

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA PROPAGACIÓN ACÚSTICA CON MÉTODOS EXPONENCIALES

PACS: 43.25.+y

Ramos Sobrados, Juan Ignacio<sup>1</sup>; Nava Baro, Enrique<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación. Escuela de las Ingenierías.  
Campus de Teatinos, Universidad de Málaga. 29071 Málaga (España).

E-mail: [jirs@lcc.uma.es](mailto:jirs@lcc.uma.es).

<sup>2</sup>Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. ETSI de Telecomunicación.

Campus de Teatinos, Universidad de Málaga. 29071 Málaga (España).

Teléfono: +34 952 131 188

E-mail: [en@uma.es](mailto:en@uma.es)

### ABSTRACT

This paper presents a numerical model for the analysis of acoustic wave propagation problems in non-homogeneous and non-isotropic building materials. The model uses a finite differences time domain (FDTD) method of second or four order in space and exponential in time. It can be applied to two- and three-dimensional problems or factorization of operators. With the proposed scheme, a higher accuracy and better resolution can be obtained whenever time gradients are high, in comparison with other methods. The accuracy of this method has been tested by comparison with the analytical solution of simple wave propagation problems, in one- and two-dimensional problems, with critical, subcritical and supercritical damping.

### RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo numérico para el estudio de fenómenos de propagación acústica en materiales no homogéneos y no isotrópicos empleados en construcción, utilizando una formulación en diferencias finitas de segundo y cuarto orden en espacio, así como métodos exponenciales en tiempo. En problemas bi y tridimensionales se ha empleado una factorización en función de operadores unidimensionales. Con la formulación propuesta se consigue una mayor precisión y una resolución más precisa cuando los gradientes temporales son elevados que con otros métodos. La exactitud de estos métodos se ha verificado comparando con soluciones analíticas en una y dos dimensiones y con amortiguamiento crítico, subcrítico y supercrítico.

### INTRODUCCIÓN

En el estudio de los materiales utilizados en construcción se ha recurrido fundamentalmente al uso de métodos de elementos finitos y de elementos de contorno y, en ocasiones, a combinaciones de ambos. El método de los elementos finitos permite la resolución eficiente de problemas lineales con geometrías muy complejas y suele utilizarse en problemas donde la propagación está confinada al dominio de la simulación [1]. Por el contrario, el método de los

elementos de contorno es muy adecuado para problemas homogéneos e isótropos en problemas abiertos o en los que el dominio donde se estudia la propagación es muy grande [2].

El análisis de las características acústicas de nuevos materiales y su comportamiento requiere de la utilización de métodos numéricos capaces de predecir la propagación de ondas en medios que comportan geometrías complejas, medios anisótropos y, en ocasiones, no lineales. Es en este tipo de problemas donde una formulación de diferencias finitas en el dominio del tiempo puede ser ventajosa, ya que su coste computacional suele ser mayor que con los métodos descritos anteriormente.

## FORMULACIÓN MATEMÁTICA

### Planteamiento del problema

En este trabajo se considera la ecuación hiperbólica unidimensional

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S(u, x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

donde  $t$  representa el tiempo,  $x$  es la coordenada espacial,  $\tau$ ,  $a$  y  $b$  son constantes positivas y  $S(u, x, t)$  representa una fuente no lineal, o bien un término de reacción. La ecuación (1) es hiperbólica de segundo orden cuando  $b\tau > 0$  y parabólica cuando  $\tau = 0$ . En los problemas relacionados con la acústica, se asumirá que  $\tau > 0$ .

### Métodos de diferencias finitas FDTD

Aplicando una linealización en el tiempo, la ecuación (1) puede discretizarse como

$$\frac{\tau}{k^2} (u^{n+2} - 2u^{n+1} + u^n) + \frac{a\theta}{k} (u^{n+2} - u^{n+1}) + \frac{a(1-\theta)}{k} (u^{n+1} - u^n) = (1-\theta)((1-\beta)D^n + \beta D^{n+1} + (1-\mu)S^n + \mu S^{n+1}) + \theta((1-\beta)D^{n+1} + \beta D^{n+2} + (1-\mu)S^{n+1} + \mu S^{n+2})$$

donde  $k$  representa el escalón de tiempo,  $\theta$ ,  $\beta$  y  $\mu$  son parámetros implícitos, cuyo valor varía entre 0 y 1, y el término de difusión, que contiene la segunda derivada espacial se ha denominado como  $D^n$ . Los superíndices ( $n$ ) indican el valor de la solución  $u$  en el tiempo  $nk$ , así por ejemplo  $u^{n+1}$  representa el valor de  $u$  en el instante de tiempo  $t^{n+1} = (n+1)k$ .

