



## **ESTUDIO DE LA IMPEDANCIA DE RADIACIÓN DE UNA BOCINA EXPONENCIAL MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO**

PACS: 43.40.Yq

Pico, Rubén; Roig, Bernardino; Alba, Jesús; Camarena, Francisco; Escuder, Eva.  
Escuela Politécnica Superior de Gandia  
Ctra. Nazaret-Oliva s/n  
46700 Grau de Gandia, Valencia. España  
Tel: 962 830 000  
E-mail: rpico@fis.upv.es, broig@mat.upv.es, ,jesalba@fis.upv.es, fracafe@fis.upv.es,  
evescude@fis.upv.e

### **ABSTRACT**

Characterisation of passive acoustic elements is important in different fields of acoustics: aeronautics, musical acoustics, etc... Analytical methods provide valid results in the resolution of simple geometry problems, but they do not explain satisfactorily sound wave propagation in variable section elements such as horns

The aim of this work is the application of the Boundary Elements Method (BEM) to obtain internal pressure within an exponential horn.

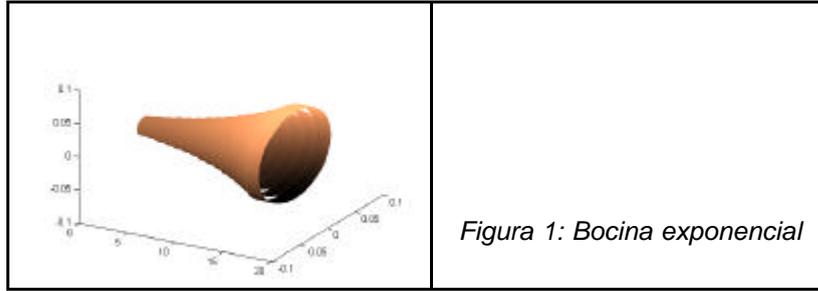
### **RESUMEN**

La caracterización de elementos acústicos pasivos es importante en diversos campos de la acústica: aeronáutica, acústica musical, etc... Los métodos analíticos proporcionan resultados válidos para problemas de geometría sencilla, pero no permiten explicar de forma satisfactoria la propagación de ondas sonoras de elementos de sección variable como las bocinas.

El objetivo de este trabajo es la aplicación del método de elementos de contorno (BEM) para la obtención de la presión en el interior de una bocina exponencial.

### **INTRODUCCIÓN**

En este trabajo se presentan algunos de los resultados obtenidos para la modelización mediante dos métodos distintos de un elemento acústico sencillo: una bocina exponencial (ver figura 1). Para este caso particular, existe una solución analítica sencilla dada por la ecuación de Webster [1] que describe en una aproximación unidimensional la propagación de las ondas sonoras en el interior de una bocina con sección transversal variable. Sin embargo, mediante esta formulación no obtenemos ninguna información sobre los modos propios que se forman en el interior de la bocina. Dadas las limitaciones de la formulación analítica, es preciso utilizar métodos de cálculo que permitan estudiar los modos de resonancia de la bocina. En este trabajo, se emplea el método de elementos de contorno con este objetivo.



Para estudiar el comportamiento acústico de esta bocina se han introducido sus características geométricas en un programa que evalúa su impedancia acústica. Con este objetivo, se ha segmentado en 15 secciones cilíndricas de igual tamaño: 1.6cm (ver figura 11). Como resultado de esta modelización podemos representar el módulo, la fase, la parte real y la parte imaginaria de la impedancia acústica de la bocina en una escala logarítmica en frecuencias.

### MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO (BEM)

El método de elementos de contorno (*Boundary Element Method: BEM*) es un método de cálculo numérico que permite obtener soluciones aproximadas de las ecuaciones de contorno integrales. En el ámbito de la acústica, usualmente se aplica a la ecuación de Helmholtz en problemas con solución armónica temporal y en medios fluidos [2].

Este método tiene un coste computacional elevado, sin embargo, con el avance de la capacidad de cálculo de los ordenadores actuales, su implantación se está desarrollando en campos en los que hasta ahora resultaba inviable. A continuación, se resumen los principios generales de la formulación del método de elementos de contorno y su aplicación al caso particular de una bocina exponencial.

