



## **MEDIDA DE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS DE MADERAS DENSAS POR MÉTODOS ULTRASÓNICOS**

PACS: 43.35.Cg

Pico, Rubén; Camarena, Francisco; Escuder, Eva; Peñafiel, José Manuel.

Escuela Politécnica Superior de Gandía

Crta. Nazaret-Oliva s/n

46700 Grau de Gandía. Valencia. España

Tel: 962 830 000

E-mail: rpico@fis.upv.es, fracafe@fis.upv.es, evescude@fis.upv.es, jopegar@epsg.upv.es

### **ABSTRACT**

Elastic constants of a material determine sound wave propagation inside it. Wood is an orthotropic material, which means that it can be characterized by 9 elastic constants. The aim of this work is to validate a measurement method of these constants by means of longitudinal ultrasound propagation waves. For this, impulse-Echo-technique is used in order to measure the time of flight of ultrasound pulses in different propagation directions.

### **RESUMEN**

Las constantes elásticas de un material determinan las propiedades de propagación de las ondas sonoras a través del mismo. La madera es un material ortotrópico, lo cual significa que puede ser caracterizada por medio de 9 constantes elásticas. El objetivo de este trabajo es validar un método de medida de dichas constantes por medio de la propagación de ondas ultrasonoras de tipo longitudinal. Para ello, se emplea la técnica eco-impulso para medir el tiempo de vuelo de pulsos ultrasonoros en diferentes direcciones de propagación.

### **INTRODUCCIÓN**

El caso más simple de simetría elástica es la isotópica. Un material isotrópico es aquel para el cual ciertas propiedades físicas y mecánicas son las mismas en todas las direcciones del espacio. En particular, la propagación de las ondas sonoras no depende de la dirección del espacio en el interior de los materiales isotrópicos. Dado que la madera es un material formado por fibras orientadas en una misma dirección es un material anisótropo; lo cual significa que las características de las ondas sonoras son diferentes según sea la dirección de propagación. En particular, la madera es un material de tipo ortotrópico y sus propiedades de simetría pueden ser descritas por medio de nueve constantes independientes llamadas constantes elásticas.

### **CONSTANTES ELÁSTICAS**

La ley de Hooke generalizada describe el comportamiento elástico de un material anisótropo cualquiera:

$$[\sigma_{ij}] = [C_{ijkl}] [e_{kl}]$$

donde  $i, j, k, l = 1, 2$  y  $3$  y los elementos del tensor  $[C]$  son los coeficientes de proporcionalidad entre la tensión  $\sigma_{ij}$  y la deformación  $e_{kl}$ . Estos coeficientes se denominan constantes elásticas y describen las propiedades elásticas características de cada material. Se puede demostrar por propiedades de simetría que los  $3^4=81$  coeficientes de elasticidad del tensor  $[C]$  se reducen a 9 en el caso de la madera, o incluso a 5 en algunas especies particulares de madera (isotropía transversal)

Con esta notación,  $\sigma_{ij}$  hace referencia al esfuerzo realizado en la cara perpendicular al vector  $i$ , en la dirección  $j$ . De forma análoga,  $e_{kl}$  se refiere a la deformación producida como efecto del esfuerzo anterior sobre la cara perpendicular al vector  $k$  en la dirección  $l$ . La figura muestra el caso particular de la deformación  $e_{33}$  y el esfuerzo  $\sigma_{13}$ .

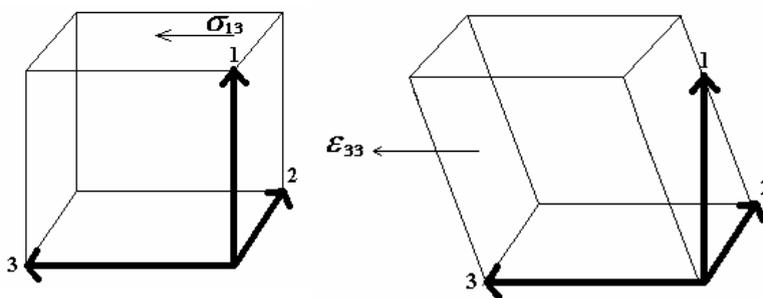


Figura 1: Representación vectorial del esfuerzo  $\sigma_{13}$  aplicado sobre un material anisótropo y la deformación  $e_{33}$