Se trata de un esquema de diferencias finitas que permite la utilización de métodos implícitos y explícitos cuya precisión y estabilidad ha sido mostrada en [3] y ofrece buenos resultados incluso con mallas con  $h$  y  $k$  no demasiado pequeños. Una ventaja importante de la linealización en el tiempo es la posibilidad de factorización espacial, con lo que la extensión del método descrito a problemas de propagación de ondas en 2 o 3 dimensiones es muy sencilla, sin necesidad de definir un esquema de diferencias específico. Esto permite evaluar la precisión y estabilidad del método en una dimensión antes de abordar problemas más costosos desde el punto de vista computacional y predecir su comportamiento numérico.

En problemas acústicos en los que se esperan transiciones o en los que la evolución temporal de la solución presenta decaimientos muy rápidos, la utilización de un modelo exponencial puede ser muy ventajosa computacionalmente, permitiendo una elevada precisión con mallas moderadamente gruesas. La integración espacial, asimismo, puede realizarse mediante el uso de diferencias estándares de tres puntos, operadores compactos o técnicas exponenciales [4,5].

La formulación exponencial en el tiempo del problema descrito por la ecuación (1) se basa en reescribir dicha ecuación como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} e^{\frac{a}{\tau}(t-t^n)} \right) = \frac{1}{\tau} e^{\frac{a}{\tau}(t-t^n)} F, \quad t^{n-1} \leq t \leq t^{n+1}$$

donde se ha denominado  $F$  a los términos de la derecha de la ecuación (1). Integrando con respecto al tiempo, se obtiene el esquema en diferencias

$$u^{n+1} - \left( 1 + e^{-\frac{a}{\tau}\Delta t} \right) u^n + e^{-\frac{a}{\tau}\Delta t} u^{n-1} = Q^{n+1} + e^{-\frac{a}{\tau}\Delta t} Q^{n-1}$$

donde el término  $Q$  implica una integral que incluye el término de reacción difusión  $F$  en el intervalo de tiempo  $t^{n-1} \leq t \leq t^{n+1}$ , que puede realizarse analíticamente o con técnicas de cuadratura.

## RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES

En las figuras 1 a 6 se presentan los resultados obtenidos con algunas simulaciones, con comportamientos subcrítico, crítico y supercrítico, variando el escalón de tiempo  $k$ . Los parámetros utilizados son:  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $S=0$ ,  $h=0.025$ . Las condiciones iniciales utilizadas son:

$$u_0 = \sin \pi x, \quad \dot{u}_0 = 0$$

Este problema, que se corresponde con el de la cuerda vibrante con amortiguamiento (definido por el parámetro  $a$ ), tiene solución analítica, por lo que puede utilizarse para verificar la estabilidad y precisión del esquema de diferencias finitas propuesto.

La figura 1 muestra el comportamiento subcrítico, en el que la señal tiene una fuerte amortiguación. La gráfica superior izquierda muestra las soluciones numérica (color rojo) y analítica (color azul) en el punto  $x=0.5$ , central de la cuerda, que es donde el error cometido es máximo (caso peor). Puede apreciarse que la evolución muestra una caída exponencial y que el error es muy reducido para mallas de 41 puntos y un escalón temporal de  $k=0.005$ . En la gráfica superior derecha se muestra la diferencia entre ambas curvas y puede apreciarse que el error es mayor en el transitorio, debido a que se han puesto condiciones iniciales muy desfavorables, y se reduce rápidamente con  $t$ . La gráfica inferior izquierda muestra la propagación en función del tiempo y puede apreciarse que la solución tiene un máximo en el punto central  $x=0.5$ , que decrece en el tiempo según la evolución descrita por la curva superior izquierda. En la última gráfica, inferior derecha, se muestra el error absoluto cometido y puede verse que no se aprecian oscilaciones en la solución. La figura 2 es similar a la figura 1, salvo que se ha aumentado el escalón de tiempo al doble ( $k=0.01$ ), por lo que la precisión del método disminuye y se puede apreciar mejor que el máximo error se produce en el transitorio inicial, pero desaparece rápidamente.