### PRINCIPIOS GENERALES Y ECUACIONES FUNDAMENTALES

La ecuación de Helmholtz describe la propagación de las ondas sonoras en un medio tridimensional. En su forma diferencial presenta solución analítica para algunas problemas particulares:

$$\text{Ecuación de Helmholtz} \quad (\nabla^2 + k^2)p = 0$$

donde  $k$  es el número de onda que es  $\omega/c$  y  $c$  es la velocidad del sonido en el aire. No obstante, para los problemas con geometrías complejas resulta imposible encontrar una solución de la ecuación. Como alternativa a esta resolución, se puede analizar esta misma ecuación en una formulación integral. Para llevar a cabo este propósito, se aplica el teorema integral de Gauss a la ecuación de Helmholtz obteniendo la *ecuación integral de Helmholtz*. De esta manera, podemos resolver numéricamente cualquier problema sin más que integrar las ecuaciones:

$$cp(\vec{R}) = \int_S \left( p(\vec{R}_0) \frac{\partial G}{\partial n_0} \right) - \left( G \left| \vec{R} - \vec{R}_0 \right| \frac{\partial p}{\partial n_0} \right) dS$$

donde el coeficiente  $c$  se define como:

$$c = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{R} \text{ está en } V \\ \Omega/4\pi & \text{si } \vec{R} \text{ está en el contorno de } V \\ 0 & \text{si } \vec{R} \text{ está fuera de } V \end{cases}$$

Para el caso particular en que  $\hat{R}$  esté en el contorno,  $c$  toma un valor entre 0 y 1, que viene determinado por el ángulo sólido  $\Omega$  definido por los elementos comunes a un nodo respecto de ese nodo<sup>1</sup>.

## FORMULACIÓN BEM

La resolución numérica de la ecuación de Helmholtz implica la transformación de un sistema continuo de resolución integral en un sistema discreto mallado de resolución numérica (ver figura 2). Dicha malla está constituida de elementos definidos por varios nodos.

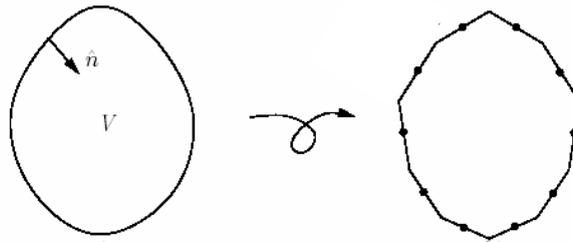


Figura 2: Transformación de un sistema discreto en dos dimensiones en uno continuo

Este proceso se lleva a cabo mediante la discretización de la ecuación integral continua de Helmholtz. De esta manera se llega a un sistema de ecuaciones a partir del cual se conocen los valores de los nodos de contorno. El contorno se divide en  $N$  elementos y la ecuación de Helmholtz discreta para cada nodo  $i$  se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$cp_i - \sum_{j=1}^N \int_{S_j} p \frac{\partial g}{\partial \hat{n}} dS = - \sum_{j=1}^N \int_{S_j} g \frac{\partial p}{\partial \hat{n}} dS$$

siendo  $S_j$  la superficie de los elementos  $j$  del contorno. Si relacionamos la presión con la velocidad normal según la ecuación de Euler, tenemos:

$$cp_i - \sum_{j=1}^N \int_{S_j} p \frac{\partial g}{\partial \hat{n}} dS = ir_0 w \sum_{j=1}^N \int_{S_j} g v dS$$

Cada nodo tiene una condición de contorno particular, ya sea un valor de presión velocidad o impedancia acústica. En el proceso de discretización el objeto de estudio se discretiza en una malla constituida por los elementos que definen su contorno. Existen diferentes tipos de elementos según su forma y sus características. En este trabajo hemos utilizado elementos constantes, en los cuales la presión y velocidad normal son constantes. Cada elemento puede tener una forma cuadrada arbitraria<sup>2</sup> y no existe limitación en la orientación del elemento en el espacio. Las ecuaciones anteriores se pueden simplificar si se expresan en forma de matrices. Definimos así:

$$H_{ij} = \int_{S_j} \frac{\partial g_i}{\partial \hat{n}} dS$$

$$G_{ij} = \int_{S_j} g_i dS$$

<sup>1</sup> Este ángulo sólido se puede calcular como la proyección de la superficie de una esfera de radio unidad centrada en el nodo que queda en el interior del volumen del problema a estudio

<sup>2</sup> La forma de los elementos condiciona la convergencia de resolución del método.

