



FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

## ANÁLISIS DE CAMPO CERCANO PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA EFECTIVA DE RADIACIÓN (SD) EN UN PISTÓN AXISIMÉTRICO RADIANDO EN UN PLANO INFINITO

43.58.-E. MEDIDAS ACÚSTICAS E INSTRUMENTACIÓN

Velarde, Angelo <sup>(1)</sup>; Moreno, Jorge <sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú  
Av. Universitaria 1801 Pando – San Miguel - Lima, Perú  
Departamento de Ingeniería  
Tel: +51-626-2000 ext. 5030  
E-mail: angelo.velarde@pucp.pe

<sup>(2)</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú  
Av. Universitaria 1801 Pando – San Miguel - Lima, Perú  
Departamento de Ciencias  
Laboratorio de Acústica  
Tel: +51-626-2000 ext. 5201  
E-mail: jmoreno@pucp.edu.pe

**Palabras Clave:** Pistón Axisimétrico, Área efectiva de radiación, Campo Cercano.

### ABSTRACT

In this paper, two different ways to obtain the radius of the effective radiation area ( $S_d$ ) are presented. The first method consider a theoretical analysis and a mathematical simplification of the equations based on the cylindrical symmetry of the pistons. The second method correspond to an adaptation of a previous publication that used multiple concentric rings as an approximation for circular pistons. Both methods, presented here, are based on a near field analysis for the calculation of the  $S_d$ . The results are compared with measurements of real pistons with different geometries in order to determine the accuracy of the technique.

### RESUMEN

En este documento, se presentan dos formas diferentes de obtener el radio del área efectiva de radiación ( $S_d$ ). El primer método considera un análisis teórico y una simplificación matemática de las ecuaciones basadas en la simetría cilíndrica de los pistones. El segundo método corresponde a una adaptación de una publicación anterior que usaba múltiples anillos concéntricos como una aproximación para pistones circulares. Ambos métodos, presentados aquí, se basan en un análisis de campo cercano para el cálculo del  $S_d$ . Los resultados se comparan con mediciones de pistones reales con diferentes geometrías para determinar la precisión de la técnica.



FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

## INTRODUCCIÓN

Tal y como menciona Beranek [1] [2], el área efectiva de radiación ( $S_d$ ) ayuda a determinar la presión sonora en el eje y la potencia acústica total, por lo que este valor debe ser hallado con precisión para calcular los parámetros de Thiele-Small con cierto grado de confianza. Klippel [3] además de mencionar la importancia del área efectiva de radiación ( $S_d$ ), afirma que un error del 12% en el valor del  $S_d$  puede causar un error de 1dB en la banda pasante.

Se han encontrado, diferentes métodos teóricos y experimentales para encontrar de forma precisa el área efectiva de radiación ( $S_d$ ). En esta línea destacan los trabajos de Small [4], Moreno [5] y Klippel [3], que abordan directamente el cálculo.

Sin embargo, tal como se menciona en [6] existen publicaciones relacionadas a la determinación de la presión sonora en campo lejano y campo cercano. En base a estas, se desarrolla una teoría para la determinación del área efectiva de radiación ( $S_d$ ) como una relación entre la presión sonora de campo cercano y la aceleración en la superficie del pistón.

Esta comunicación parte de este punto para agregar un cálculo simplificado basado en el trabajo de Alba [7] que aunque está orientado a campo lejano, aporta un planteamiento que utiliza un método numérico con el principio de la conformación de un pistón como una suma finita de anillos concéntricos.

Por tanto, ambos métodos, se ajustan para el cálculo de Beta ( $\beta$ ) y se explican a continuación.

## LA PRESIÓN SONORA EN CAMPO CERCANO Y EL ÁREA EFECTIVA DE RADIACIÓN

Para el análisis se ha considerado un pistón circular que vibra con velocidad uniforme, por ejemplo:  $u_p = u_0 e^{j\omega_0 t}$  (donde  $u_p$  es la velocidad del pistón), a lo largo de su superficie. Es importante tomar en cuenta que sólo se considerará la componente normal, dado que es la única que aporta a la radiación de sonido. Este pistón luego es montado en un plano infinito.

