

ANÁLISIS MODAL DE LA TAPA SUPERIOR DE UN VIOLÍN CON FEMLAB

PACS: 43.75.De

Chávarri Álvarez, Celia; Picó Vila, Rubén; Quintana Gómez, Samuel.
E. U. Politécnica de Cuenca. Universidad de Castilla-La Mancha
Campus Universitario s/n.
16071 Cuenca (Spain)
Tel: 969 179 100
Fax: 969 179 119
E-Mail: celiatx@gmail.com

ABSTRACT

The acoustic behaviour of the violin at low frequencies depends basically on two factors: the air cavity in the sound box and the vibratory behaviour of the plates. The aim of this work is to model the top plate of a violin and to analyse the natural modes of vibration by means of numerical simulation. The calculation method used is the Finite Element Method.

The development of the model consisted of starting by the study of a rectangular plate which was then modified to approximate to a real plate. It involves a gradual increase in the complexity of the design. Then, it is possible to evaluate how the modifications affect the natural frequencies and the location of maxima and minima of the displacement.

RESUMEN

El comportamiento acústico del violín a bajas frecuencias depende fundamentalmente de dos factores: la cavidad de aire de la caja armónica y el comportamiento vibratorio de las tapas. El objetivo de este trabajo es modelar la tapa superior de un violín y realizar un análisis de los modos propios de vibración mediante simulación numérica. El método de cálculo utilizado es el Método de Elementos Finitos.

En cuanto al modelado, se ha seguido un desarrollo de complejidad progresiva partiendo de una placa rectangular y modificando el diseño hasta simular un modelo similar a una tapa real. De esta manera es posible evaluar cómo afectan las modificaciones tanto a las frecuencias de vibración como a la localización de máximos y mínimos de desplazamiento.

INTRODUCCIÓN

Para analizar el comportamiento modal de una estructura, pueden seguirse dos vías distintas: se puede emplear un método experimental en el se hagan pruebas con el objeto en cuestión o bien, utilizar un método de cálculo, que supone simular dicho objeto y obtener sus modos de vibración por medio de software.

En cuanto al violín, es imprescindible considerar que su comportamiento acústico está principalmente gobernado por la cavidad de aire que encierra la caja de resonancia y por los

modos de vibración de la propia estructura. Los luthiers dedican un gran esfuerzo en la construcción y diseño de las tapas del violín puesto que éstas juegan un rol muy importante en el comportamiento global del instrumento. Por esta razón, existen varios estudios relacionados con los modos de vibración de las tapas del violín. De entre todos ellos, cabe destacar el trabajo de C. M. Hutchins [1-2] basado en métodos experimentales como el método de Chladni [3] o la aplicación de interferometría holográfica [4].

En la actualidad, el Método de Elementos Finitos es una herramienta potente para el análisis modal de estructuras complejas. Este método numérico permite obtener soluciones aproximadas de las ecuaciones discretas en el dominio dividido en elementos. Su uso se extiende a diferentes campos de la física tales como la elasticidad, la mecánica de fluidos, los campos electromagnéticos o la propagación de ondas sonoras en acústica. La exactitud del método es mayor cuanto menor sea el tamaño del elemento en relación con la longitud de onda.

El objetivo de este trabajo es el estudio de los modos propios de la tapa armónica superior de un violín. Para ello se utilizará el método de Elementos Finitos como herramienta de simulación numérica. El estudio de configuraciones sencillas permite comprender mejor la influencia de los elementos propios de la tapa en su comportamiento modal.

PLACAS RECTANGULARES

Desde el principio se han considerado las características propias de la madera de la tapa superior, así como sus dimensiones:

Módulo de Young	13x10 ⁹ Pa	Largo de la caja	355 mm
Módulo de Poisson	0.3	Ancho en la parte superior	165 mm
Densidad	530 kg/m ³	Ancho en el centro del cuerpo	115 mm
		Ancho de la parte inferior	205 mm

Tabla 1. Parámetros físicos utilizados en las simulaciones

Tabla 2. Dimensiones estándar de la tapa armónica

En todos los modelos se ha escogido un espesor de 2.96 mm, resultado de calcular el promedio de distintos espesores de la tapa superior. Para la resolución numérica del sistema es preciso definir unas condiciones de contorno. En todas las simulaciones se ha impuesto condiciones de contorno fijas.