Como hemos visto, las constantes elásticas forman un tensor de cuarto grado. Usualmente esta notación general  $[C_{ijkl}]$  de cuatro subíndices se simplifica y se escribe como  $[C_{ij}]$  con dos subíndices. De esta manera, los coeficientes se pueden representar en forma de una matriz de dos dimensiones. Esto es sólo una representación ya que la mencionada matriz no posee las propiedades algebraicas de las matrices como la suma, el producto, etc. Para pasar de los cuatro términos  $i, j, k, l$  a los dos términos  $i, j$  hay unas equivalencias dos a dos de forma que los términos  $i, j$  forman  $i$  y los términos  $j, k$  forman  $j$ . Las equivalencias entre los subíndices es la siguiente. En esta notación se asigna un valor entre 1 y 6 al primer y segundo par de elementos del tensor según la regla indicada por la tabla:

Tensor	Matriz
1 1	1
2 2	2
3 3	3
2 3	4
1 3	5
1 2	6

Tabla 1: Equivalencia de la representación matricial del tensor de elasticidades

Con esta notación, el elemento  $C_{1122}$  por ejemplo, se escribe  $C_{12}$  y el elemento  $C_{1213}$  se escribe  $C_{65}$ . Se puede demostrar, a partir de las propiedades de simetría que, para cualquier material,  $C_{ij}=C_{ji}$  en la representación matricial.

De esta manera, las propiedades de los materiales ortotrópicos se pueden ahora representar en forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ & C_{22} & C_{23} & & & \\ & & C_{22} & & & \\ & & & (C_{11}-C_{12})/2 & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{55} \end{pmatrix}$$

Los elementos que no se representan en la matriz son nulos. Las 9 constantes independientes de los materiales ortotrópicos están relacionadas con los parámetros elásticos del material (módulos de Young, de Poisson y de Cizalla). En esta representación, el eje  $X_1$  se ha elegido según la dirección de crecimiento del árbol,  $X_2$  y  $X_3$  son ejes perpendiculares a  $X_1$

### ECUACIÓN DE CHRISTOFFEL

La ecuación de Christoffel relaciona las constantes elásticas con las velocidades de propagación de ondas elásticas según las diferentes direcciones de los ejes principales:

$$|C_{ijkl}n_i n_j - d_{ik} r V^2| = 0$$

donde  $\mathbf{n}=(n_i, n_j, n_k)$  es el vector unitario cuya dirección viene determinada por la dirección de propagación de las ondas,  $r$  es la densidad del medio y  $d_{ik}$  es la Delta de Kronecker. Al resolver este determinante obtenemos la relación entre la velocidad de propagación en la dirección  $\mathbf{n}$  y las propiedades elásticas y mecánicas del material.

Para los materiales ortotrópicos como la madera, la velocidad de propagación de las ondas longitudinales y transversales en los ejes principales depende de la densidad, de la dirección de propagación y de las diferentes constantes elásticas (ver Tabla 1)

Dirección de propagación	Vector director	Tipo de onda	Velocidad
$X_1$	$n_1=1$	L	$v_{11} = \sqrt{C_{11}/r}$
	$n_2=0$	T	$v_{66} = \sqrt{C_{66}/r}$
	$n_3=1$	T	$v_{55} = \sqrt{C_{55}/r}$
$X_2$	$n_1=0$	T	$v_{66} = \sqrt{C_{66}/r}$
	$n_2=1$	L	$v_{22} = \sqrt{C_{22}/r}$
	$n_3=0$	T	$v_{44} = \sqrt{C_{44}/r}$
$X_3$	$n_1=0$	T	$v_{55} = \sqrt{C_{55}/r}$
	$n_2=0$	T	$v_{44} = \sqrt{C_{44}/r}$
	$n_3=1$	L	$v_{33} = \sqrt{C_{33}/r}$

Tabla 2: Velocidades de las ondas longitudinales y transversales en los ejes principales de un material ortotrópico

