

## SUBESTRUCTURACIÓN EN RECINTOS

### MÉTODO SIMPLE

PACS: 43.55.Gx

F.X.Magrans; Ingeniería para el Control del Ruido [fxmagrans@icrsl.com](mailto:fxmagrans@icrsl.com).

#### ABSTRACT

A method is proposed to, partitioning a room in smaller parts, calculate the response of the whole room to any number of sources excitation if we know the response of each part. As a consequence the method allows to extend the frequency range of calculus using only matrices of smaller dimension than the whole matrix and also allows to reduce the time of calculus if we select parts of the room with same dimensions. The room may have absorption with local reaction placed on the walls and with a known impedance.

#### RESUMEN

Se propone un método para calcular la respuesta de un local dividiéndolo en trozos y resolviéndolos por separado. Esto permite extender el rango de frecuencias ya que se trabaja con matrices de dimensión mucho menor reduciendo el tiempo de cálculo, también porque permite reducir la memoria necesaria para realizar el cálculo y, finalmente, porque si en el recinto se seleccionan trozos de las mismas dimensiones un solo cálculo nos permite representar matemáticamente todos los trozos de iguales dimensiones.

## INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca dentro de la aportación de ICR en el proyecto “ Acústica Virtual aplicada al Patrimonio cultural” financiado por el Ministerio de Educación bajo el código BIA2012-36896.

El objetivo de ICR en este proyecto es colaborar en los métodos para el estudio de la transmisión sonora en recintos para medias y bajas frecuencias, desarrollando modelos numéricos que permitan resolver el problema de acoplamiento de espacios, problema particularmente difícil en recintos complejos y de grandes dimensiones como muchos de los que figuran en este proyecto. Esto equivale a desarrollar métodos de cálculo que permitan resolver numéricamente las presiones que un conjunto de fuentes sonoras producirán en un recinto obviando las limitaciones de memoria y del tiempo de cálculo.

Para conocer las presiones producidas por un conjunto de fuentes sonoras en un recinto teniendo en cuenta el modulo y la fase de las presiones generadas y de la respuesta en el local puede recurrirse en el espacio de tiempo a resolver la ecuación de Onda o en el de frecuencia a resolver la Ecuación de Helmholtz. La solución de esta ecuación expresa las presiones acústicas en un recinto en función de la frecuencia, de las características del recinto y de las características de las fuentes sonoras.

Un método para resolver la ecuación de Helmholtz es el de las diferencias finitas que puede expresarse como un sistema algebraico que contiene las presiones en todo el recinto y las impedancias normales en el contorno. La inclusión de la impedancia en los límites permite resolver problemas de recintos con materiales absorbentes en sus cerramientos o con paredes que separen el recinto estudiado de otros recintos. Así pues permiten estudiar el problema en toda su dimensión sin otra limitación que la que, en frecuencia, introduzca la discretización del recinto. Esto definirá una frecuencia máxima hasta la que el cálculo tendrá precisión suficiente.

La resolución mediante discretización siempre se enfrenta al problema de la elevada dimensión de las matrices puestas en juego. Sus grandes dimensiones limitan la capacidad de cálculo tanto por el tiempo necesario para resolverlo como por la memoria que debe utilizarse.

En el presente trabajo se propone acudir a métodos de subestructuración. Subestructurar supone dividir el problema de un recinto en varios recintos menores con ciertas condiciones de contorno, resolver estos problemas de dimensión menor utilizando un tiempo de cálculo y dimensión de memoria mucho menores y luego “cosarlos” para hallar la solución del recinto entero.

## ANTECEDENTES

Sin pretender hacer una revisión a fondo de los métodos existentes diremos que los trabajos destinados a la consecución de esta solución por partes a la que llamamos Subestructuración son múltiples y empiezan en 1964 con el trabajo “On the Dynamic Analysis of Structural Systems using component modes” AIAA paper Num.64-487 First AIAA meeting June 1964. Posteriormente y en el mismo sector industrial (la aeronáutica) Craig y Bampton se basaron en

el anterior trabajo para desarrollar una metodología más amplia. "Coupling of substructures for dynamic analysis" AIAA journal Vol. 6 Num. 7 July 1968.

