



SIMULACIÓN Y VISUALIZACIÓN DE LA TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN DE ONDAS EN CUERDAS

PACS: 43.10.Sv

Aramendia, E.; Vela, A.; San Martin, M.L.; San Martin, R.; Arana, M.
Departamento de Física, Universidad Publica de Navarra.
Campus de Arrosadia, s/n
31008 Pamplona. España
Tel: 34 948 169570
Fax: 34 948 169565
E-mail: marana@unavarra.es

ABSTRACT

The main objective of this work is to show how computer tools can be very useful in the assimilation of some acoustic concepts whose visualization entails difficulty. On the other hand, the versatility of the simulation with regard to the boundary conditions as well as others variables (material's properties and initial conditions) they can avoid us an expensive experimentation, either in time or in economic cost. These programs allow creating a pleasant graphic scene and they allow to model and to simulate mathematical functions varying in time and whose assimilation requires an effort that these tools can simplify.

RESUMEN

El principal objetivo de este trabajo es mostrar como algunas herramientas informáticas pueden resultar muy útiles en la asimilación de determinados conceptos acústicos de difícil visualización. Por otra parte, la versatilidad de la simulación en cuanto a la variación de condiciones de contorno y de las variables del problema (propiedades de los materiales y condiciones iniciales) nos pueden evitar una costosa experimentación, tanto en tiempo como en coste económico. Estos programas permiten crear un entorno gráfico agradable y permiten modelar, simular y animar funciones matemáticas que varían en el tiempo y cuya asimilación requiere un esfuerzo que estas herramientas pueden simplificar.

INTRODUCCION

Las modelizaciones y animaciones de funciones matemáticas con herramientas informáticas pueden ayudar a la comprensión de determinados fenómenos acústicos. Estas modelizaciones representan funciones complejas que varían en el tiempo y cuya visualización resulta compleja. Las modelizaciones y animaciones de los fenómenos permiten una inmediata visualización del fenómeno físico pudiendo centrarse posteriormente en los detalles del fenómeno acústico teniendo siempre como referencia dicha visualización.

Como ejemplo se han modelizado las ecuaciones que describen la trasmisión y la reflexión de ondas en cuerdas. Este es un claro ejemplo en el que el esfuerzo necesario para la visualización de las ecuaciones sin la ayuda de una animación es considerablemente importante. Sin embargo, una vez realizada la animación, la visualización y comprensión del fenómeno acústico es más clara. Otra forma de visualizar el fenómeno sería realizando diferentes experimentos con múltiples cuerdas de diferentes características. De todas formas existe el inconveniente de mantener unas condiciones iniciales y de contorno bien controladas; además, la velocidad de la trasmisión puede dificultar la visualización. Otro de los inconvenientes de los experimentos físicos es la poca versatilidad de estos a cambios de condiciones iniciales y de frontera. Una modelización bien realizada nos permite cambiar cualquiera de las variables de forma inmediata y evaluar y visualizar los resultados de forma rápida. En otros casos, como son los fenómenos de transmisión sonora en aire y reflexión y transmisión sonora entre medios, la visualización mediante experiencias físicas resulta prácticamente imposible.

TRASMISIÓN Y REFLEXIÓN DE ONDAS EN CUERDAS. ASPECTOS TEÓRICOS

A continuación se muestran las ecuaciones y condiciones de contorno que definen la trasmisión de ondas en cuerdas [1] [2]. En los siguientes apartados se explicará el proceso realizado en la utilización de las herramientas informáticas para la mejor comprensión del fenómeno físico. La teoría de trasmisión y reflexión de ondas en cuerdas la hemos dividido en dos apartados:

1. Reflexión y trasmisión de ondas armónicas en cuerdas:

La solución armónica para la onda incidente en el medio 1 es:

$$y_i(x,t) = y_{oi} \cdot \text{sen}(\omega t - k_1 x) \quad (1)$$

La solución armónica para la onda reflejada en el medio 1 es:

$$y_r(x,t) = y_{or} \cdot \text{sen}(\omega t - k_1 x) \quad (2)$$

La solución armónica para la onda transmitida en el medio 2 es:

$$y_t(x,t) = y_{ot} \cdot \text{sen}(\omega t - k_2 x) \quad (3)$$

Como es bien sabido, la frecuencia no se modifica en los procesos de reflexión y trasmisión, pero sí el número de onda (y, consiguientemente, la longitud de onda) al cambiar la velocidad de propagación en el medio 2.

