

PROPAGACIÓN NO DIFRACTIVA EN CRISTALES ACÚSTICOS

PACS: 43.35.Sx

Isabel Pérez-Arjona¹, Víctor J. Sánchez-Morcillo¹, Javier Redondo¹, Víctor Espinosa¹ y Kestutis Staliunas²

¹ Departamento de Física Aplicada, Escuela Politécnica Superior de Gandía, Universidad Politécnica de Valencia, Ctra. Natzaret-Oliva s/n
46730 Grau de Gandía, Spain.

Tlf. +34 96 284 93 00 Fax. +34 96 284 93 09

Correo electrónico: iparjona@upvnet.upv.es

² ICREA, Departament de Física i Enginyeria Nuclear, Universitat Politècnica de Catalunya, Colom 11,
08222 Terrassa, Barcelona, Spain

RESUMEN

Los cristales de sonido son medios con una modulación periódica de los parámetros acústicos. Recientemente han despertado gran interés, debido a sus potenciales aplicaciones como reflectores, focalizadores o guías de ondas. Estas propiedades están relacionadas con la dispersión introducida por la anisotropía del cristal. Aquí se predice la propagación no difractiva del sonido en un cristal acústico bidimensional, mediante el desarrollo en un conjunto de ondas planas (modos de Bloch) y mediante cálculos de haces finitos usando el método de diferencias finitas. Se obtienen expresiones analíticas para los parámetros de propagación no difractiva, así como para el tamaño mínimo de los haces no difractantes.

INTRODUCCIÓN

Los cristales de sonido (CSs) son estructuras periódicas de dispersores en un medio homogéneo, es decir, son medios que presentan una modulación periódica de las propiedades acústicas. Motivado por los resultados obtenidos del estudio de la propagación de ondas en el interior de medios periódicos en otros campos, como en el campo de la óptica¹, y que había permitido utilizar los cristales fotónicos para diseñar bandas prohibidas para la propagación de la luz o para construir guías de cristal fotónico, comenzó el estudio de los CSs y sus propiedades, obteniéndose resultados similares a los que habían sido obtenidos en otros campos².

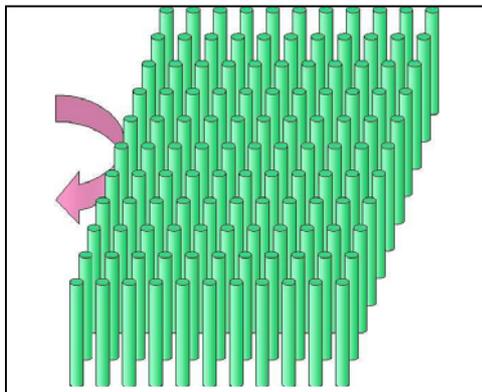


Fig1. Matriz periódica bidimensional de dispersores en una red cuadrada².

Una de las principales y más estudiadas propiedades de los CSs es la existencia de banda prohibidas en la propagación de las ondas acústicas en el interior de dichos cristales. Estas bandas prohibidas se corresponden con bandas de frecuencia para las que la onda acústica no se propaga en el interior del cristal, sino que es reflejada. Los cristales acústicos se constituyen, pues, como unos buenos candidatos para manipular a voluntad las bandas prohibidas, y construir guías de ondas y aislantes.

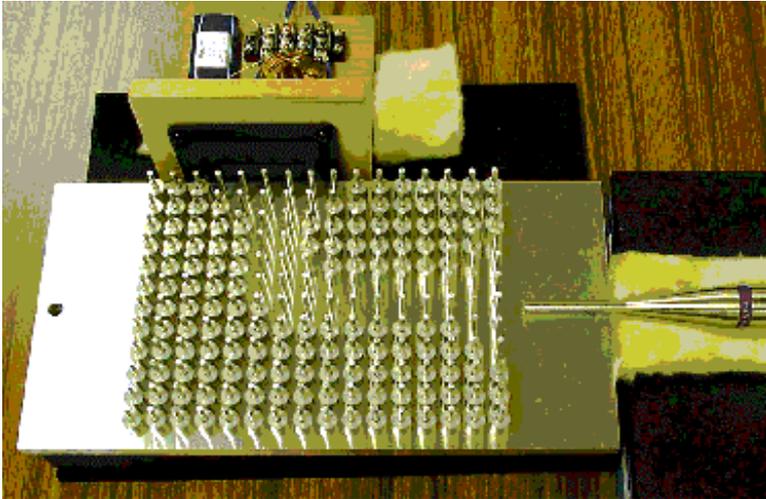


Fig. 2. Vista superior de una guía de ondas acústica construida mediante cristales de sonido².