Estos métodos ya son ampliamente utilizados y se desarrollan actualmente soluciones iterativas de mayor calado teórico siendo un ejemplo del año 2000 el trabajo de Farhat y otros. "Two level domain decomposition methods with Lagrange multipliers for the fast iterative solution of acoustic scattering problems" Charbel Farhat et al.

Frecuentemente la subestructuración se utiliza para separar problemas de distinta naturaleza, por ejemplo estructuras acopladas a un fluido o bien materiales porosos absorbentes acústicos con un modelo propio y el recinto que los contiene que responde a la ecuación de Onda.

También es cierto que se utiliza para reducir la dimensión de un problema por ejemplo en el ámbito naval donde se pretenden los dos aspectos, reducción de la dimensión y separación de las ecuaciones de distinta naturaleza.

Se utiliza también, finalmente, en las estructuras complejas para estudiar cuales son los subsistemas SEA que lo componen.

## **SOLUCIÓN PROPUESTA**

La solución propuesta y desarrollada en este trabajo se inspira en los métodos utilizados en acústica para calcular redes de tuberías y aun siendo un esquema más simple permite resolver los problemas relacionados con recintos en su aspecto más general. En su modo más elemental dichos métodos suponen que sólo se propagan ondas planas y basándose en este hecho establecen una relación matricial entre presión y velocidad en la entrada y los mismos parámetros en la salida.

Una mejora aparece inmediatamente si consideramos que podemos obtener una matriz que relacione las presiones en todos los nodos y sus 3 velocidades. Dicha matriz es la matriz que tiene como columnas las presiones en todo el recinto provocadas por fuentes de velocidad  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  en todos y cada uno de los nodos y puede obtenerse sencillamente mediante la inversa de la matriz definida por las ecuaciones en DF. Si finalmente sólo guardamos una matriz que relacione  $p, v_n$  (velocidad normal) en la entrada y la salida dispondremos del mismo esquema que en las redes de tuberías sin recurrir a la hipótesis de las ondas planas y podremos encadenar dichas matrices en los distintos recintos para calcular el comportamiento del conjunto. Esto supone una reducción notabilísima de la memoria necesaria en tanto que no se conserva la información correspondiente al interior del elemento.

El siguiente paso lógico es intentar generalizar el proceso en especial excluyendo el concepto de entrada y salida para hablar sencillamente de recintos. Este es el esquema que se desarrolla en el presente trabajo.

## **DESARROLLO DE LAS ECUACIONES**

En primer lugar se secciona el volumen en volúmenes menores.

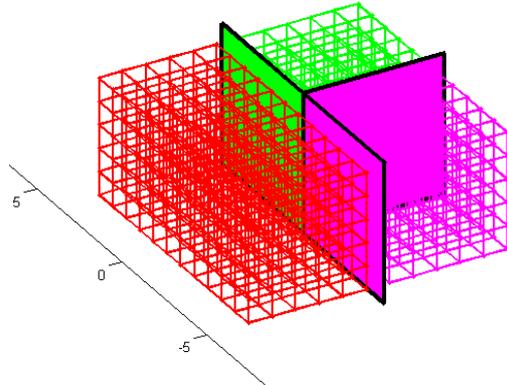


Figura 1- Recinto seccionado en tres volúmenes menores incluyendo sus respectivos mallados.

Para cada bloque se busca la matriz que relaciona presión y velocidad en todos los grados de libertad en condiciones de bloqueo en su frontera. Para ello si  $L(p,v)=0$  ( $p$ =presión,  $v$ =velocidad) es la ecuación de Helmholtz discretizada se buscarán sus soluciones para  $v=I$  (matriz identidad). Dicha soluciones forman la matriz  $R$  de respuestas al impulso de todos los grados de libertad. Dicha matriz  $R$  se reducirá a otra  $R_c$  que sólo incluye los grados de libertad de las caras del bloque. La nueva matriz  $R_c$  con dimensión igual al número de grados de libertad de las caras será la que relacione las presiones con las velocidades en las caras.

