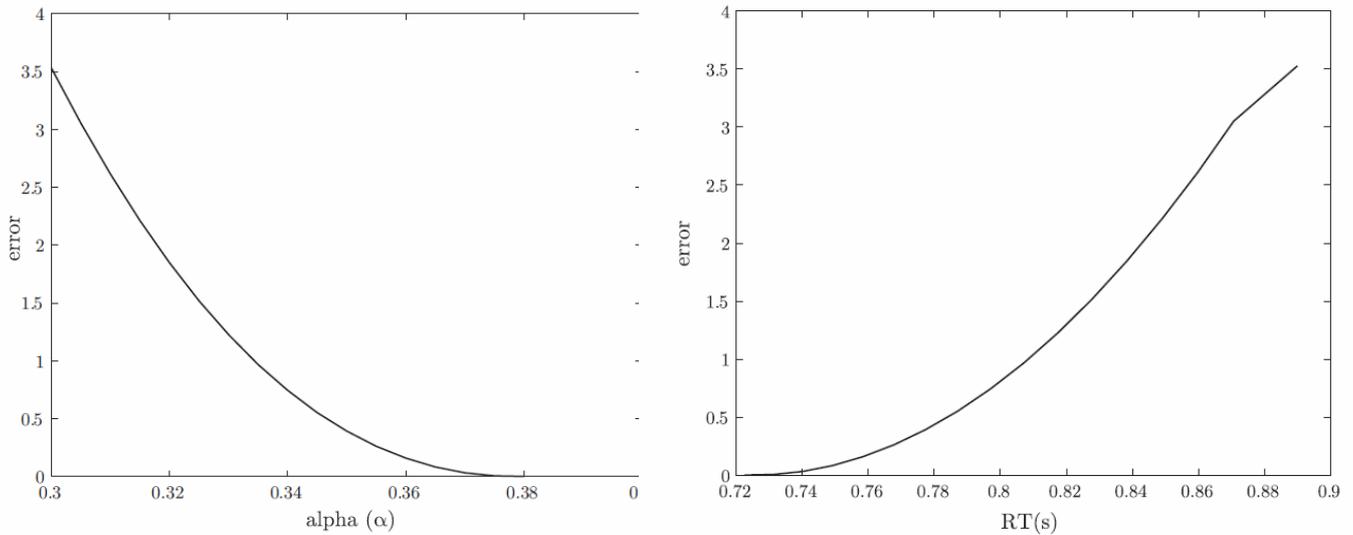
$$e_i = \sum_{i=1}^M (d_i - \hat{T}_{30i})^2. \quad (8)$$

- 4) Aplicar una técnica numérica para minimizar el error. En esta investigación, α_i se incrementa o decrementa en un valor aleatorio limitado con el objetivo de encontrar un mínimo local a través de una resolución iterativa del modelo de la ecuación de difusión. Este algoritmo de búsqueda exhaustiva consiste en enumerar sistemáticamente cada uno de los posibles candidatos a la solución y comprobar cual de los candidatos satisface el enunciado del problema. Aunque este algoritmo no es eficiente, se ha decidido usar en este trabajo como prueba para mostrar las prestaciones del método propuesto.

4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En este apartado se muestran algunos resultados numéricos del método propuesto para el problema inverso del coeficiente de absorción. El algoritmo se probó en una sala de forma cúbica de 10 m de lado en dos configuraciones de distribución de absorción: una sala con distribución de absorción homogénea y una sala con dos coeficientes de absorción diferentes. Como primer paso de la prueba se resuelve el modelo de la ecuación de difusión con los parámetros objetivo para obtener unos tiempos de reverberación iniciales en lugar de datos procedentes de mediciones. A estos valores se les añade ruido con una distribución normal que resultan en los datos de referencia, d_i . Después de esto, se ejecutan varias simulaciones del programa de la ecuación de difusión usando los coeficientes de absorción estimados. El procedimiento en bucle termina cuando el valor de error alcanza un valor mínimo local. Como desventaja de esta técnica de búsqueda, en el caso de que existan varios mínimos locales es posible que no se encuentre siempre la solución correcta.