El primer cálculo se realizó con una placa cuya longitud coincidía con el largo del violín y la anchura con un promedio de los tres valores indicados en la tabla superior.

Al haber fijado los contornos, las soluciones que se obtienen muestran resultados simétricos y cuyos índices modales son fáciles de identificar. Como es lógico, los modos asociados a la dimensión más larga aparecen primero. Esto es debido a que cuanto mayor sea una dimensión, mayor es la longitud de onda de las ondas estacionarias que se forman en la placa, y por tanto, menor la frecuencia.

A continuación se indican los valores de frecuencias propias de los seis primeros modos y la distribución de máximos (color rojo) y mínimos (color azul) de desplazamiento.

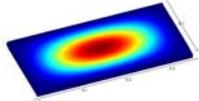
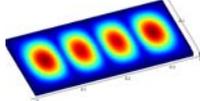
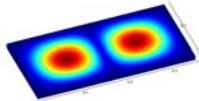
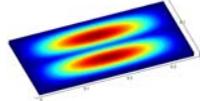
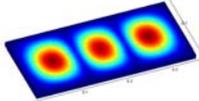
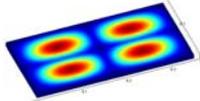
Modo 1 (1,1)	745.521 Hz		Modo 4 (4,1)	1867.525 Hz	
Modo 2 (2,1)	912.922 Hz		Modo 5 (1,2)	2367.130 Hz	
Modo 3 (3,1)	1261.515 Hz		Modo 6 (2,2)	2524.717 Hz	

Tabla 3. Seis primeros modos de vibración de una placa rectangular

Se calculó, en este caso, el valor de la frecuencia fundamental a partir de fórmulas teóricas [5] que consideran parámetros como rigidez a flexión, dimensiones de la placa y densidad. El resultado obtenido es 669.2489 Hz, lo que supone una desviación relativa $([f_1-f_2]/f_1)$ de 0.102. Las divergencias entre ambos se deben a las limitaciones y aproximaciones del modelo teórico.

El siguiente paso consistió en considerar dos bloques de una longitud equivalente a la mitad de la longitud total de la tapa pero distinta anchura, según las medidas anteriormente mencionadas.

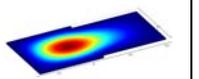
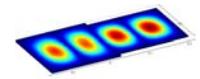
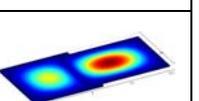
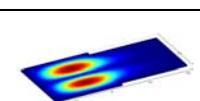
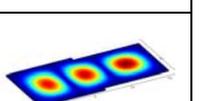
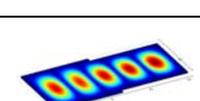
Modo 1 (1,1) ₁	775.052 Hz		Modo 4 (4,1)	1660.677 Hz	
Modo 2 (2,1)	981.512 Hz		Modo 5 (1,2) ₁	1954.657 Hz	
Modo 3 (3,1)	1248.782 Hz		Modo 6 (5,1)	2212.356 Hz	

Tabla 4. Seis primeros modos de vibración de dos placas unidas

Los resultados son muy similares a los obtenidos en el caso anterior, si bien hay variaciones tanto en las frecuencias como en la disposición de máximos y mínimos. En el caso de la frecuencia, no se ha producido la misma variación en todos los modos.

Como la distribución de máximos y mínimos se adapta al diseño de la placa, al introducir una discontinuidad en dos lados de la placa, hay algunas variaciones. Así, en algunos modos en los que los máximos estaban centrados, ahora se han desplazado hacia la parte superior o hacia la inferior. Distinguiríamos así dos tipos de modos: los modos en los que los máximos están asociados a una de las dos partes, como los modos 1 y 5, y los modos que en los que los máximos se distribuyen por toda la placa como los modos 3, 4 y 6.

Como consecuencia de esa división, no es posible seguir utilizando la misma nomenclatura empleada hasta ahora. Por ello, se ha incluido un subíndice que hace referencia a la parte en la que se localizan los modos. El modo (1,1)₁ es el modo (1,1) de la parte inferior, mientras que un modo cuyo subíndice sea 2, es un modo cuyo máximo o máximos se localizan en la parte superior.

Siguiendo el desarrollo del estudio, el modelo siguiente es similar al anterior pero en este caso, formado por tres bloques. El ancho de cada uno de los bloques se corresponde respectivamente con los valores mencionados con anterioridad.