Utilicemos para cada bloque la matriz que obtiene sus presiones conociendo sus velocidades.

Sea  $A$  la cara común a dos bloques. En la cara  $A$  las velocidades han de estar relacionadas con las presiones a ambos lados de dicha cara, sean las otras caras  $C$  y  $D$  y  $p_i$  y  $p_t$  las presiones en ambos lados de la cara común. Sean además  $a_{mn}$  y  $a'_{mn}$  los coeficientes de la matriz  $R_c$  correspondiente a cada uno de los volúmenes. Podemos ahora establecer la siguiente ecuación de continuidad para todas las caras comunes.

$$p_i - p_t = \sum_{j \in A} a_{ij} v_j + \sum_{k \in C} a_{ik} v_k - \sum_{l \in A} a'_{tl} v_l - \sum_{s \in D} a'_{ts} v_s = i\omega\rho v_p \Rightarrow$$

$$\sum_{j \in A} (a_{ij} - a'_{ij} - i\omega\rho\delta_{jp}) v_j + \sum_{k \in C} a_{ik} v_k - \sum_{k \in C'} a'_{ts} v_s = 0 \quad (1)$$

En donde, como ya se ha dicho, los coeficientes son los de las matrices  $R_c$  de respuesta al impulso.

La ecuación (1) nos dice que en la matriz total la posición  $ij$  de la cara común deberá ser  $a_{ij}-a'_{ij}$  y el término independiente será cero desapareciendo de las ecuaciones las velocidades de la cara  $A$ .

Después de unir todos los macrobloques quedaran como incógnitas las velocidades en las caras de unión de los bloques y las velocidades en las paredes exteriores. Pero para cada elemento de las caras exteriores podremos también escribir una ecuación extraída de la matriz  $R_c$

correspondiente relacionando la presión en aquel grado de libertad con las velocidades en los restantes grados de libertad del recinto.

$$p_i = \sum_{i,j \in C} a_{ij} v_j \Rightarrow v_i = \sum_{i,j \in C} \frac{a_{ij}}{Z_i} v_j \Rightarrow 0 = \sum_{\substack{i,j \in C \\ j \neq i}} \frac{a_{ij}}{Z_i} v_j + \left( \frac{a_{ii}}{Z_i} - 1 \right) v_i \quad (2)$$

Así pues obtendremos un conjunto de ecuaciones que tendrán como incógnitas las velocidades sobre las superficies separadoras de los bloques y sobre los elementos exteriores y que formarán un sistema de ecuaciones homogénea ya que todas estas ecuaciones son iguales a cero.

Para que esto tenga solución será necesario que sobre la superficie o sobre un contorno que contenga una fuente exista un elemento o más que tengan velocidad distinta de cero.

Estos elementos pasarán a ser el término independiente del sistema de ecuaciones cuya solución nos darán las velocidades sobre las caras separadoras y sobre las superficies exteriores.

Es decir disponemos de un sistema de ecuaciones donde el primer bloque de filas son las fuentes. El segundo bloque son las ecuaciones de continuidad y el tercer bloque son las ecuaciones derivadas de la impedancia en las paredes exteriores.

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \bar{A}_s & \bar{A}_c & \bar{A}_i \\ \bar{B}_s & \bar{B}_c & \bar{B}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_s \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Estas ecuaciones nos permiten obtener como solución las velocidades en las caras interiores y exteriores.

Finalmente conociendo las velocidades en las caras de los bloques y a través de las matrices R podemos calcular las presiones en todas las celdas con lo que el problema queda resuelto.