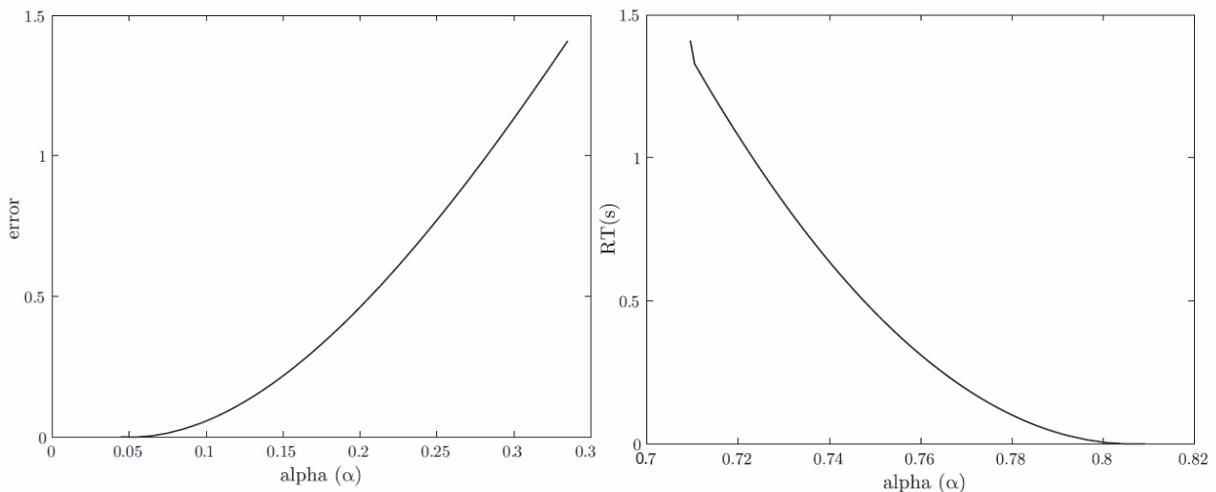
En el primer ejemplo todas las superficies de la sala tiene el mismo coeficiente de absorción. En la Figura 1.a se muestran los resultados de la evolución del error entre los valores del tiempo de reverberación de referencia y los valores estimados frente a al coeficiente de absorción en esta primera prueba. Se observa en este caso que el error decrece en cada iteración y que el resultado converge a un valor fijo de la absorción. La Figura 1.b muestra como disminuyen los tiempos de reverberación estimados cuando el coeficiente de absorción incrementa. Para validar este proceso se ejecutaron varias simulaciones cambiando el coeficiente de absorción objetivo. En todos los casos probados los valores de absorción estimados muestran una buena concordancia con los datos de referencia.



(a) (b)

Figura 1. Error entre los valores de tiempo de reverberación de referencia y los valores estimados a) frente a los coeficientes de absorción b) frente a los tiempos de reverberación estimados obtenidos en la simulación de una sala con distribución homogénea de absorción.

En la segunda configuración de prueba el coeficiente de absorción del suelo, que será desconocido, de la sala cúbica se define como diferente al coeficiente de absorción de las demás superficies, que será conocido. Este recinto tiene unas condiciones de contorno mixtas con un material de baja absorción en el suelo (0,1), y una absorción alta en las paredes y el techo (0,4). En la Figura 2.a se muestra el error entre los valores del tiempo de reverberación de referencia y los valores estimados frente al coeficiente de absorción del suelo de la sala en este segundo ejemplo. En este caso la excursión de los valores de absorción entre el valor inicial y el final es mayor que en el caso de la distribución homogénea dado que el coeficiente de absorción alto de las paredes y el techo influye. Cuando el error decrece los valores de absorción convergen con los datos de referencia. Tal y como muestra la Figura 2.b, en este segundo caso el coeficiente de absorción estimado decrece por lo que los valores del tiempo de reverberación obtenidos incrementa a cada iteración.