Según muestra la tabla, la medida de la velocidad de propagación de las ondas sonoras en diferentes direcciones del espacio, y la densidad de la madera, podemos determinar sus constantes elásticas y, por tanto, caracterizar sus propiedades elásticas estáticas. En cada dirección del eje se propagará una onda longitudinal y dos ondas transversales. La propagación fuera de los ejes principales es más complicada ya que las ondas que se propagan en este caso son una transversal pura, una cuasilongitudinal, y otra cuasitransversal en cada uno de los tres planos. Así pues se pueden expresar las tres constantes de fuera del

eje en función del ángulo de propagación, de la velocidad, y de las constantes  $C_{ij}$  de la siguiente manera:

$$C_{12} = (n_1 \cdot n_2)^{-1} [(C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 - pV^2)(C_{66}n_1^2 + C_{22}n_2^2 - pV^2)]^{1/2} - C_{66}$$

Donde  $n_1 = \cos \alpha$  y  $n_2 = \sin \alpha$ , y  $n_3 = 0$  ya que las ondas se propagan dentro del plano formado por los ejes  $X_1$  y  $X_2$ .

$$C_{13} = (n_1 \cdot n_3)^{-1} [(C_{11}n_1^2 + C_{55}n_3^2 - pV^2)(C_{55}n_1^2 + C_{33}n_3^2 - pV^2)]^{1/2} - C_{55}$$

$$C_{23} = (n_2 \cdot n_3)^{-1} [(C_{22}n_2^2 + C_{44}n_3^2 - pV^2)(C_{44}n_2^2 + C_{33}n_3^2 - pV^2)]^{1/2} - C_{44}$$

## MÉTODO DE MEDIDA

Este método es el utilizado para realizar las medidas de velocidad de propagación de ondas ultrasónicas. Se basa en captar mediante un receptor, situado en el mismo lado que el emisor, el haz de ultrasonidos reflejado en las paredes de la pieza y en los eventuales defectos. Medimos en un osciloscopio el tiempo que se tarda en recibir el eco (tiempo de vuelo) y el espesor de la pieza, de tal manera que podemos calcular la velocidad de propagación de la onda en el interior del material. La sensibilidad del método depende de las frecuencias de la señal empleada para la inspección de la pieza.

En nuestro caso, las medidas se realizaron con un único emisor y receptor Panametrics funcionando a una frecuencia de trabajo de 1 MHz. En la realización de las medidas se debe tener presente que el haz de ultrasonidos recorre el doble de distancia hasta recibir el eco y, por tanto, se necesitan muestras suficientemente pequeñas para compensar la atenuación de las ondas ultrasonoras. Esta configuración de medida método con un transductor recibe también el nombre de eco-impulso.

En este estudio se han contrastado los valores medidos para dos tipos de madera: ébano y nogal. Los resultados de las medidas de la velocidad de propagación de las ondas sonoras en el plano  $X_1$ - $X_2$  para el ébano se muestran en las figuras en un diagrama polar de velocidades. En el primero de ellos se puede ver que la velocidad máxima  $v=2020$  m/s corresponde a  $0^\circ$  (y  $180^\circ$ ) y la mínima se produce a  $60^\circ$  en  $v=1600$  m/s. La variación de velocidad debido a la dirección es, por tanto superior al 20%, lo cual pone en evidencia que la madera es fuertemente anisotrópica. Cabe destacar que de las medidas y la representación gráfica existe una simetría puntual respecto del centro de referencia propia de los materiales anisótropos.

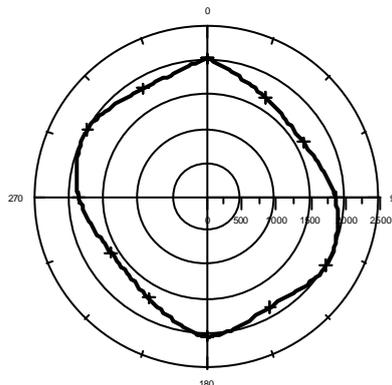


Figura 2: Superficie de velocidades del ébano en el plano  $X_1$ - $X_2$

La misma representación para el nogal (ver figura 3), muestra una dependencia mayor de la velocidad con la dirección de propagación (superior al 35%). En este caso, la distribución angular de la superficie de velocidades es de tal manera que el máximo local de velocidad se presenta en  $90^\circ$  (y  $270^\circ$ ) y es mucho menor que el máximo principal en  $0^\circ$  (y  $180^\circ$ ).