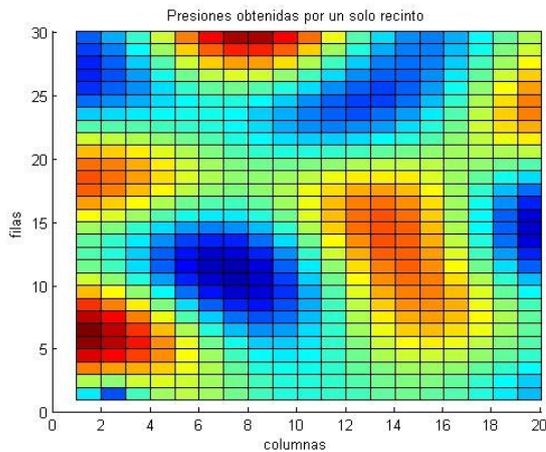
## RESULTADOS

Las pruebas se han hecho con un recinto en dos dimensiones dejando para más adelante la implementación a tres dimensiones.

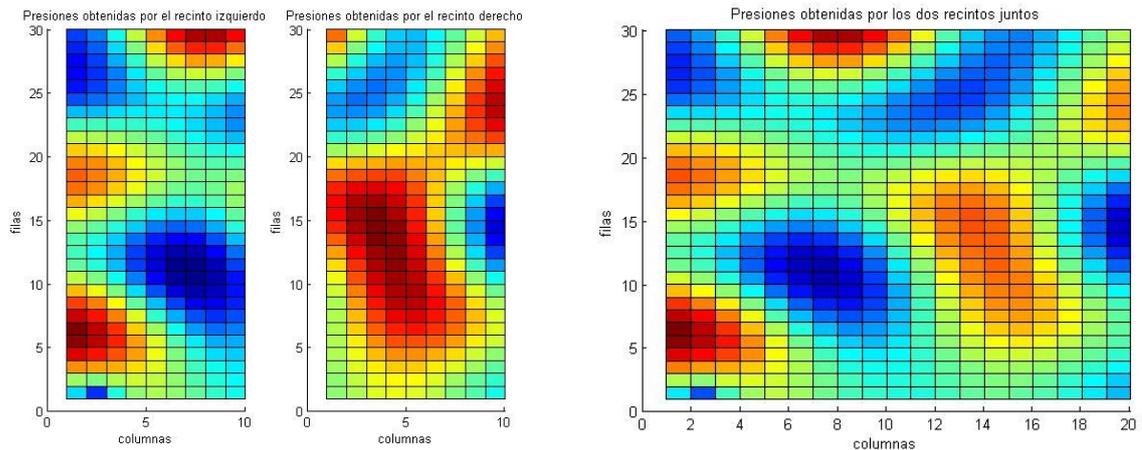
### 1.1. PRUEBAS EN 2D

Las pruebas realizadas no lo han sido sobre matrices de grandes dimensiones, que es donde el método de subestructuración consigue ventaja evidente. Las pruebas realizadas sólo persiguen probar la validez del método.

El primer caso es un recinto de 2x3 que se resuelve bien sea por la vía directa (gráfica 1) o resolviéndolo en dos mitades iguales de 1x3. Gráficas (2) y (3). El cálculo se realiza a 135.5 Hz.



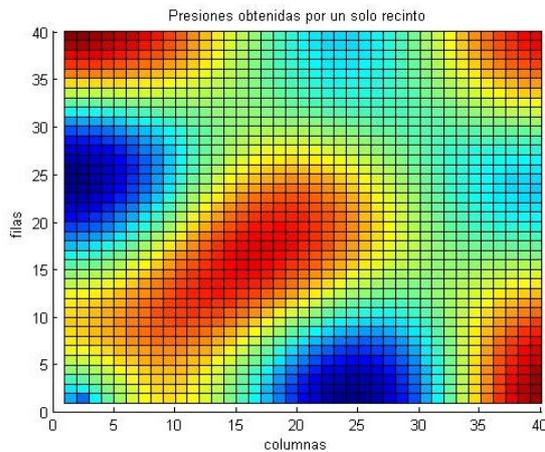
**Gráfica 1:** Recinto de 2x3 m , presión calculada para el recinto total. Se ha situado una fuente en la celda (1,2), frecuencia de 135.5Hz.