(a) (b)

Figura 2. Error entre los valores de tiempo de reverberación de referencia y los valores estimados a) frente a los coeficientes de absorción b) frente a los tiempos de reverberación estimados obtenidos en la simulación de una sala con dos materiales absorbentes en diferentes superficies.

5. OTRAS TÉCNICAS PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

La técnica de búsqueda exhaustiva o por fuerza bruta, que ha sido aplicada en este trabajo, se utiliza normalmente cuando el tamaño del problema es limitado o cuando la simplicidad de implementación es más importante que la velocidad. Esta técnica es considerada como la más sencilla de la metaheurística. Existen muchos otros métodos diseñados para aprovechar el conocimiento parcial que podemos tener previamente de la solución para encontrarla. En este apartado se ha querido introducir una discusión sobre otras posibles técnicas que pueden ser útiles en la resolución de problemas de estimación de parámetros en la acústica de salas.

En las técnicas deterministas para problemas inversos, la solución es interpretada como un parámetro desconocido. Estos métodos cuando son aplicados a problemas donde la solución no es única o mal planteados se conocen comúnmente como métodos de regularización [15]. Los modelos deterministas suelen buscar para encontrar una sola solución del problema, posiblemente basándose en alguna estimación de error. Sin embargo, en general esta estimación no soportan una interpretación estadística.

En contraste con las técnicas deterministas otro grupo de técnicas para la estimación de parámetros es la inferencia Bayesiana [16]. Este método estadístico asigna probabilidades o distribuciones a eventos o parámetros, como ocurriría en el caso particular de este trabajo, basándose en la experiencia o en mejores estimaciones antes de la experimentación y la recogida de datos. En esta técnica se aplica el teorema de Bayes para revisar las probabilidades y distribuciones después de obtener los datos experimentales. En el contexto de nuestro particular escenario, el uso de datos reales serían útiles para construir un sistema de predicción que hiciera uso del modelo de la ecuación de difusión acústica mediante la estimación del coeficiente de absorción. Dado que el modelo ya está definido (modelo de la ecuación de difusión), la inferencia se haría a nivel de estimación del parámetro. Seguidamente se pueden aplicar técnicas modernas basadas en los modelos de las cadenas de Markov Monte-Carlo para conseguir una estimación eficiente de las probabilidades del parámetro de coeficiente de absorción [17].

Otra técnica interesante para la estimación de parámetros es el uso de redes neuronales artificiales. Este modelo matemático es un sistema adaptativo en el cual unas neuronas artificiales cambian sus interconexiones durante una fase de aprendizaje. Varios tipos de redes neuronales han sido utilizadas con éxito en la estimación de las condiciones iniciales en problemas inversos de la ecuación de difusión [18]. Por otro lado, con un perceptron multicapa y una red neuronal de función de base radial se ha demostrado que se pueden estimar las condiciones de contorno dependientes con el tiempo en un placa o bloque [19].

Estas aplicaciones encontradas en la literatura son principalmente en 1-D, por lo que para su posible aplicación en acústica de salas es necesaria una extensión al dominio 3-D.

6. CONCLUSIONES

El presente estudio introduce un método numérico que usa el modelo de la ecuación de difusión acústica y el método de las diferencias finitas con el objetivo de estimar el coeficiente de absorción de un material en una sala. Este procedimiento propuesto es flexible y rápido debido a la aplicación del modelo de la ecuación de difusión acústica. Los experimentos numéricos preliminares en un recinto de forma cúbica modelado muestran que el método numérico es capaz de encontrar una solución en el caso de que exista. La técnica aplicada para minimizar el error no es computacionalmente eficiente si el tamaño de problema aumenta, aunque es fácil de implementar y ayuda a validar el procedimiento planteado. A continuación se han revisado otras técnicas alternativas para la estimación de parámetros, en las cuales