La mayoría de los estudios sobre CSs se limitan al caso de estructuras unidimensionales, que debido a ser relativamente sencillo, permite tratamientos analíticos, cosa que resulta mucho más compleja cuando se tratan estructuras multidimensionales. En estos sistemas, los trabajos se suelen ceñir al estudio numérico de las propiedades del cristal, bien mediante el uso de desarrollo en ondas planas, bien mediante el método de diferencias finitas. Asimismo, la mayoría de los estudios se centran exclusivamente en las modificaciones introducidas por el cristal en las características de dispersión temporal.

En nuestro caso, nos centraremos en el estudio de un cristal bidimensional. Estudiaremos no sólo las variaciones de las propiedades de dispersión temporal introducidas por este CS, sino que también nos dedicaremos a las variaciones introducidas en la dispersión espacial, es decir, en cómo afecta la periodicidad del cristal a las propiedades de difracción. Esta idea llevó ya a la predicción de difracción negativa de haces tanto de luz³ como de sonido⁴. Recientemente se ha predicho, en cristales fotónicos, la existencia de regiones en que la difracción puede cancelarse prácticamente por completo, lo que llevaría a obtener haces de luz autocolimados o no difractivos⁵, que podrían propagarse largas distancias sin esparcirse en el interior del cristal.

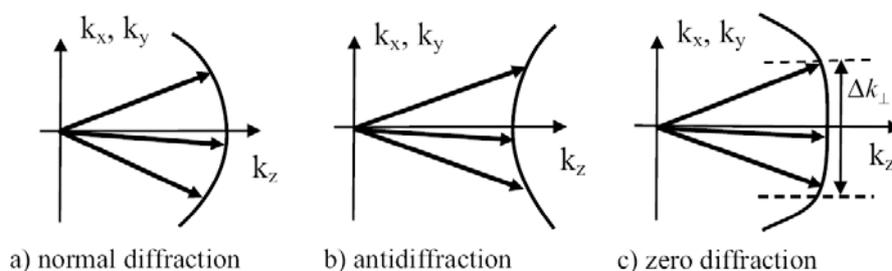


Fig. 3. Interpretación geométrica de la difracción de ondas propagándose a lo largo de eje z.

Éste es precisamente el objetivo de este trabajo⁶. Aquí estudiamos la propagación no difractiva de ondas acústicas en el interior de materiales acústicos de sonidos (cristales). Mediante el método de desarrollo en ondas planas, encontraremos los regímenes no difractivos (Fig.3c). Esta propagación autocolimada se comprobará integrando las ecuaciones de propagación de las ondas mediante la técnica de diferencias finitas. Se presenta también un

estudio analítico, con el que se obtienen relaciones analíticas, que han sido de gran utilidad en el momento de diseñar el experimento, que en este momento se está llevando a cabo, como para diseñar nuevas aplicaciones.

TEORÍA

La propagación de ondas acústicas viene descrita por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -B \nabla \cdot \mathbf{v},\end{aligned}\tag{1}$$

donde $\rho(\mathbf{r})$ y $B(\mathbf{r})$ son la densidad y el bulk modulus del medio (dependientes del espacio), $p(\mathbf{r},t)$ es la presión escalar y $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ es el vector velocidad. Suponiendo para los campos una dependencia temporal armónica, la ecuación para una onda de una frecuencia ω determinada viene dada por la ecuación de autovalores

$$\frac{\omega^2}{\bar{B}(\mathbf{r})} p(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}(\mathbf{r})} \nabla p(\mathbf{r}) \right) = 0,\tag{2}$$