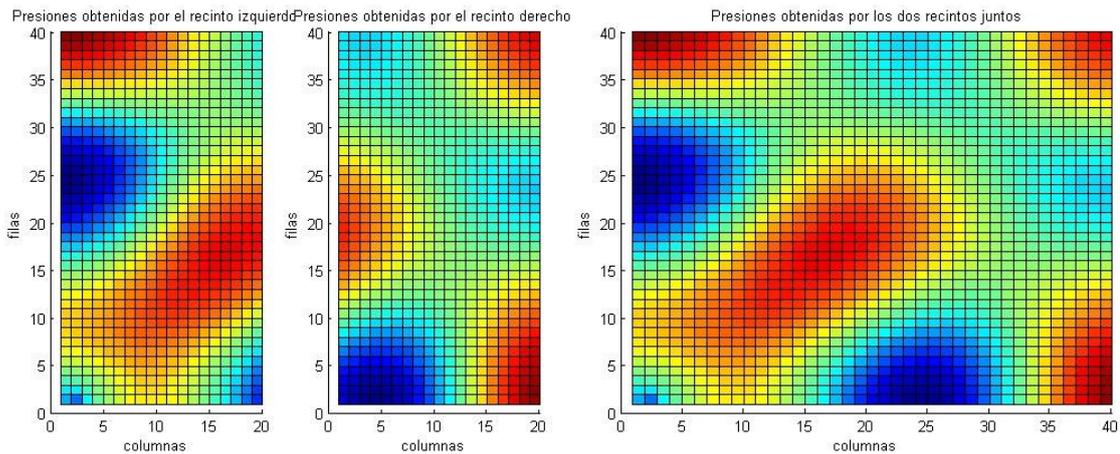
**Gráfica 2:** Dos recintos de 1x3 m, presión calculada para las dos mitades del recinto y aplicadas las condiciones de continuidad. Se ha situado una fuente en la celda (1,2), frecuencia de 135.5Hz.

**Gráfica 3:** Dos recintos de 1x3 m, presión calculada, unidas las dos mitades y representadas en la misma escala. Se ha situado una fuente en la celda (1,2), frecuencia de 135.5Hz.

En el segundo caso (gráficas de 4 a 6) se sigue el mismo proceso para un recinto de 4x4 y el cálculo se realiza también en dos mitades a 100 Hz.



Gráfica 4: Un recinto de 4x4 m, presión calculada para el recinto total. Se ha situado una fuente en la celda (1,2), frecuencia de 100 Hz.



Gráfica 5: Dos recintos de 2x4 m, presión calculada para las dos mitades del recinto y aplicadas las condiciones de continuidad. Se ha situado una fuente en la celda (1,2), frecuencia de 100 Hz.

Gráfica 6: Dos recintos de 2x4 m, presión calculada para las dos mitades del recinto, unidas las dos mitades y representadas en la misma escala. Se ha situado una fuente en la celda (1,2), frecuencia de 100 Hz.

Veamos en los casos expuestos las dimensiones de las matrices a tratar.

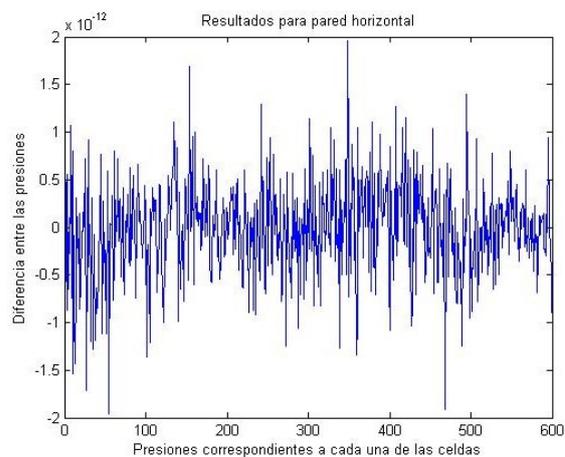
En el primer caso (gráficas 1 a 3) el cálculo directo supone resolver una matriz de 600x600 en tanto que la alternativa subestructurada escogida supone resolver una matriz de 300x300 y una matriz de 30x30.