De esta manera, se parte inicialmente de la integral de Rayleigh-Sommerfeld, que considerando el caso general de un pistón de forma arbitraria y una velocidad normal  $u_p$ , conduce a la expresión:

$$p(x, y, z; t) = \rho_0 \int_S \frac{\dot{u}_p \left( x', y'; t - \frac{R}{c} \right)}{2\pi R} dS \quad (1)$$

Es a partir de esta expresión que se pueden plantear 2 rutas, la primera de ellas implica el desarrollo teórico de la integral considerando las condiciones de frontera y características geométricas de los pistones utilizados, mostrado en el planteamiento de una publicación previa del autor [6]. En la segunda ruta, se plantean anillos concéntricos, pero se considera que cada uno de ellos radia de manera individual y lo que se realiza es la suma de los aportes en términos de radiación para la obtención de la presión sonora total.

A partir de la geometría planteada se determinará el valor de la presión sonora y posteriormente el valor de la variable Beta ( $\beta$ ) definida en [6], ambas en campo cercano. Se presentan las 2 figuras siguientes:

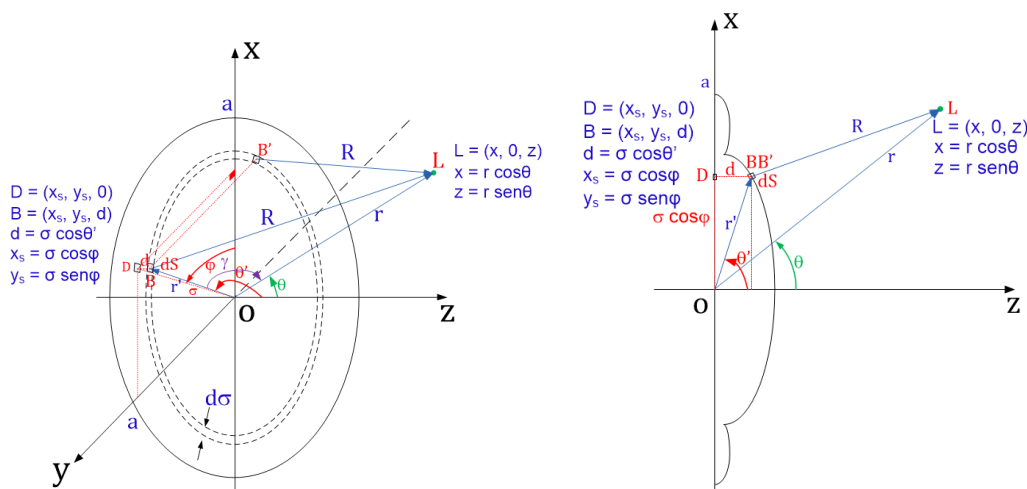


Figura 1: Pistón axisimétrico circular. El anillo tiene un ancho  $d\sigma$  y una altura  $d$  en el plano XY

### DETERMINACIÓN DE LA PRESIÓN SONORA EN CAMPO CERCANO

Ahora se pueden definir los parámetros de la ecuación de Rayleigh-Sommerfeld para la integral de la ecuación (2)

$$p(x, y, z; t) = \rho_0 \int_S \frac{\dot{u}_p \left( x', y'; t - \frac{R}{c} \right)}{2\pi R} dS \quad (2)$$

Se debe considerar:

- El radio  $\sigma$  del pistón.
- El ancho de cada anillo será  $d\sigma$ .
- El valor de  $R$  se obtiene considerando  $\sigma$  y  $d$ :  

$$R = |r - r'| = \sqrt{(r \cos \theta - \sigma \cos \varphi)^2 + \sigma^2 \sin^2 \varphi + (r \sin \theta - d)^2}$$
- El diferencial de superficie se obtiene a partir de la simetría axial como:  $dS = 2\sigma d\sigma d\varphi$  considerando la proyección sobre el plano XY.
- El rango de valores de las variables:  $0 < \sigma < a$  y  $0 < \varphi < \pi$ .