Las figuras 3 y 4 son similares a las anteriores, pero muestran la propagación acústica en condiciones de amortiguamiento crítico, que suelen ser muy problemáticas para la mayoría de los métodos numéricos. En las gráficas puede apreciarse que el error es siempre reducido y que su valor máximo se produce en el punto central  $x=0.5$ , pero tras un tiempo algo mayor que en el caso de propagación subcrítica. La reducción del escalón de tiempo aumenta el error cometido, pero el comportamiento cualitativo es similar.

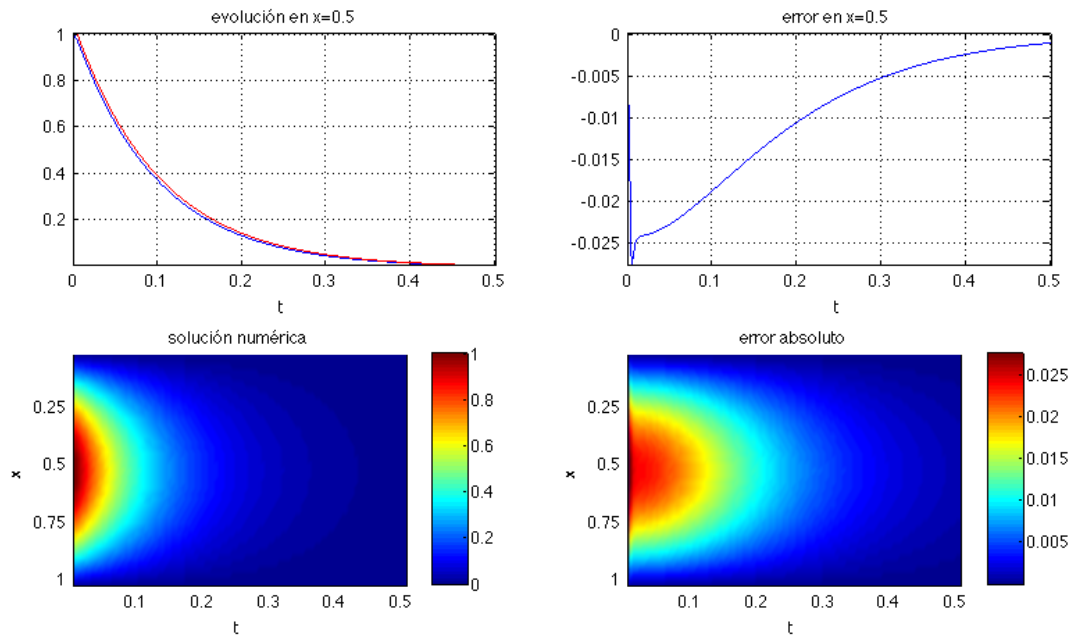


Figura 1. Ejemplo de propagación subcrítica:  $\tau=0.1$   $\tau_{crit}$ ,  $k=0.005$ ,  $h=0.025$ .