En realidad serían, en general, dos matrices de 300x300 pero se ha escogido subestructurar con dos recintos iguales con lo que sus matrices serán las mismas.

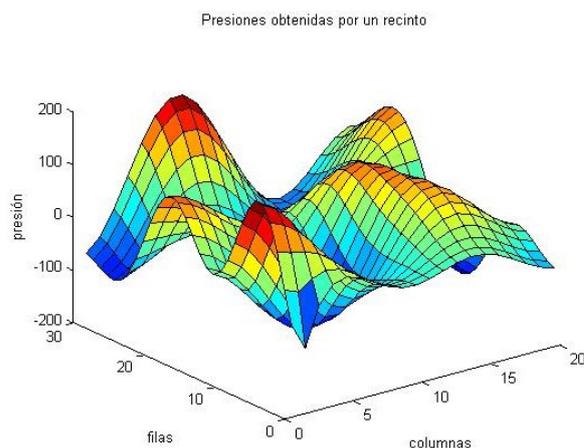
Para el mismo recinto de 2x3 podrían haberse escogido otras alternativas. Se ha escogido la que permite hacer menos cálculos pero si hubiera problemas de memoria se podrían hacer otras particiones que minimizarían las dimensiones de las matrices.

En las siguientes figuras pueden verse dos comparaciones de cálculo total o subestructurado con la diferencia en todos sus puntos.

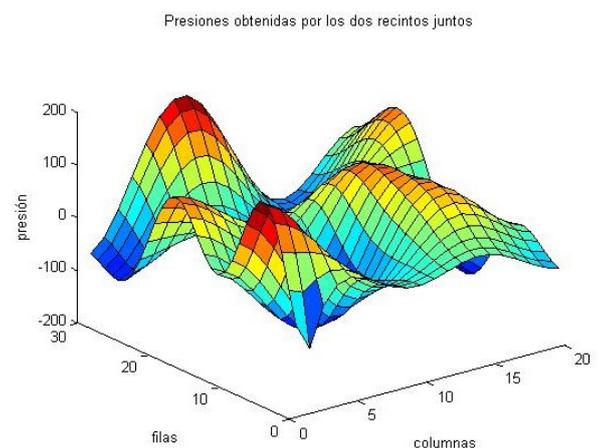
La comparación de los dos cálculos, uno directo y el otro subestructurado da diferencias del orden de  $2^{-12}$  como máximo



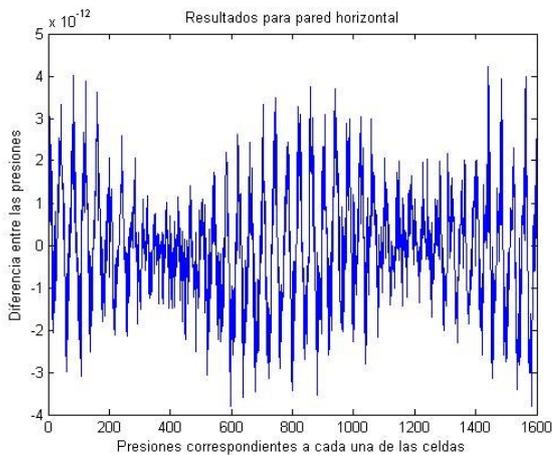
**Gráfica 7:** Diferencia entre los valores obtenidos para las presiones para un solo recinto y los valores obtenidos para dos recintos



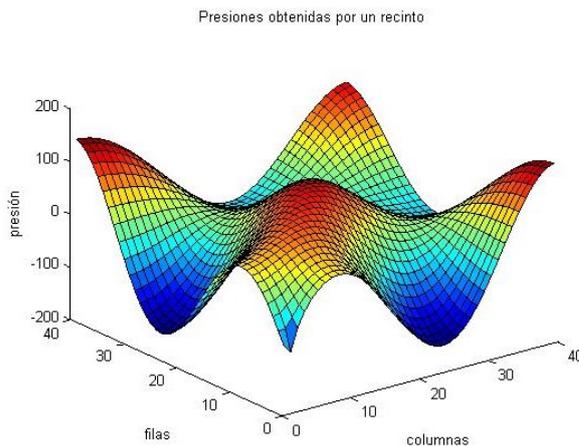
**Gráfica 8:** Presiones calculadas para un solo recinto de 2x3. Se ha situado una fuente en la celda (1,2), frecuencia 100.0Hz.