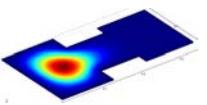
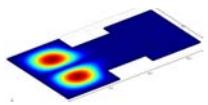
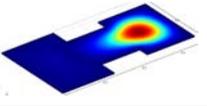
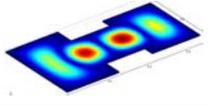
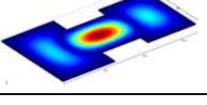
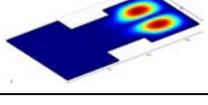
Modo 1 (1,1) ₁	845.643 Hz		Modo 4 (1,2) ₁	1548.840 Hz	
Modo 2 (1,1) ₃	1000.126 Hz		Modo 5 (2,1) ₂	1706.618 Hz	
Modo 3 (1,1) ₂	1357.798 Hz		Modo 6 (1,2) ₃	2102.465 Hz	

Tabla 5. Seis primeros modos de vibración de tres placas unidas

En los modos obtenidos con este modelo sí que se distingue perfectamente esa distribución de máximos en cada una de las partes; de hecho, no hay ningún modo entre los seis primeros cuyos máximos se distribuyan a lo largo de toda la placa.

Cabe destacar la relación entre frecuencia y dimensión de la placa. Por ejemplo, los tres primeros modos corresponden al modo fundamental de cada una de las partes respectivamente. El orden en el que aparecen se puede asociar a las dimensiones: la parte inferior es la primera que aparece y la de mayor longitud, después la superior y finalmente la intermedia, que es la más pequeña. Como ya se ha comentado, una longitud mayor implica que la onda estacionaria que se forma pueda tener una mayor longitud de onda, lo que implica un valor de frecuencia menor. Por eso el modo asociado a la parte inferior presenta una frecuencia propia menor.

Es importante considerar también la disminución del rango de frecuencias entre el modo menor y el mayor. En la placa rectangular, la diferencia relativa entre el primer modo y el sexto es 0.704, en la placa con dos paralelepípedos unidos esa diferencia toma un valor de 0.649, mientras que en la tercera este valor es 0.597. Esto puede explicarse por la aparición de nuevos modos asociados a las distintas partes, que en el caso de la placa rectangular no aparecían. Además, como las dimensiones van disminuyendo, el primer modo se localiza en una frecuencia cada vez más alta.

PLACAS CURVAS

Una de las características representativas del violín es la curvatura de sus contornos. Por ello, en el siguiente modelo se incluyeron líneas curvas. Pueden considerarse dos formas distintas a la hora de diseñar el modelo: se pueden dibujar elipses para definir las curvas o bien, utilizar líneas circulares. Tras realizar pruebas con ambas formas de diseño, se escogió la segunda opción ya que el modelo se aproximaba más a una tapa real.

Los tres primeros modos son prácticamente idénticos a los obtenidos en el modelo anterior. Al incluir líneas curvas, los contornos se suavizan y eso podría interpretarse como una aproximación a la placa rectangular inicial. Así, vuelven a aparecer modos en los que los máximos se localizan por toda la superficie y no sólo por una parte. Por otro lado, los valores de las frecuencias han aumentado respecto al caso anterior. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos.

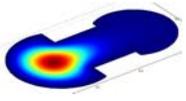
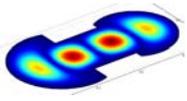
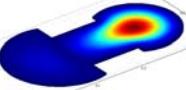
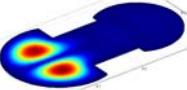
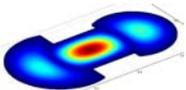
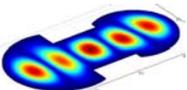
Modo 1 (1,1) ₁	918.066 Hz		Modo 4 (4,1)	1810.952 Hz	
Modo 2 (1,1) ₃	1053.480 Hz		Modo 5 (1,2) ₁	1827.905 Hz	
Modo 3 (1,1) ₂	1401.706 Hz		Modo 6 (5,1)	2317.479 Hz	

Tabla 6. Seis primeros modos de vibración de una placa formada a partir de circunferencias

TAPA ARMÓNICA

El último paso consistió en conseguir que el contorno se fuese prácticamente igual que el de una tapa armónica real. Para ello se empleó AutoCAD tomando un modelo basado en circunferencias como referencia.