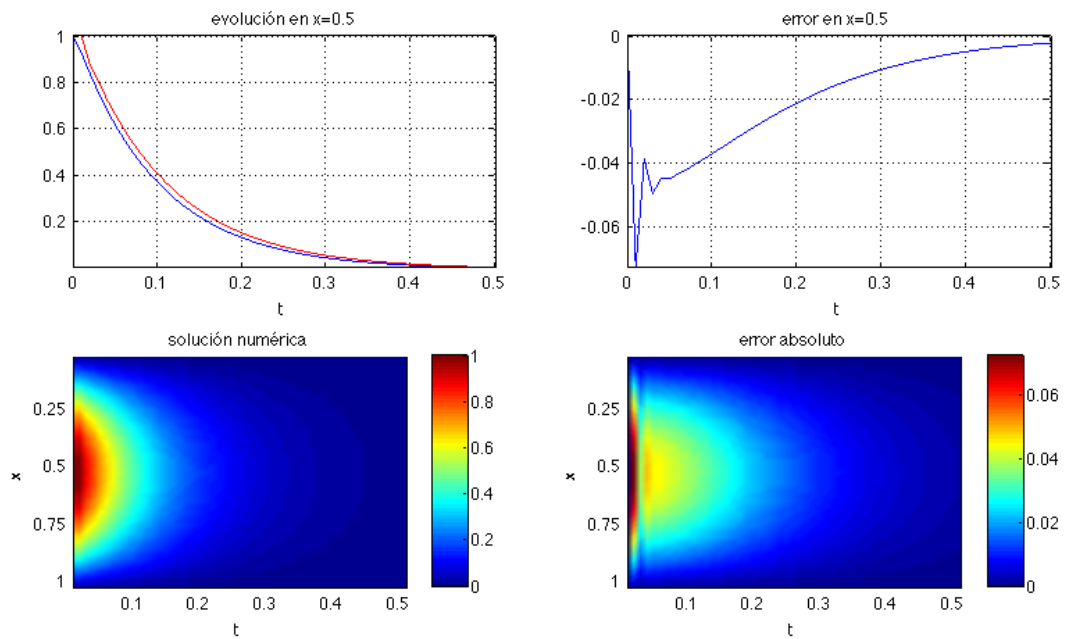


Figura 2. Ejemplo de propagación subcrítica:  $\tau=0.1$   $\tau_{crit}$ ,  $k=0.01$ ,  $h=0.025$ .

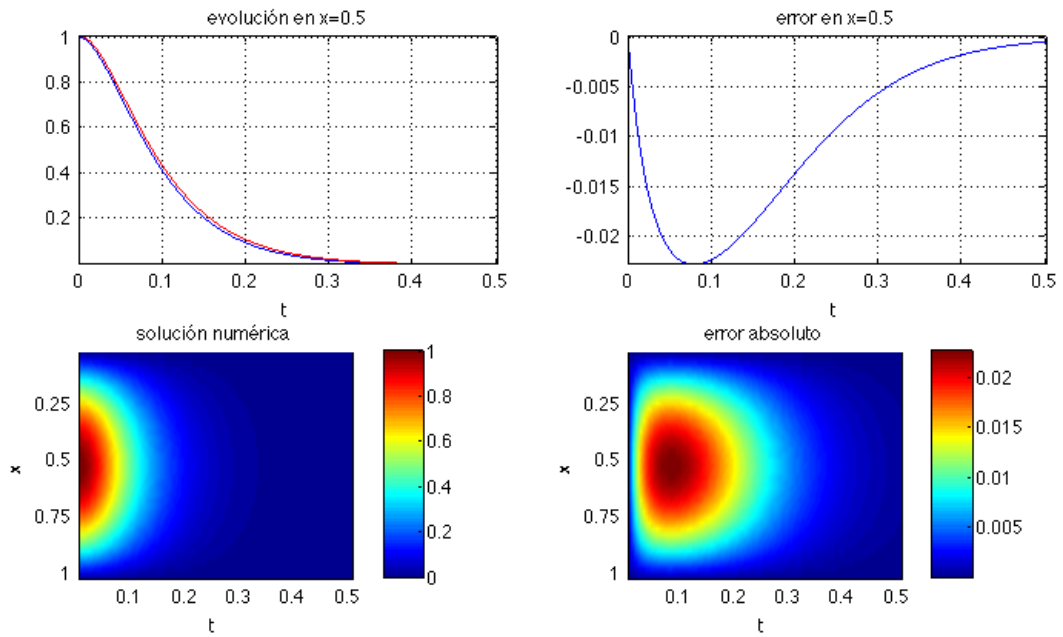


Figura 3. Ejemplo de propagación crítica:  $\tau=\tau_{crit}$ ,  $k=0.005$ ,  $h=0.025$ .