donde el guión significa que la cantidad está normalizada a la del medio homogéneo en el que se encuentran inmersos los dispersores. Siendo los vectores de la red $R = \{R = n_1 a + n_2 a; n_1, n_2 \in N\}$, con a la distancia entre dispersores y los vectores de la red recíproca $G = \{G : G \cdot R = 2\pi n; n \in N\}$ y desarrollando en esta última base $\bar{\rho}(\mathbf{r})^{-1} = \sum_G \rho_G^{-1} e^{iG\mathbf{r}}$, $\bar{B}(\mathbf{r})^{-1} = \sum_G b_G^{-1} e^{iG\mathbf{r}}$ y $p(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_G p_{\mathbf{k},G} e^{iG\mathbf{r}}$ (teorema Bloch-Floquet)

$$\sum_{\mathbf{G}'} [\omega^2 b_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}^{-1} - \rho_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}^{-1} (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}')] p_{\mathbf{G}'} = 0.\tag{3}$$

obtenemos la ecuación de autovalores

Resolver esta ecuación nos permitirá conocer la estructura de bandas del cristal y por tanto la posible existencia de bandas prohibidas, así como los contornos isofrecuenciales, que nos permitirán reconocer las zonas para las que la propagación de las ondas acústicas es no difractiva.

RESULTADOS NUMÉRICOS

La estructura de bandas y los contornos isofrecuenciales se obtienen, como ya se ha comentado, a partir de la resolución de la ecuación (3). En nuestro caso, la resolución se llevó a cabo con 361 ondas planas, a fin de asegurar la convergencia. Se muestran los resultados obtenidos para la primera y la segunda banda

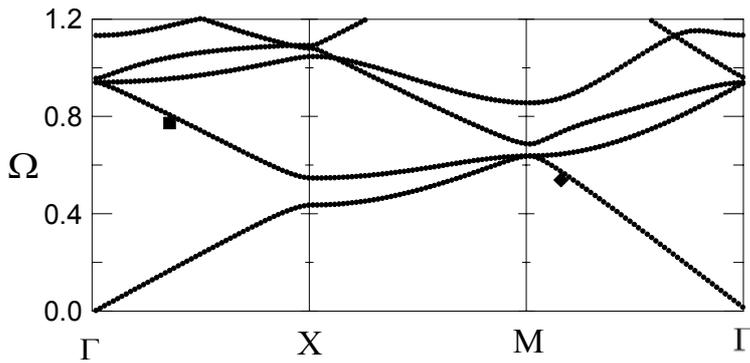


Fig.4. Estructura de bandas para una red de cilindros de radio 1mm en agua, separados $a=5,25$ mm entre sí. Los cuadrados marcan los puntos de no difracción.

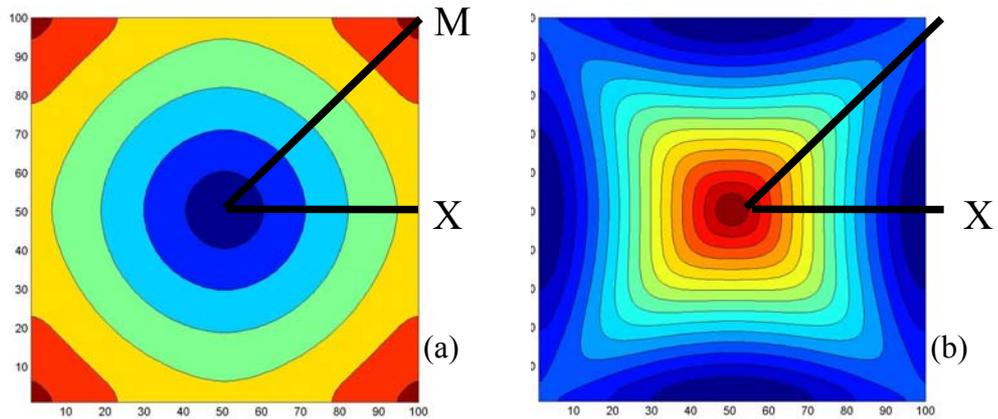
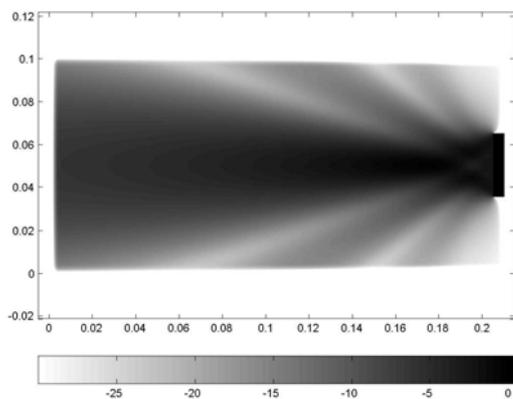