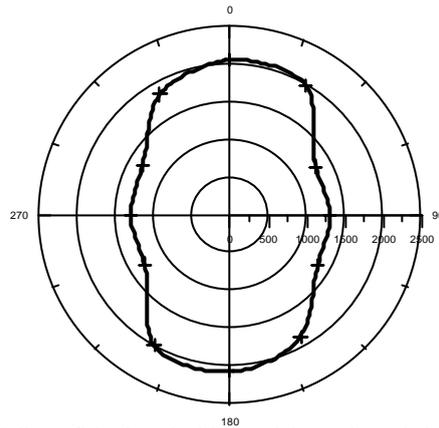


Figura 3:Superficie de velocidades del nogal en el plano  $X_1-X_2$

Las medidas realizadas para el ébano en el plano  $X_1-X_3$  se muestran en la figura 4. Se puede destacar que los mínimos de velocidad son mas pronunciados que en el caso anterior.

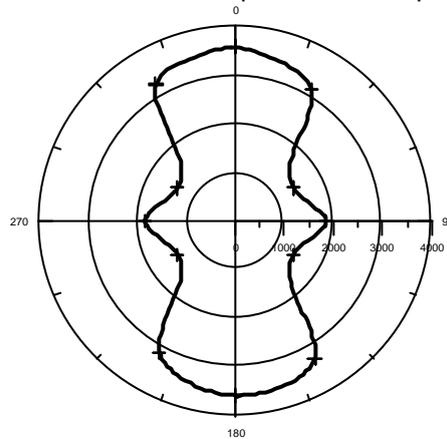


Figura 4:Superficie de velocidades del ébano en el plano  $X_1-X_3$

La representación análoga para el nogal muestra un perfil de velocidades más suave y, por tanto, una anisotropía menos pronunciada.

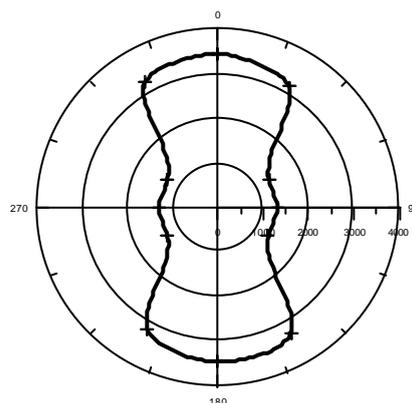


Figura 5:Superficie de velocidades del nogal en el plano  $X_1-X_3$

Como se explicó anteriormente, a partir de las medidas de la velocidad de propagación en diferentes direcciones, se pueden deducir las constantes elásticas del material. En la tabla se pueden comparar los valores de las constantes elásticas principales para ambas maderas (ébano y nogal).

	<b>C11</b>	<b>C22</b>	<b>C33</b>
--	------------	------------	------------

	(10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup> )	(10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup> )	(10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup> )
Ébano	240 ± 30	56 ± 6	48 ± 6
Nogal	100 ± 15	24 ± 3	12 ± 1

De la tabla se puede ver que tanto para el ébano como para el nogal, la constante  $G_1$  es mucho mayor que las otras dos constantes elásticas principales.  $C_{11}$  está relacionada con las propiedades elásticas de la madera en el eje de crecimiento del árbol. De este hecho se deduce que dicha dirección determina una fuerte anisotropía de la madera para la propagación de las ondas sonoras. Las otras dos constantes elásticas ( $C_{22}$  y  $C_{33}$ ) tienen valores similares. Por esta razón, la anisotropía en el plano  $X_2$ - $X_3$  es menos significativa.

## BIBLIOGRAFÍA

- Bucur, V, "Acoustics of wood", CRC Press, Inc., 1995 USA.
- Raquel Gonçalves R., Teixeira C.; "Influence of knots on velocity of ultrasonic waves in wood" Agribuilding 2001, 6 septiembre 2001.