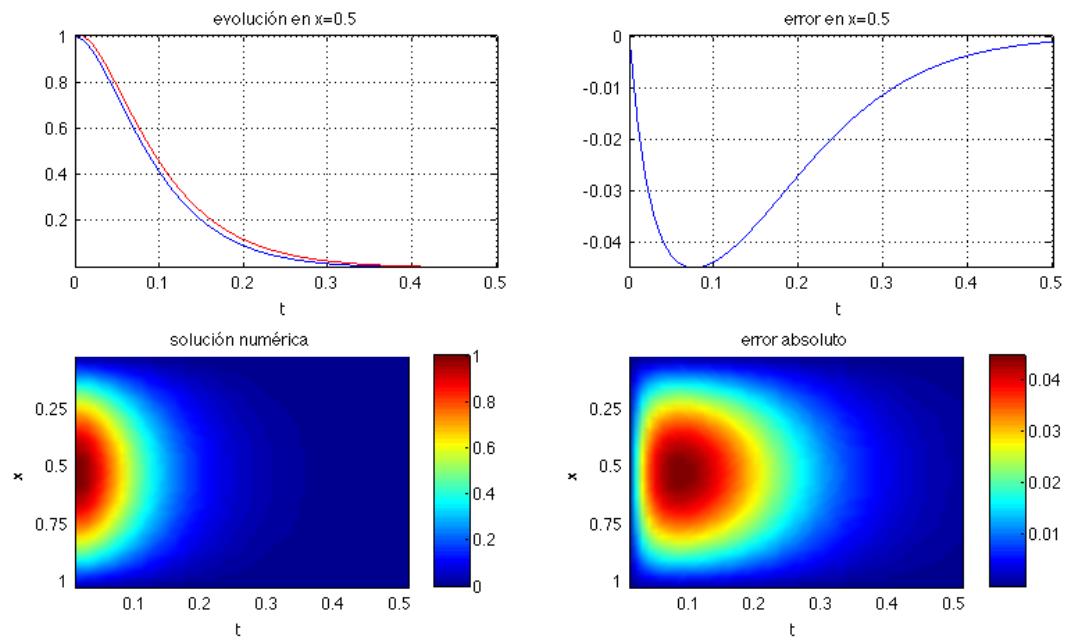


Figura 4. Ejemplo de propagación crítica:  $\tau=\tau_{crit}$ ,  $k=0.01$ ,  $h=0.025$ .

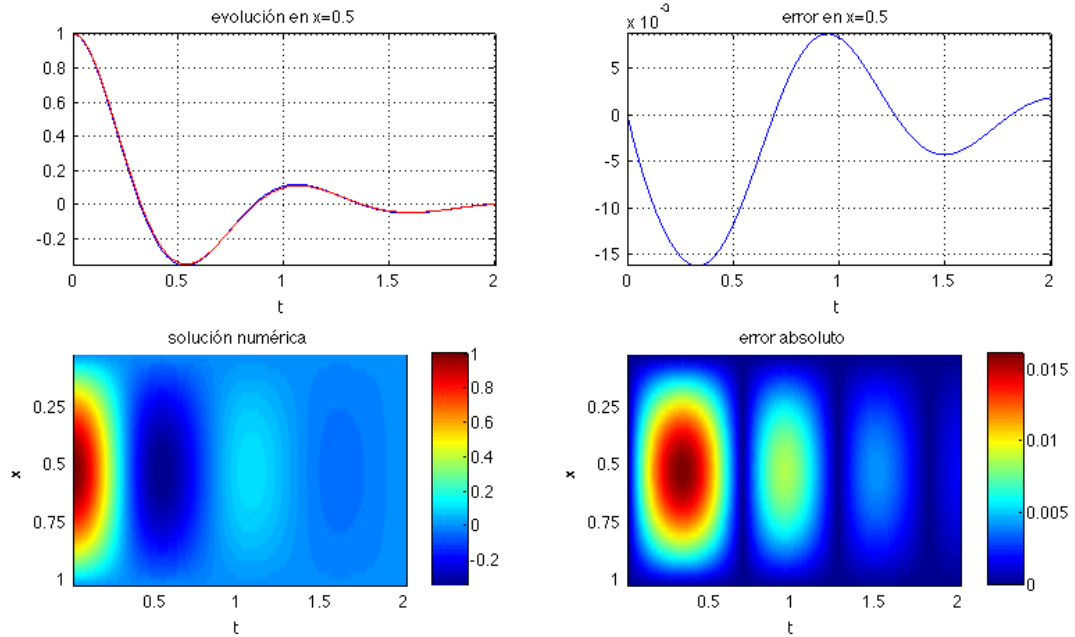


Figura 5. Ejemplo de propagación supercrítica:  $\tau=10\tau_{crit}$ ,  $k=0.005$ ,  $h=0.025$ .