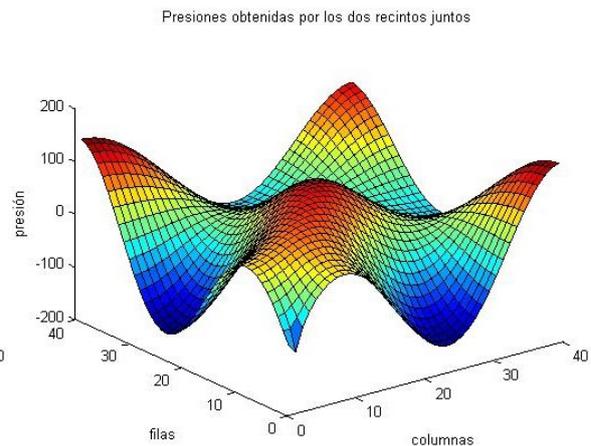
**Gráfica 9:** Presiones calculadas para dos recintos de 1x3. Se ha situado una fuente en la celda (1,2), frecuencia 100.0Hz.



**Gráfica 10:** Diferencia entre los valores obtenidos para las presiones para un solo recinto y los valores obtenidos para dos recintos



**Gráfica 11:** Presiones calculadas para un solo recinto de 4x4. Se ha situado una fuente en la celda (1,2) frecuencia 100.0Hz.



**Gráfica 12:** Presiones calculadas para dos recintos de 2x4. Se ha situado una fuente en la celda (1,2) frecuencia 100.0Hz.

## CONCLUSIÓN

Se ha expuesto un método adaptado a problemas de acústica de recintos que permite de forma fácil la resolución de problemas de grandes dimensiones mediante subestructuración.

El método parte de resolver cada elemento de la subestructuración y cumplir además condiciones de continuidad. Dichas condiciones integran la continuidad en los subelementos interiores y también las condiciones en las paredes límite. El método permite conectar recintos interconectados, con material absorbente o con paredes divisorias.

La subestructuración permite además escoger el método más rápido y el que exige menos memoria siendo además muy adecuado para grandes recintos en tanto que pueden utilizarse muchos subvolumenes iguales tanto en el interior como en el contorno.

El presente método “cose” los recintos simplemente con la condición de continuidad en velocidad que será igual velocidad si la frontera es aire-aire o puede ser un escalón de velocidad si se trata de la unión entre ambos recintos con una pared. El caso de una pared no se ha tratado ni se pretende incluir de forma inmediata.

El próximo paso debe ser el desarrollo de un software que permita el cálculo en 3D.

## AGRADECIMIENTOS

Esta comunicación es parte del trabajo realizado en los proyectos de investigación I+D+i con referencias BIA 2012-36896 y BIA2014-56755-P.