Las dos condiciones de frontera que han de cumplirse en el punto de unión ($x=0$) son: en primer lugar, el desplazamiento del punto $x=0$ ha de ser idéntico evaluado desde la cuerda 1 y desde la cuerda 2, si ambas cuerdas han de seguir en contacto en dicho punto. En segundo lugar las fuerzas verticales ejercidas desde cada cuerda sobre el punto de unión deben ser iguales y opuestas pues, en caso contrario, un elemento diferencial de masa en dicho contacto adquiriría una aceleración infinita.

Estas condiciones nos permiten calcular los coeficientes de reflexión y trasmisión de amplitud de desplazamiento definidos por:

$$R_y = \frac{y_{or}}{y_{oi}} \quad \text{y} \quad T_y = \frac{y_{ot}}{y_{oi}} \quad (4)$$

Dando como resultado:

$$R_y = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} = \frac{\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2} + \sqrt{m_1}} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \quad (5)$$

$$T_y = \frac{2c_2}{c_2 + c_1} = \frac{2\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_2} + \sqrt{m_1}} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \quad (6)$$

donde c_1 y c_2 son, respectivamente, las velocidades de propagación de las ondas en las cuerdas 1 y 2. m_1 y m_2 son, respectivamente, las densidades lineales de masa en las cuerdas 1 y 2. Finalmente, z_1 y z_2 son, respectivamente, las impedancias de las cuerdas 1 y 2, consideradas ambas de longitud infinita.

2. Reflexión y transmisión de pulsos en cuerdas:

Las ecuaciones que rigen la transmisión y reflexión de ondas en cuerdas, considerando en este caso como función de onda una función periódica cuya composición espectral es arbitraria, se expresan a continuación.

La perturbación incidente se expresa según:

$$y_i = f_i\left(t - \frac{x}{c_1}\right) \quad (7)$$

De forma análoga para la perturbación reflejada y transmitida:

$$y_r = f_r\left(t - \frac{x}{c_1}\right) \quad y_t = f_t\left(t - \frac{x}{c_2}\right) \quad (8)$$

Las condiciones de frontera son análogas a las expuestas en la transmisión y reflexión de ondas armónicas. Resolviendo obtenemos:

$$R_y = \frac{f_r(t)}{f_i(t)} = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} \quad T_y = \frac{f_t(t)}{f_i(t)} = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} \quad (9)$$

Estos resultados coinciden con los obtenidos para ondas armónicas. Sin embargo, tales resultados generalizan los valores obtenidos para los coeficientes de reflexión y transmisión para cualquier composición espectral de la onda incidente.

PROGRAMAS INFORMÁTICOS UTILIZADOS:

MATHEMATICA 4

Mathematica 4 [3] es un paquete informático de matemáticas aplicadas con múltiples funciones. Resulta enormemente útil para resolver problemas de ingeniería. En lo que a esta comunicación respecta, Mathematica es un programa informático que permite realizar animaciones gráficas. También permite la posterior exportación de las animaciones en formato HTML. Cada frame correspondiente a la animación es un fichero tipo .gif que se guarda en una carpeta con todas las imágenes correspondientes al archivo exportado. El programa es muy parecido al Matlab. En temas gráficos, animaciones, exportación de animaciones y funciones de sonido el Mathematica resulta un programa más cómodo y eficiente que el Matlab.

GIF MOVIE GEAR

Una vez se tienen las imágenes correspondientes a la animación, hay que realizar la animación (Gif animado) con algún programa que nos permita realizar estas animaciones. Existen múltiples

programas que nos permiten realizar los gifs animados, algunos de ellos gratuitos. En la página de trasmisión y reflexión de ondas en cuerdas se ha utilizado el Gif Movie Gear [4].