El término de la integral (2) se transforma con:

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{e^{-jk\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\gamma}}}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\gamma}} \quad (3)$$

Expresión que basada en los estudios de Hasegawa [8] [9] para el pistón cóncavo y aplicada a campo cercano, se puede transformar en la siguiente expresión:

$$\frac{e^{-jk\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\gamma}}}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\gamma}} = j \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1) \frac{K_{m+1/2}(kr')}{\sqrt{r'}} \frac{I_{m+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_m(\cos\gamma) \quad (4)$$

En la publicación previa del autor [6] se muestra que con el uso de las funciones esféricas de Bessel y Hankel planteado por Abramowitz [10], la expresión se convierte en:

$$p(x, y, z; t) = \frac{jk\rho_0 c_0 u_0 e^{j\omega_0 t}}{2\pi} \int_S -jk \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) h_m^{(1)}(kr') j_m(kr) P_m(\cos\gamma) dS \quad (5)$$

La misma que al aplicar las condiciones de frontera definidas inicialmente, se convierten en una expresión con los términos  $r'$  y  $\cos\theta'$ .

$$= k^2 \rho_0 c_0 u_0 e^{j\omega_0 t} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j_m(kr) P_m(\cos\theta) \int_0^a \sigma h_m^{(1)}(kr') P_m(\cos\theta') d\sigma \quad (6)$$

De igual forma, a partir del desarrollo de Alba [7], y con la misma geometría definida al inicio, se utilizará como consideración que la radiación producida por el pistón puede descomponerse como la suma de las presiones generadas por el aporte de los anillos diferenciales que lo componen. En el caso de los anillos, su presión puede ser obtenida por el principio de superposición por lo que, de acuerdo a Alba, se plantea la presión sonora de un anillo como la suma de 2 pistones planos de diferente radio y con velocidad en contrafase. Este principio es aplicado en el caso de campo lejano, pero puede ser utilizado gracias a las expresiones de Blackstock [11] en la transición de campo cercano a campo lejano. Si se considera que la expresión para la presión de un pistón plano en el eje z es:

$$= P_0 [e^{j(\omega t - kr)} - e^{j(\omega t - k\sqrt{r^2 + a^2})}] \quad (7)$$

Donde a es el radio del pistón y r en este caso es el valor de z respecto a la posición donde se mide la presión sonora.  $P_0$  está definido por Blackstock [11] como la presión de referencia  $\rho_0 c_0 \mu_0$ .

Ahora se considerará que un pistón axisimétrico de forma genérica se descompondrá en anillos de espesor  $\Delta\sigma = \frac{a}{\#anillos}$  y donde el radio de los pistones en contra fase que los definen con la regla  $\sigma_i = \Delta\sigma \times i$  donde i va desde 1 hasta  $\#anillos$ . Los pistones con velocidad en contrafase tendrán, por lo tanto, radios  $\sigma_i$  y  $\sigma_{i-1}$ , obteniéndose un pistón en una posición z correspondiente al promedio de las posiciones de los radios  $\sigma_i$  y  $\sigma_{i-1}$ . Este valor será:

$$z_{prom} = \frac{z(\sigma_i) + z(\sigma_{i-1})}{2} \quad (8)$$

De esta forma la presión que se obtendrá en cada anillo es:

$$= P_0 e^{j\omega t} \left\{ \left[ e^{-jk(r-z_{prom})} - e^{-jk\sqrt{(r-z_{prom})^2 + \sigma_i^2}} \right] - \left[ e^{-jk(r-z_{prom})} - e^{-jk\sqrt{(r-z_{prom})^2 + \sigma_{i-1}^2}} \right] \right\} \quad (9)$$

Reduciendo y definiendo la expresión en términos de senos y cosenos podemos definir la sumatoria final como:

$$= -P_0 e^{j\omega t} \sum_{i=1}^{\#anillos} \left\{ \cos \left( k \sqrt{(r - z_{prom})^2 + \sigma_i^2} \right) - \cos \left( k \sqrt{(r - z_{prom})^2 + \sigma_{i-1}^2} \right) - j \operatorname{sen} \left( k \sqrt{(r - z_{prom})^2 + \sigma_i^2} \right) + j \operatorname{sen} \left( k \sqrt{(r - z_{prom})^2 + \sigma_{i-1}^2} \right) \right\} \quad (10)$$

Ahora es necesario comparar los resultados obtenidos a partir de ambas expresiones con los resultados de las mediciones de presión y del valor de Beta( $\beta$ ) definido en la publicación [6] :

$$\beta_{\text{pistón}} = \frac{p}{\rho_0 \cdot acc}$$

### OBTENCIÓN EXPERIMENTAL DEL VALOR DE BETA EN CAMPO CERCANO

Luego de haber obtenido las expresiones de la presión sonora y el valor de Beta( $\beta$ ) para un pistón axisimétrico genérico por ambos métodos se procederá a comparar los resultados con pistones construidos, tanto planos como cóncavo cónico, cóncavo esférico y convexo esférico, con la finalidad de determinar la precisión de los cálculos respecto a la medición. Así mismo se procederá a comparar el valor de Beta( $\beta$ ) en los casos descritos.