El primer modelo dibujado con el programa se corresponde con una tapa simple. Aparentemente no hay muchas variaciones respecto a los ejemplos anteriores. Sin embargo, el valor de la frecuencia fundamental es el más bajo obtenido hasta ahora. Las configuraciones modales parecen una combinación de los resultados obtenidos en el caso de la placa formada por tres partes y cualquiera de los modelos con curvas. Todo esto queda reflejado en la siguiente tabla.

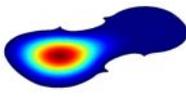
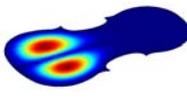
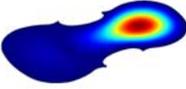
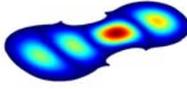
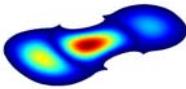
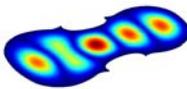
Modo 1 (1,1) ₁	729.172 Hz		Modo 4 (1,2) ₁	1529.506 Hz	
Modo 2 (1,1) ₃	1011.971 Hz		Modo 5 (4,1)	1732.048 Hz	
Modo 3 (1,1) ₂	1338.784 Hz		Modo 6 (5,1)	2236.734 Hz	

Tabla 7. Seis primeros modos de vibración de la placa diseñada con Autocad

Partiendo de este modelo, se incluyeron las dos efes sonoras (aberturas de resonancia con forma de efe situadas en el centro) para conseguir un modelo aún más parecido a una tapa armónica real. La función principal de las efes consiste en hacer de fuentes de radiación del aire que vibra en el interior del violín. No obstante, al variar la masa y forma de la tapa armónica influyen también en sus condiciones de vibración.

El hecho de introducir las efes sonoras disminuye todavía más la frecuencia fundamental. Además, es el único modelo de los que se han presentado hasta ahora en el que las modificaciones se han hecho en el interior de la placa y no en los bordes. Esto afecta a las distribuciones de máximos y mínimos cuyas formas se adaptan a estos orificios.

Estos son los resultados:

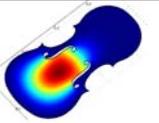
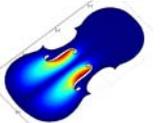
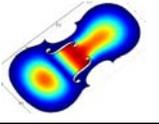
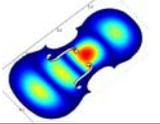
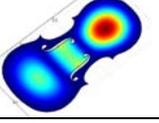
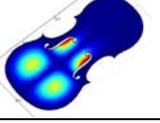
Modo 1	580.882 Hz		Modo 4	1269.894 Hz	
Modo 2	939.098 Hz		Modo 5	1603.013 Hz	
Modo 3	1039.855 Hz		Modo 6	1656.312 Hz	

Tabla 6. Seis primeros modos de vibración de una placa formada a partir de circunferencias

Por otro lado, al modificar la parte central del modelo, no es tan evidente la asociación de los máximos a una de las tres partes. Así, en este caso no resulta sencillo definir una nomenclatura que permita especificar todos los modos y por ello se ha optado por nombrar los modos según el orden de aparición.

CONCLUSIONES Y AGRADECIMIENTOS

- El estudio vibratorio de configuraciones sencillas como placas permite comprender los modos propios de la tapa armónica del violín.
- Los resultados obtenidos mediante simulación numérica muestran un buen acuerdo con los predichos por la teoría.
- La tapa armónica presenta una frecuencia fundamental menor que la correspondiente a las configuraciones más sencillas
- Las efes sonoras tienen un efecto significativo en la forma de los modos y en sus frecuencias propias.

Este trabajo ha podido realizarse gracias a la ayuda de Samuel Quintana Gómez, profesor de la E.U Politécnica de Cuenca y Rubén Picó Vila, profesor de la Escuela Politécnica Superior de Gandía.

REFERENCIAS

- [1] Hutchins, C. M. "The Physics of Violins"; Scientific American, November 1962.
- [2] Hutchins, C. M. "The Acoustics of Violin Plates"; Scientific American, October 1981.
- [3] Chladni, E. F. F. "Die Akustik", 2nd ed. Breitkopf u. Härtel, Leipzig, 1802.
- [4] Stetson K. A. "Theory and applications of electronic holography"; Proc. Soc. Experimental Mechanics Conf. On Hologram Interferometry and Speckle Metrology, 294-300, 1990.
- [5] E. Volterra and E.C. Zachmanoglou, "Dynamics of Vibrations" published by Charles E. Merrill Books Inc. 1965.