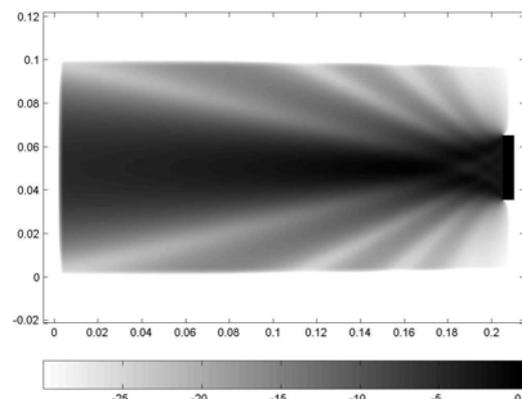
Fig. 5. Superficies isofrecuenciales para la primera (a) y la segunda (b) banda. Cristal formado por cilindros de acero de radio 1mm y separados 5.25 mm sumergidos en agua.

Como puede observarse, las curvas muestran una transición de cóncavas a convexas. En las superficies correspondientes a esta transición, existen segmentos localmente planos, que se corresponden con las frecuencias y direcciones para las que el esparcimiento del haz se ve compensado por la anisotropía del cristal y corresponden por tanto a la propagación no difractiva.

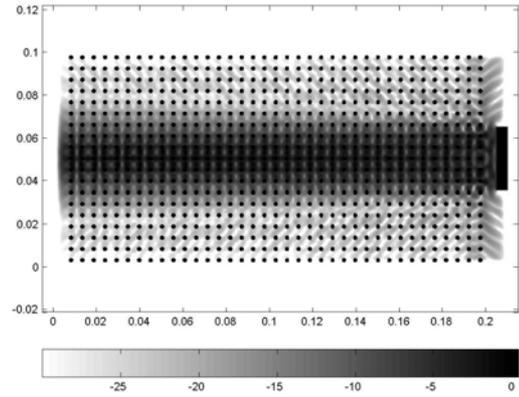
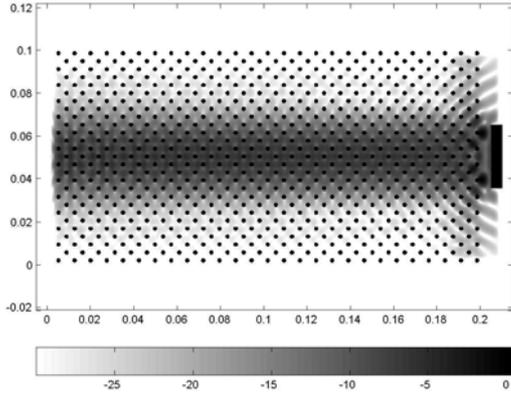
A fin de comprobar la propagación no difractiva de las ondas acústicas en el interior del CS, se han integrado numéricamente las ecuaciones (1) utilizando la técnica de diferencias finitas. El haz incidente simula un transductor de diámetro 3cm que radia con una frecuencia variable ω . Se muestran los resultados obtenidos tanto para la primera como para la segunda banda.



(a)



(b)



RESULTADOS ANALÍTICOS

El análisis de la estructura del campo a partir de la descomposición en ondas planas requeriría un desarrollo en infinitos modos de la ecuación (3), esta ecuación se ha resuelto numéricamente tomando un número finito pero elevado de modos. No obstante, si no situamos en condiciones próximas a la propagación no difractiva, podemos desarrollar una teoría analítica considerando únicamente tres modos relevantes, el modo homogéneo y los dos modos siguientes de orden más bajo (con números de onda \mathbf{k} , $\mathbf{k}+\mathbf{G}_1$ y $\mathbf{k}+\mathbf{G}_2$).