Figura 2: Imágenes de los pistones construidos para la medición.

Para la determinación de la presión sonora y de la aceleración correspondiente se definió el siguiente sistema de medición:

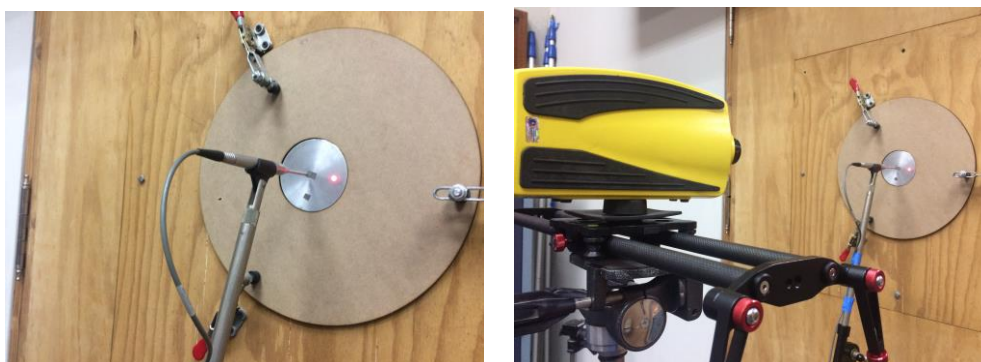


Figura 3a: Imágenes del esquema de medición utilizado mostrando las conexiones y los elementos mecánicos de soporte.

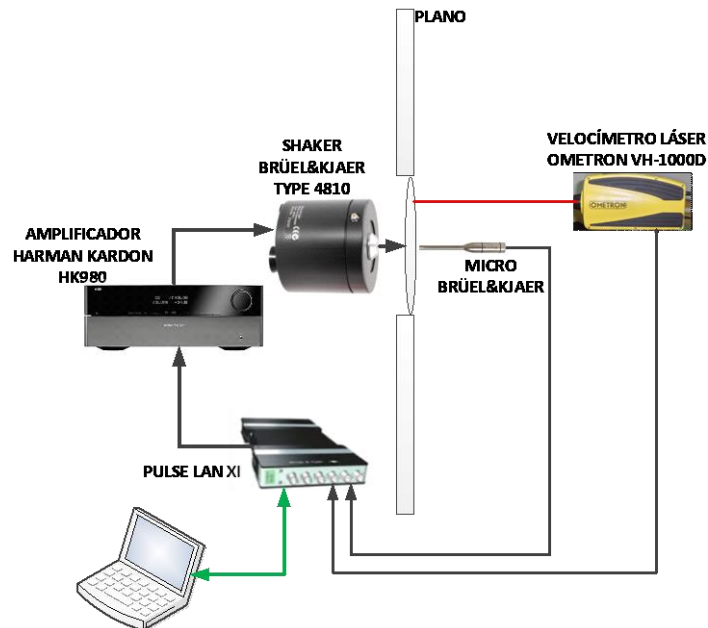


Figura 3b: Diagrama de bloques de la medición.

Con base en el esquema de medición preparado se obtiene la presión en el micrófono, así como también la aceleración con la ayuda del velocímetro láser.

### RESULTADOS Y OBSERVACIONES

A continuación, se muestran los resultados de la medición de la relación entre la presión tomada por el micrófono y la aceleración determinada por el láser.