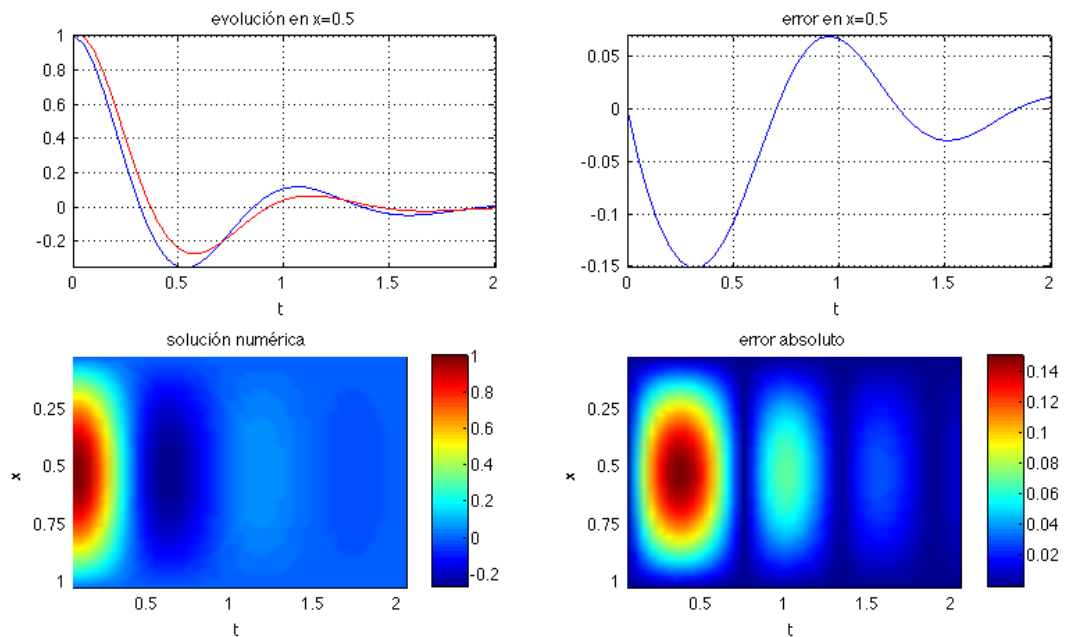


Figura 6. Ejemplo de propagación supercrítica:  $\tau=10\tau_{crit}$ ,  $k=0.05$ ,  $h=0.025$ .

En las figuras 5 y 6 se muestra el caso más habitual de propagación supercrítica, en la que la solución analítica presenta un comportamiento sinusoidal amortiguado. La escala temporal se

ha ampliado hasta  $t=2$ , para mostrar con mayor claridad dónde se produce el mayor error en la simulación (caso peor).

Finalmente, la Figura 7 muestra la evolución espacio-tiempo de la solución numérica para el caso de un problema no lineal, en el que la fuente viene dada por  $S(u)=Qu(1-u)$ , cuando la constante  $Q$  crece, en condiciones de comportamiento supercrítico. Para  $Q=5$  se obtiene un comportamiento muy similar al obtenido en las Figuras 5 y 6, pero a medida que el valor de  $Q$



crece ( $Q=6$ ,  $Q=7$ ), la zona del mínimo se ensancha hasta alcanzar un punto crítico ( $Q=7.2418$ ), que se corresponde con el primer punto de bifurcación, en el que la zona del mínimo alcanza un estado de equilibrio inestable. Tras pasado ese punto, la solución del problema es físicamente inestable, como puede verse en el caso de  $Q=8$ . El problema permanece inestable hasta que  $Q>14.1804$ , segundo punto de bifurcación del problema no lineal.