De esta manera, obtenemos finalmente la expresión matricial de la ecuación de Helmholtz para una malla de elementos de contorno,

$$Hp = ir_o w \cdot Gv$$

donde  $H$  y  $G$  son matrices  $N \times N$  y  $p$  y  $v$  son vectores de longitud  $N$ . Si conocemos los valores de  $p$  y  $v$  en el contorno, podemos determinar las matrices  $H$  y  $G$  para después evaluar el campo de presión  $p$  en cualquier punto del interior del volumen. Ésta es la originalidad y el principio básico del método de elementos de contorno.

### APLICACIÓN DE BEM EN LA MODELIZACIÓN DE UNA BOCINA EXPONENCIAL

La figura 3 muestra la malla utilizada en la modelización

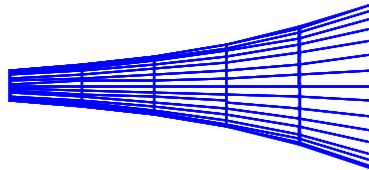


Figura 3: Malla de la bocina exponencial modelizada mediante BEM

Los datos geométricos de la bocina (apertura, radio inicial y longitud) definidos para la malla se muestran en la Tabla 1.

|               |                      |
|---------------|----------------------|
| Longitud      | 24 cm                |
| Apertura      | 14.2 m <sup>-1</sup> |
| Radio inicial | 1.25 cm              |
| Radio final   | 6.9 cm               |

Tabla 1: Características de la bocina exponencial modelizada

Como hemos visto anteriormente, el método de elementos de contorno permite evaluar el campo de presión sonora en cualquier punto del interior de la malla si se conocen las magnitudes acústicas en el contorno (velocidad, presión o impedancia). Por tanto, es preciso definir las condiciones de contorno para cada nodo de la malla. Se ha supuesto una velocidad transversal nula para los nodos que definen las paredes de la bocina ya que podemos suponer despreciable la vibración de las paredes y velocidad constante para los elementos que constituyen el cuello y la boca de la bocina

El procedimiento para evaluar la respuesta acústica del elemento modelizado mediante el método de elementos de contorno consta de dos partes:

- Pre-procesado: Se ejecuta el programa en el que se ha definido la malla. En este programa se definen las coordenadas de los elementos y los nodos y se especifica la conectividad<sup>3</sup> entre ambos.
- Procesado: Una vez definida la malla, se realiza el cálculo numérico de las ecuaciones integrales de Helmholtz para una frecuencia determinada.
- Post-procesado: Representación gráfica del campo de presión en la zona de interés para la frecuencia en la que se ha realizado el cálculo.

<sup>3</sup> La conectividad relaciona un elemento con los nodos que lo definen.

El proceso de cálculo con BEM una vez definida la malla es muy costoso, ya que conlleva la resolución de  $N$  integrales en cada uno de los nodos. Por esta razón resulta interesante aprovechar la simetría del problema (si existe) para disminuir el número de cálculos. Cada línea o plano de simetría del problema reduce el número de operaciones a calcular.

Los elementos empleados en la malla han de ser suficientemente grandes para que el resultado tenga sentido en un amplio rango de frecuencias. Si las distancias entre nodos son demasiado grandes en relación con la longitud de onda, las funciones calculadas proporcionan estimaciones muy pobres. Para elementos cuadráticos, la convergencia se obtiene si la longitud de onda es menor que 4 veces la distancia entre nodos ( $\lambda > 4d$ ), tal y como muestra la figura 4.



Figura 4: Criterio de convergencia (distancia entre nodos/longitud de onda)

En la simulación numérica de la bocina hemos aprovechado estas propiedades de simetría: dado que la geometría presenta dos planos perpendiculares de simetría, es suficiente con definir un cuadrante de la bocina. El número de elementos definidos en el eje axial se ha elegido de tal manera que la frecuencia de estudio según los criterios definidos anteriormente alcance 7000 Hz. Para obtener resultados válidos con BEM a frecuencias mayores, se deberían dividir la malla en elementos más pequeños; aunque el tiempo de cálculo será mayor.