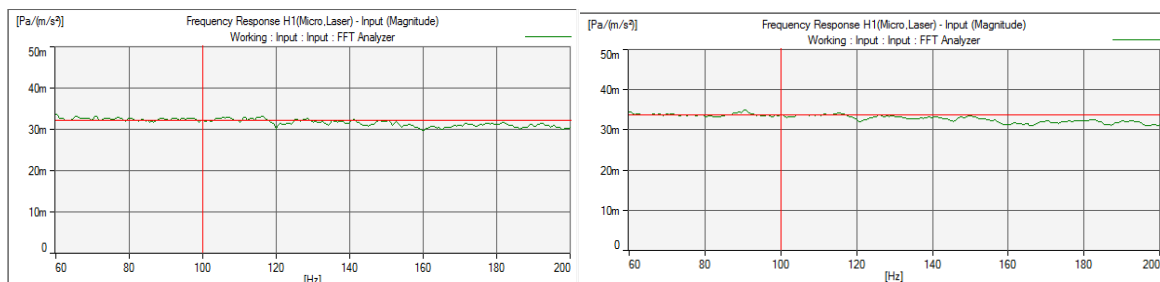


Figura 4: Medición de la relación presión aceleración en pistones planos  $d=94.77\text{mm}$  y  $d=83.5\text{mm}$ .

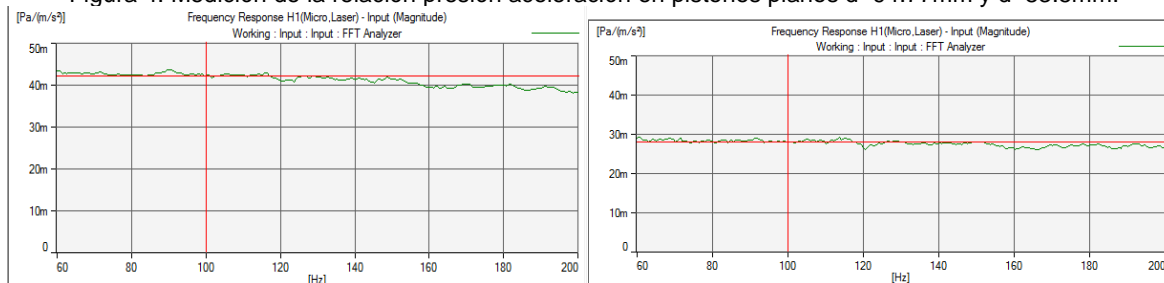


Figura 5: Medición de la relación presión aceleración en pistón cóncavo ( $d=94.9\text{mm}$ ) y convexo ( $d=94.58\text{mm}$ ).



FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACÚSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

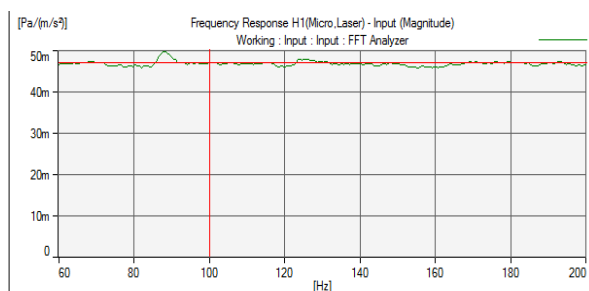


Figura 6: Medición de la relación presión aceleración en pistón cónico (d=83.5mm).

Es claro que la relación entre la presión y la aceleración es casi constante en las bajas frecuencias tal como se ha considerado en la publicación de Moreno [5]. Es necesario mencionar que las mediciones de presión no pueden ser realizadas directamente sobre la superficie dadas las características del transductor, por lo debe considerarse que habrá que introducir la corrección de la distancia del transductor en las mediciones.

Para el análisis planteado se han desarrollado las expresiones mencionadas en la primera parte de la publicación, utilizando el software Mathematica ® [12], obteniendo la misma relación constante de las mediciones. A continuación, se colocan los valores de las dimensiones de los pistones en comparación con los valores de la dimensión Beta ( $\beta$ ) obtenida en ambos casos, así como el error del cálculo correspondiente respecto al radio de los diferentes pistones:

Pistones	Dimensiones					
	a	c	Beta1	error(%)	Beta2 (1000anillos)	error(%)
Plano	41.84	0	41.81	0.06	41.74	0.23
Plano	47.40	0	47.38	0.04	47.37	0.06
Cóncavo	46.25	16.5	45.39	1.86	46.76	1.1
Convexo	45.25	15	44.51	1.64	46.55	2.87
Cónico	39.09	36.8	30.97	20.76	35.53	9.1

Tabla 1: Dimensiones de los pistones(mm) y los valores de Beta ( $\beta$ ). Beta1 corresponde al desarrollo de la Integral de Rayleigh-Sommerfeld y Beta2 corresponde al desarrollo basado en anillos.