MACROMEDIA DREAMWEAVER MX

Este es el programa más utilizado para la creación de paginas webs [5]. Aunque el propósito no era el de colgar la página en la red se utilizó el lenguaje HTML por varias razones. HTML es el lenguaje más estandarizado en visualizaciones gráficas en ordenador, internet es el medio del futuro en la trasmisión de todo tipo de información y HTML es el lenguaje de programación más utilizado en la red de redes.

PHOTOSHOP

Este es sin duda el programa de edición gráfica más utilizado, y probablemente el mejor que existe en la actualidad [6]. Con este programa existe la posibilidad de realizar Gifs Animados. El programa funciona por capas. El programa se utilizo para (a partir de un dibujo esquemático de una mano y una cuerda) modificarlo para tener 3 dibujos esquemáticos que representen tres casos diferentes de propagación de ondas en cuerdas: extremo de masa m, extremo libre y extremo fijo.

ESQUEMA DE LA PÁGINA

La página esta dividida en dos partes. En la primera parte existe una introducción y un fundamento teórico sobre la reflexión y trasmisión de ondas en cuerdas. En la segunda parte se representan las animaciones para 4 situaciones diferentes que nos permiten visualizar los diferentes factores que influyen en la trasmisión y reflexión de ondas. Se incluyen 16 animaciones, 8 para ondas armónicas y 8 para pulsos. Cada 8 animaciones se corresponden con 4 situaciones diferentes. Una en la que la cuerda donde se propaga la onda incidente tiene con respecto a la transmitida el cuádruplo de densidad lineal. Otra en la que es la transmitida la que tiene el cuádruplo de densidad lineal con respecto a la cuerda donde se propaga la onda incidente. Se añaden dos casos extremos; uno en el que la cuerda de la derecha tiene masa infinita y otra situación en la que dicha cuerda tiene masa cero, es decir, extremo libre. Cada situación descrita tiene dos animaciones una en la que se ven simultáneamente la onda incidente, reflejada y transmitida y otra en la que se ve la onda resultante (incidente + reflejada) y transmitida.

ANIMACIONES

4.1. ONDAS ARMÓNICAS.

SITUACIÓN A:



_: Onda incidente
_: Onda reflejada.
_: Onda transmitida.



_: Onda resultante = Incidente + Reflejada y transmitida.

- **CONSIDERAREMOS DOS CASOS.** En el primero de ellos (a), la cuerda 1 es de cuádruple densidad lineal másica que la de la cuerda 2. es decir, $\mu_1 = 4\mu_2$. En el segundo caso (b), la cuerda 2 posee una densidad lineal másica cuádruplo que la correspondiente a la cuerda 1. es decir, $\mu_1 = \mu_2/4$. tendremos:
- **Situación a):**

$$\mu_1 = 4 \cdot \mu_2 \Rightarrow C_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{T}{4 \cdot \mu_2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} = \frac{1}{2} C_2$$

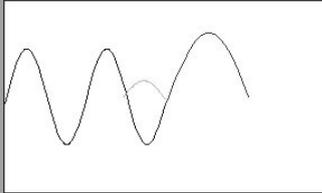
$$C = f \cdot \lambda \Rightarrow \lambda_1 = \frac{C_1}{f} = \frac{1}{2} \frac{C_2}{f} = \frac{1}{2} \frac{C_2}{f} = \frac{1}{2} \lambda_2$$

Así pues, tanto la longitud de onda como la velocidad de propagación en el medio 2 duplican los valores correspondientes del medio 1.

- Utilizando los coeficientes de reflexión y trasmisión de amplitud de desplazamiento

4.1. ONDAS ARMÓNICAS.

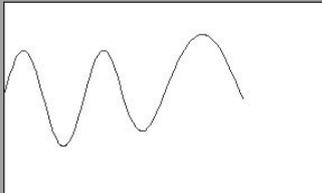
SITUACIÓN A:



_: Onda incidente

_: Onda reflejada.

_: Onda transmitida.



_: Onda resultante = Incidente + Reflejada y transmitida.