destaca la inferencia Bayesiana. En un investigación en desarrollo se están estudiando extensiones del método a distribuciones de la absorción más complejas y con más parámetros desconocidos, así como para estimar otros parámetros que influyen en los procesos de difusión en salas.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido apoyado por la Universidad Católica San Antonio bajo el proyecto con referencia PMAFI-PI-13/11.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Vorländer, *Auralization: Fundamentals of Acoustics, Modelling, Simulation, Algorithms and Acoustic Virtual Reality* (Springer) (2008).
- [2] P. D'Antonio, A. Mochimaru, "Evaluating the influence of directional scattering coefficients for reflection, absorption, and diffusion in the auralization of acoustic designs", *The Journal of the Acoustical Society of America* 92, 2346–2347 (1992).
- [3] T. Lokki, H. Järveläinen, "Subjective evaluation of auralization of physics-based room acoustics modeling", in *Proc. of the 2001 International Conference on Auditory Display* (Espoo, Finland) (2001).
- [4] "International standard 354, "acoustics - measurement of sound absorption in a reverberation room"", (2003).
- [5] "International standard 10534-1, "acoustics - determination of sound absorption coefficient and impedance in impedance tubes – part 1: Method using standing wave ratio"", (1996).
- [6] "ASTM E1050 - 12 standard test method for impedance and absorption of acoustical materials using a tube, two microphones and a digital frequency analysis system", (1990).
- [7] A. Farina, A. Torelli, "Measurement of the sound absorption coefficient of materials with a new sound intensity technique", in *102nd AES Conference* (1997).
- [8] B. Castagnede, A. Moussatov, "In situ measurements of the absorption coefficient in porous materials performed with parametric arrays and with standard audio instrumentation", *The Journal of the Acoustical Society of America* 121, 3029–3029 (2007).
- [9] J. E. Summers, "Inverse problems and auralization", in *Internoise 2012* (2012).
- [10] M. Galindo, T. Zamarreño, S. Girón, "Acoustic simulations of mudejar-gothic churches", *The Journal of the Acoustical Society of America* 126, 1207–1218 (2009).
- [11] J. M. Navarro, J. Escolano, J. J. Lopez, "Implementation and evaluation of a diffusion equation model based on finite difference schemes for sound field prediction in rooms", *Applied Acoustics* 73, 659 – 665 (2012).
- [12] V. Valeau, J. Picaut, M. Hodgson, "On the use of a diffusion equation for room-acoustic prediction", *J. Acoust. Soc. Am.* 119, 1504–1513 (2006).
- [13] J. M. Navarro, F. Jacobsen, J. Escolano, J. Lopez, "A theoretical approach to room acoustic simulations based on a radiative transfer model", *Acta Acustica United with Acustica* 96, 1078–1089 (2010).
- [14] Y. Jing, N. Xiang, "On boundary conditions for the diffusion equation in room acoustic predictions: Theory, simulations, and experiments", *J. Acoust. Soc. Am.* 123, 145–153 (2008).
- [15] H. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems, Mathematics and Its Applications* (Springer) (1996).
- [16] D. MacKay, *Information Theory, Inference and Learning Algorithms* (Cambridge University Press) (2003).
- [17] I.S. Tobasco, K.J. Fidkowski, "A probabilistic approach to inverse convection-diffusion.", in *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition* (2011).
- [18] E.H. Shiguemori, J.D.S. da Silva, H.F. Campos Velho, "Estimation of initial condition in heat conduction by neural network", *INVERSE PROBL SCI ENG* 12, 317–328 (2004).
- [19] E.H. Shiguemori, F.P. Harter, H.F. Campos Velho, "Estimation of boundary conditions in conduction heat transfer by neural networks", *Tendencias em Matematica Aplicada e Computacional* 3, 189–195 (2002).