Así también se agrega una segunda tabla donde se comparan los resultados de las mediciones con los resultados:

Pistones	Dimensiones						
	a	c	Relación Beta medida en 100Hz en la superficie	Beta2 asumiendo separación	%error	Relación Beta medida en 100Hz a altura del plano	Beta2 a altura del plano
Plano	41.84	0	31.6	32.29	0.69		
Plano	47.40	0	34.1	35.4	1.3		
Cóncavo	46.25	16.5	41.9	41.19	0.71	33.3	36.73
Convexo	45.25	15	27.8	37.77	9.97		
Cónico	39.09	36.8	47.1	36.7	10.4	26.5	29.65

Tabla 2: Valores de las dimensiones de los pistones (mm) y los valores obtenidos de Beta ( $\beta$ ) experimental y numéricamente.

El error obtenido entre la medición y los cálculos considerando una distancia de 5mm de separación entre el micrófono y la superficie del pistón llega a un máximo del 10%. Se aprecia además que en los casos cóncavo y cónico mejora la cercanía entre el valor medido y el calculado a la altura del plano sobre el que está montado el pistón.



FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

## CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Se encuentra que tanto el método planteado en [6] como el incluido en esta publicación basado en el trabajo previo de Alba [7] llevan a valores de Beta muy similares, considerándose que el método de Alba es mucho más rápido para propósitos de computación y tiene más potencial para la inclusión de la velocidad en el cálculo para el caso de los parlantes.

Las comparaciones entre los resultados experimentales y los cálculos permiten afirmar que el método es adecuado, pero requiere que se mejoren algunos elementos para aumentar la precisión del mismo, pues la precisión lograda es de alrededor del 10% en el peor escenario.

Es necesario ampliar la muestra de pistones con diferentes formas y mejorar la interfaz entre el pistón y el plano infinito de modo que se disminuya el error. Así mismo es importante realizar la medición de altavoces bajo este sistema, verificando el funcionamiento del algoritmo matemático, incluyendo el efecto de la velocidad, sino también, con la finalidad de comparar el valor con el valor de las hojas de características técnicas de los altavoces. Así mismo, se debe mejorar la precisión en la colocación del micrófono con la finalidad de obtener con mayor exactitud su distancia respecto a la superficie del pistón.

## REFERENCIAS

- [1] L. L. Beranek, *Acoustics*, Amer Inst of Physics; Rev Sub edition, 1986.
- [2] L. L. Beranek y T. J. Mellow, *Acoustics: Sound Fields and Transducers*, Oxford: Elsevier Inc., 2012.
- [3] W. Klippel y J. Schlechter, «Dynamical Measurement of the Effective Radiation Area  $S_D$ ,» de *128th Convention Audio Engineering Society*, London, 2010.
- [4] R. H. Small, «Direct-Radiator Loudspeaker System Analysis,» *Journal of Audio Engineering Society*, vol. 20, pp. 383-395, 1972.
- [5] J. N. Moreno, S. Jonsson and R. Moscoso, "Measurement of the Effective Radiating Surface Area of a Loudspeaker using a Laser Velocity Transducer," in *96th Convention Audio Engineering Society preprint*, Amsterdam, 1994.
- [6] A. Velarde y J. Moreno, «Effective radiation area ( $S_D$ ) for an axisymmetric piston radiating in an infinite baffle,» de *22nd International Congress on Acoustics ICA 2016 PROCEEDINGS*, Buenos Aires, Argentina, 2016.
- [7] J. Alba, J. Arenas y R. del Rey, «Determinación de la presión sonora radiada por pistones circulares y anillos noplanos usando un método numérico simplificado,» *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 30, nº 4, pp. 221-228, 2014.
- [8] T. Hasegawa, N. Inoue y K. Matsuzawa, «A new theory for the radiation from a concave piston source,» *Journal Acoustical Society of America*, vol. 82, nº 2, pp. 706-708, 1987.
- [9] T. Hasegawa, K. Matsuzawa y N. Inoue, «A new expansion for the velocity potential of a circular concave piston,» *Journal Acoustical Society of America*, vol. 79, nº 4, pp. 927-931, 1986.
- [10] M. Abramowitz y I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Washington: National Bureau of Standards - U.S. Government Printing Office, 1972.
- [11] D. T. Blackstock, *Fundamentals of Physical Acoustics*, Austin, Texas: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [12] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 10.0 ed., Champaign, Illinois: Wolfram Research, Inc., 2015.