- **CONSIDERAREMOS DOS CASOS.** En el primero de ellos (a), la cuerda 1 es de cuádruple densidad lineal másica que la de la cuerda 2. es decir, $\mu_1 = 4\mu_2$. En el segundo caso (b), la cuerda 2 posee una densidad lineal másica cuádruplo que la correspondiente a la cuerda 1. es decir, $\mu_1 = \mu_2/4$. tendremos:

- **Situación a):**

$$\mu_1 = 4 \cdot \mu_2 \Rightarrow C_1 = \frac{T}{\mu_1} = \frac{T}{4 \cdot \mu_2} = \frac{1}{4} \frac{T}{\mu_2} = \frac{1}{2} C_2$$

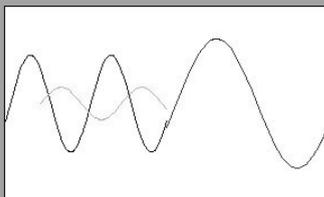
$$C = f \cdot \lambda \Rightarrow \lambda_1 = \frac{C_1}{f} = \frac{\frac{1}{2} C_2}{f} = \frac{1}{2} \frac{C_2}{f} = \frac{1}{2} \lambda_2$$

Así pues, tanto la longitud de onda como la velocidad de propagación en el medio 2 duplican los valores correspondientes del medio 1.

- Utilizando los coeficientes de reflexión y transmisión de amplitud de desplazamiento

4.1. ONDAS ARMÓNICAS.

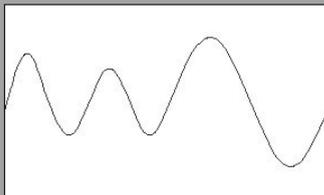
SITUACIÓN A:



_: Onda incidente

_: Onda reflejada.

_: Onda transmitida.



_: Onda resultante = Incidente + Reflejada y transmitida.

- **CONSIDERAREMOS DOS CASOS.** En el primero de ellos (a), la cuerda 1 es de cuádruple densidad lineal másica que la de la cuerda 2. es decir, $\mu_1 = 4\mu_2$. En el segundo caso (b), la cuerda 2 posee una densidad lineal másica cuádruplo que la correspondiente a la cuerda 1. es decir, $\mu_1 = \mu_2/4$. tendremos:

- **Situación a):**

$$\mu_1 = 4 \cdot \mu_2 \Rightarrow C_1 = \frac{T}{\mu_1} = \frac{T}{4 \cdot \mu_2} = \frac{1}{4} \frac{T}{\mu_2} = \frac{1}{2} C_2$$

$$C = f \cdot \lambda \Rightarrow \lambda_1 = \frac{C_1}{f} = \frac{\frac{1}{2} C_2}{f} = \frac{1}{2} \frac{C_2}{f} = \frac{1}{2} \lambda_2$$

Así pues, tanto la longitud de onda como la velocidad de propagación en el medio 2 duplican los valores correspondientes del medio 1.

- Utilizando los coeficientes de reflexión y transmisión de amplitud de desplazamiento

CONCLUSIÓN

Esta primera incursión, por nuestra parte, en las posibilidades que ofrecen las técnicas computacionales y las herramientas multimedia para el apoyo docente, ha resultado satisfactoria. Si bien la modelización del fenómeno físico no lo es respecto a la propagación sonora en el medio aéreo (aspecto que nos motivó para preparar estas páginas y reto que mantenemos abierto) sí lo es en una fuente sonora de gran importancia en la generación de sonidos musicales. La respuesta obtenida por parte de los primeros usuarios es que las animaciones programadas ayudan a comprender el fenómeno físico, junto con los conceptos que involucran.

REFERENCIAS

- [1] L.E. Kinsler; A.R. Frey; A.B. Coppens; J.V. Sanders. *Fundamentos de Acústica* Ed. Limusa. 1988
- [2] Frank S. Crawford, Jr.; *Ondas*. Berkeley Physics Course. Ed. Reverté, Barcelona. 1991.
- [3] Mathematica 4. © Copyright 1988-1999 Wolfram Research.
- [4] Gif Movie Gear. © Copyright 1996- 2000 Gamani Productions.
- [5] Macromedia Dreamweaver Mx. © Copyright 1997- 2002 Macromedia.
- [6] PhotoShop. © Copyright 1990- 2002 Adobe Systems Incorporated.