En nuestro caso, el estudio del campo de presión se ha realizado sobre uno de los planos de simetría de la bocina. En este plano podemos observar la evolución del campo de presión en función del eje axial. Cabe destacar una limitación importante del método BEM: El cálculo es costoso y se ha de efectuar cada vez para cada frecuencia. Por esta razón, resulta conveniente tener una idea a priori de cuáles serán las frecuencias más representativas para el estudio del campo acústico. Para el estudio de la bocina exponencial, hemos realizado los cálculos a frecuencias próximas a sus frecuencias de resonancia obtenidas mediante el método de matrices de transmisión. Dicho método se basa en la modelización de elementos unidimensionales por medio de matrices de transmisión que representan las secciones cilíndricas de la bocina (ver figura 5)

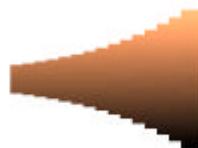


Figura 5: Fragmentación de la bocina en secciones cónicas

En la figura se representan los cálculos obtenidos para las diferentes frecuencias a estudio. El mapa de color representa el nivel de presión en escala de colores para los puntos que definen el plano de simetría  $Z=0$ .

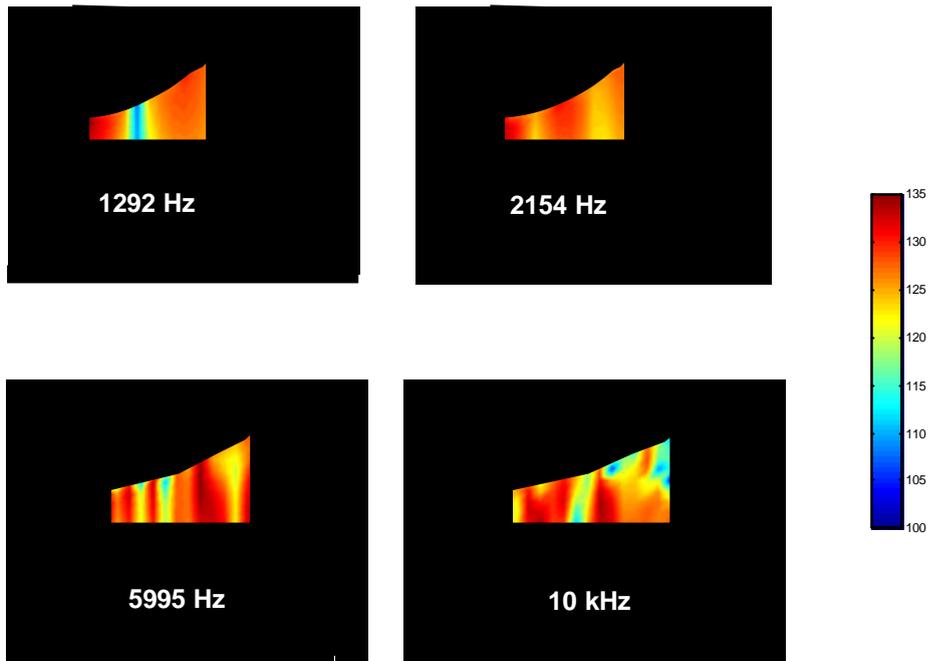


Figura 6: Resultado obtenidos para modelización mediante BEM de la bocina exponencial a diferentes frecuencias

En la figura 6 (a) se muestra el cálculo realizado a una frecuencia de 774Hz muy próxima a la frecuencia de resonancia fundamental obtenida con el método de matrices de transmisión. A esta frecuencia, el campo tiene un valor elevado en todos los puntos interiores de la bocina. No presenta nodos ni vientres.

En la figura b) se ha realizado el cálculo sobre la misma geometría, pero una frecuencia mayor. En este caso se excita el segundo modo de vibración para el que corresponde un nodo de presión. Conforme aumenta la frecuencia {c), d) y e)} se observan más nodos y vientres de presión. Los nodos y vientres cercanos a la boca de la bocina están “estirados” respecto de los próximos al cuello; esto se debe al cambio de impedancia a lo largo de la bocina a causa del aumento de su sección transversal. Por último se puede ver en la figura f) el campo calculado para una frecuencia de excitación muy elevada:  $f=10\text{kHz}$ . Cabe señalar que en este rango no se verifican las condiciones de convergencia ( $f>7000\text{Hz}$ ) y, consecuentemente, los resultados dejan de ser satisfactorios.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1.- A. H. Benade, E. V. Jansson. « On Plane and Spherical Waves in Horns with Nonuniform Flare I. Theory of Radiation, Resonance Frequencies, and Mode Conversion, *Acustica* 31(2): 80-98, 1974.
- 2.- Ciskowski, R.D; Brebbia C.A; “Boundary element methods in acoustics”, Computational mechanics publications, Elsevier Applied Science, 1991.