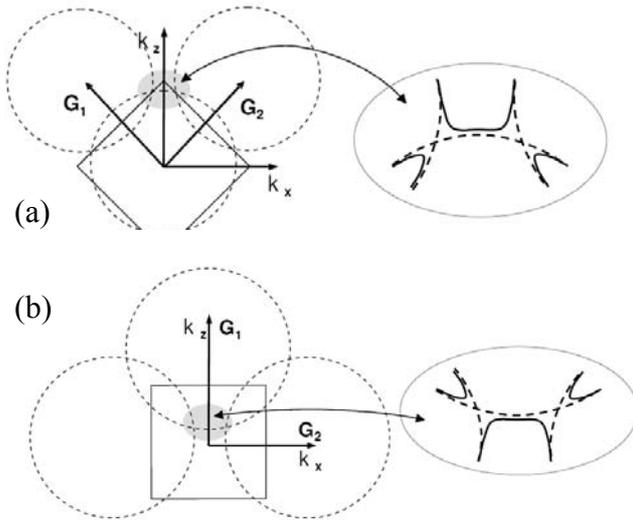


Fig. 7. Imagen esquemática mostrando la región no difractiva (sombreada) como interacción entre tres modos.

Asumiendo que el factor de llenado es pequeño (radio de los cilindros \ll distancia entre ellos), que las impedancias entre los materiales son muy distintas y que estamos próximos a la banda prohibida, llegamos a las siguientes expresiones analíticas que proporcionan la desviación de la frecuencia $\delta\Omega_{ND}^{(1)}$ y número de onda $\delta K_{ND}^{(1)}$ correspondientes a la propagación no difractiva respecto a la frecuencia y número de onda del gap:

$$\delta\Omega_{ND}^{(1)} = f^{2/3} + O(f^{4/3}), \quad (5)$$

$$\delta K_{ND}^{(1)} = f^{2/3} - f^{4/3} + \frac{3}{4}f^2 + O(f^{7/3}), \quad (6)$$

que proporciona el tamaño de los haces que pueden propagarse sin difracción, resultando ser $d \approx 2\pi / \delta k_{ND} \approx 2\pi f^{-2/3}$. Se observa un gran acuerdo con los resultados obtenidos numéricamente.

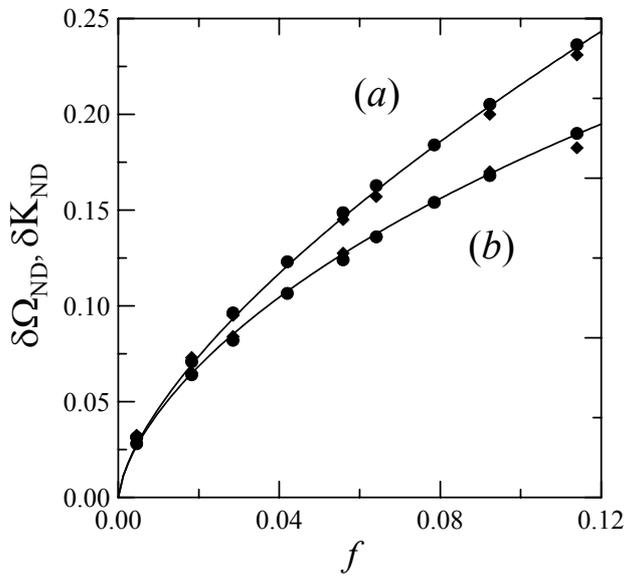


Fig. 8. Dependencia de los valores de la frecuencia (a) y del número de ondas (b) de la onda no difractiva con respecto los del gap. Los símbolos corresponden a cálculos numéricos y la línea continua al resultado analítico.