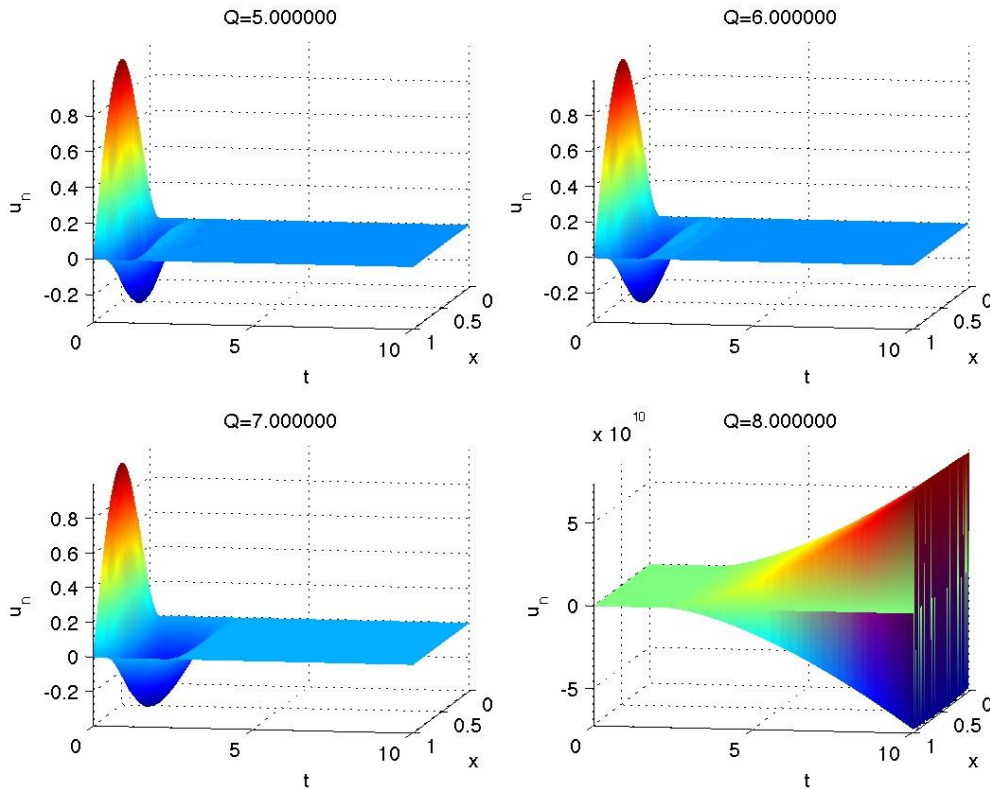


Figura 7. Ejemplo de propagación no lineal, en el que se muestra una bifurcación.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación en diferencias finitas con métodos exponenciales en el tiempo que permite el estudio de fenómenos de propagación acústica en condiciones de amortiguamiento subcrítico, crítico y supercrítico, con errores que se comportan de manera similar en todos los casos y que no provocan asimetrías espaciales en su distribución ni fenómenos de oscilación en las características.

La formulación presentada permite el estudio de fenómenos no lineales complejos con la garantía de que el método se comporta de manera numéricamente estable.

La estrategia de linealización temporal permite la factorización del método para el tratamiento de problemas multidimensionales como extensión natural, sin necesidad de una reformulación del esquema de diferencias y del estudio de su estabilidad numérica, problema siempre laborioso y complicado.

## AGRADECIMIENTO

Este trabajo de investigación ha sido parcialmente financiado mediante un contrato entre la Universidad de Málaga y la Fundación Innovacilla, con referencia 47.3670, en el marco del

proyecto "OPAC. Predicción y mejora del aislamiento acústico y térmico en los materiales cerámicos de construcción".

#### REFERENCIAS

- [1] A. Peplow, "Acoustical Finite Elements: General Theory" Lecture given at Summer School. 1 EAA EuroRegio 2010 Congress on Sound and Vibration, Ljubliana 2010.
- [2] M. Ochmann, "Acoustical Boundary Elements: General Theory" Lecture given at Summer School. 1 EAA EuroRegio 2010 Congress on Sound and Vibration, Ljubliana 2010.
- [3] J.I. Ramos, "Numerical methods for nonlinear second-order hyperbolic partial differential equations. I. Time-linearized finite difference methods for 1-D problems", Applied Mathematics and Computation, vol 190 (2007), 722-756.
- [4] J.I. Ramos, "On diffusive methods and exponentially-fitted techniques", Applied Mathematics and Computation, vol 103 (1999), 69-96.
- [5] J.I. Ramos, "A smooth locally-analytical technique for singularly perturbed two-point boundary value problems", Applied Mathematics and Computation, vol 163 (2005), 1123-1142.