## REFERENCIAS

- [1] M. Shephard, M. Beall, R. O'Bara, B. Webster, Toward simulation-based design, *Finite Elements in Analysis and Design* 40 (12) (2004) 1575–1598.
- [2] F.J. Fahy, J. Walker, *Advanced Applications in Acoustics, Noise and Vibration*, Spon Press, 2004.
- [3] W. Desmet, Mid-frequency vibro-acoustic modelling: challenges and potential solutions, in: *Proceedings of ISMA 2002*, Leuven, Belgium, 2002, pp. 835–862.
- [4] B. Pluymers, B. Van Hal, D. Vandepitte, W. Desmet, Trefftz-based methods for time-harmonic acoustics, *Archives of Computational Methods in Engineering* (2007) 343–381.
- [5] P. Salvini, F. Vivio, Dynamic reduction strategies to extend modal analysis approach at higher frequencies, *Finite Elements in Analysis and Design* 43 (2007).
- [6] M. Fischer, U. Gauger, L. Gaul, A multipole Galerkin boundary element method for acoustics, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 28 (2004) 155–162.
- [7] Y. Yasuda, T. Sakuma, Fast multipole boundary element method for largescale steady-state sound field analysis. Part II: examination of Numerical Items, *Acta Acustica united with Acustica* 89 (2003) 28–38.
- [8] C. Vanmaele, D. Vandepitte, W. Desmet, An efficient wave based prediction technique for plate bending vibrations, *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering* 196 (2007) 3179–3189.
- [9] R.A. Cullum, R.A. Willoughby, *Lanczos Algorithms for Large Symmetric Eigenvalue Computations: Theory*, Society for Industrial Mathematics, 2002.
- [10] J.K. Bennighof, M.F. Kaplan, M.B. Muller, Extending the frequency response capabilities of automated multi-level substructuring, *AIAA Journal* (AIAA2000-1574) (2000).  
P. Ragnarsson et al. / *Finite Elements in Analysis and Design* 47 (2011) 195–199
- [11] J.K. Bennighof, R.B. Lehoucq, An automated multilevel substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics, *SIAM Journal on Scientific Computing* 25 (6) (2004) 2084–2106.
- [12] R.R. Craig Jr., M.C.C. Bampton, Coupling of substructures for dynamic analyses, *AIAA Journal* 6 (7) (1968) 1313–1319.
- [13] J.K. Bennighof, M.F. Kaplan, M.B. Muller, M. Kim, Meeting the NVH computational challenge: automated multi-level substructuring, in: *Proceedings of the International Modal Analysis Conference XVIII (IMAC18)*, 2000.
- [14] J.E. Manning, Use of measured mobility to improve sea predictions in the mid-frequency range, in: *Proceedings of DETC99, 17th ASME Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, 1999.
- [15] P. Ragnarsson, B. Pluymers, S. Donders, W. Desmet, Subcomponent modelling of input parameters for statistical energy analysis by using a wave-based boundary condition, *Journal of Sound and Vibration* 329 (8) (2010) 96–108.
- [16] S. De Rosa, F. Franco, On the use of the asymptotic scaled modal analysis for timeharmonic structural analysis and for the prediction of coupling loss factors for similar systems, *Mechanical Systems and Signal Processing* 24 (2010) 455–480.
- [17] B.R. Mace, Statistical energy analysis, energy distribution models and system modes, *Journal of Sound and Vibration* 264 (2) (2003) 391–409.
- [18] S. Donders, B. Pluymers, P. Ragnarsson, R. Hadjit, W. Desmet, The wave-based substructuring approach for the efficient description of interface dynamics in substructuring, *Journal of Sound and Vibration* 329 (8) (2010) 1062–1080.

- [19] S. Donders, Computer-aided engineering methodologies for robust automotive NVH design, Ph.D. Thesis, K.U. Leuven, Department of Mechanical Engineering, Division PMA, Leuven, Belgium, February 2008, Available online: <http://hdl.handle.net/1979/1698S>.
- [20] W. Gao, X.S. Li, C. Yang, Z. Bai, An implementation and evaluation of the AMLS method for sparse eigenvalue problems, *ACM Transactions on Mathematical Software* 34 (4) (2008).
- [21] A. Kropp, D. Heiserer, Efficient broadband vibro-acoustics analysis of passenger car bodies using an fe-based component mode synthesis approach, *Journal of Computational Acoustics* 11 (2003) 1313–1319.
- [22] MSC, MD Nastran 2007, 2007.
- [23] CDH, CDH-AMLS User's Guide, 2008.
- [24] A. Deraemaeker, I. Babuska, Ph. Bouillard, Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46 (4) (1999) 471–499.