EXPERIMENTO

Actualmente se está llevando a cabo el experimento. El experimento consiste en focalizar un transductor sobre la cara de entrada del cristal, de forma que el diámetro de haz focalizado sea próximo al diámetro óptimo para la propagación no difractiva. Utilizando un transductor que radie a frecuencias próximas a la frecuencia de propagación con difracción nula, y en la dirección adecuada, el haz debe propagarse sin dispersarse. Se muestran los esquemas de focalización del haz sobre el cristal, así como el cristal utilizado. El cristal consta de barras de acero de radio 1 mm y separadas 5,25 mm entre sí, de forma que se corresponden con los resultados numéricos anteriores.

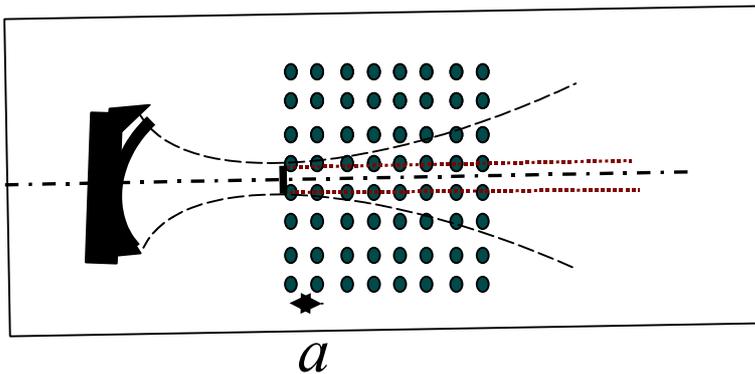


Fig. 9. Focalización del transductor sobre la cara de entrada del cristal. La curva línea-línea corresponde a la propagación libre, la curva punteada a la propagación colimada, y la punteada-línea al eje del transductor.

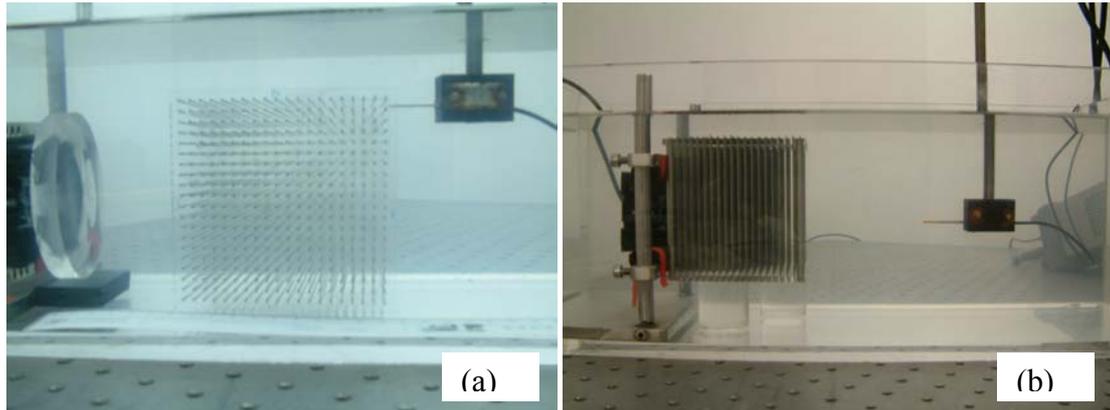


Fig. 10. Vista superior (a) y lateral (b) del cristal acústico utilizado en el dispositivo experimental.

BIBLIOGRAFÍA

- ¹ E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987); S. John, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987).
- ² T. Miyashita, Meas. Sci. Technol. **16**, R47-R63 (2005); Page JH et al., Phys. Stat. Sol. **241**, 3454-3462 (2004).
- ³ R. Morandotti et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 3296 (2001), M.J. Ablowitz and Z.H. Musslimani, Phys. Rev. Lett. **87**, 254102 (2001).
- ⁴ Suxia Yang et al, Phys. Rev. Lett. **93**, 024301 (2004); M. Torres and F.R. Montero de Espinosa, Ultrasonics **42**, 787 (2004).
- ⁵ K. Staliunas and R. Herrero, Phys. Rev. E, **73**, 016601 (2006).
- ⁶ I. Perez-Arjona, V. J. Sanchez-Morcillo, J. Redondo, V. Espinosa, K. Staliunas, <http://arxiv.org/abs/physics/0606018>.