

## TRANSDUCTORES ULTRASÓNICOS FOCALIZADOS CON BAJO NUMERO DE FRESNEL

PACS 43.25.Cb

Sánchez-Morcillo, Víctor; Espinosa, Víctor, Camarena, Francisco; Makov, Yuri.  
Dpto. de Física Aplicada, Escuela Politécnica Superior de Gandía, UPV  
Ctra. Natzaret-Oliva s/n  
46730 Grau de Gandía. Spain  
Tlf: 962 849 368  
Fax: 962 849 309  
E-mail: victorsm@fis.upv.es

### ABSTRACT

El estudio de los haces ultrasónicos focalizados ha despertado un gran interés, desde los primeros trabajos en los años 50 hasta la actualidad, dadas sus múltiples aplicaciones en numerosos campos como en medicina, análisis no destructivos, y muchos otros. Sin embargo, existen todavía ciertos aspectos sin resolver, y en algunos casos resultados contradictorios. En este trabajo presentamos algunos resultados relacionados con la localización en el eje del transductor del máximo de presión, así como del valor real de la ganancia. Generalmente se acepta que dicho máximo coincide o está situado cerca del valor de la focal geométrica del sistema. Aquí demostramos que la posición el punto de presión máxima depende del valor del número de Fresnel del sistema. En particular, se muestra que en el caso de número de Fresnel bajo (correspondiente a sistemas con pequeña curvatura o débilmente focalizados) se produce un importante desplazamiento del máximo de presión hacia la posición del transductor. Este hecho implica una nueva definición del concepto de ganancia, cuya expresión analítica se presenta en este trabajo. Los resultados teóricos han sido comprobados experimentalmente, existiendo un buen grado de acuerdo.

### INTRODUCCION

La estructura del campo acústico radiado por transductores focalizados (p.ejemplo, superficies curvas vibrantes con una cierta curvaturas) viene determinada, en el régimen lineal, por el cociente entre la distancia de Rayleigh  $L_d = ka^2/2$  (donde  $a$  es el radio del transductor y  $k$  el número de onda), que caracteriza el grado de divergencia debido a la difracción, y la longitud focal geométrica (o radio de curvatura del transductor)  $R$ , que caracteriza el grado de convergencia por focalización. El cociente entre ambos parámetros  $L_d/R$  define el parámetro adimensional que determina la influencia relativa (aunque actuando en sentido opuesto) de estos dos efectos. En la teoría de haces acústicos, así como en cualquier aplicación práctica, suele asociarse a este cociente otro significado, con una interpretación menos general: representa el valor de la ganancia lineal  $G$  en el punto focal geométrico de un transductor focalizado con un ángulo de apertura  $\alpha$  no excesivamente grande (siendo  $\alpha$  menor que  $20^\circ$ ) bajo la aproximación de Fresnel [1].

Un análisis más detallado muestra que, aun manteniendo su primer significado de relación entre dos efectos, el cociente  $L_d/R$  no se corresponde con el valor correcto de la ganancia del sistema (definida como el cociente entre la presión máxima a lo largo del eje y la presión inicial, sobre la superficie del transductor) cuando  $L_d \leq R$ . Esta situación justifica la necesidad de introducir un parámetro independiente para estimar la acción relativa de los efectos de difracción y focalización en haces acústicos focalizados. Tal parámetro es el número de Fresnel, que por otra parte es frecuentemente usado en la caracterización de sistemas ópticos [2]. En lo sucesivo, emplearemos dicho parámetro para la caracterización de fuentes acústicas, hecho que no se ha realizado con anterioridad y es por lo tanto novedoso en este contexto.

El número de Fresnel  $N_F$  se define como el número de zonas de Fresnel contenidas en la parte del frente de ondas acotada por la apertura difractante (en este caso la superficie del transductor), cuando éste es visto desde un punto de observación determinado. A su vez, las zonas de Fresnel son las regiones anulares concéntricas del frente de ondas en las que cada contorno circular que limita el anillo está formado por puntos equidistantes al punto de observación, y de manera que la diferencia de caminos, con respecto al punto de observación, entre dos puntos pertenecientes a círculos adyacentes difiere en media longitud de onda (condición de interferencia destructiva). En el caso más sencillo de una región plana y circular del frente de ondas, con radio  $a$  y longitud de onda  $\lambda$ , el número de Fresnel para un punto sobre el eje a una distancia  $z$  del frente de ondas es igual al cociente entre el cuadrado del radio de la apertura y el cuadrado de la primera zona de Fresnel (ya que las áreas de todas las zonas de Fresnel son iguales). Puesto que el radio de la  $m$ -ésima zona de Fresnel viene dado por  $r_m = \sqrt{m\lambda z}$  [2], entonces

$$N_F(z) = \frac{a^2}{\lambda z} \quad (1)$$

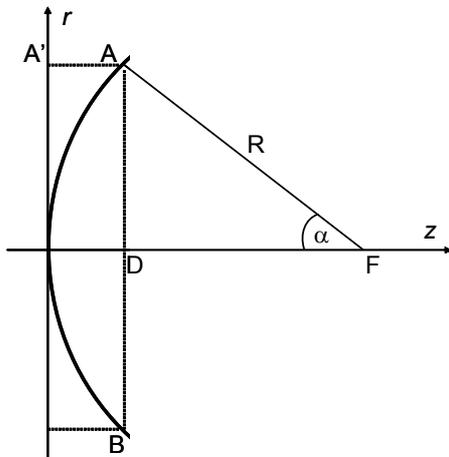


Figura 1. Geometría del transductor ultrasónico focalizado. F denota la posición del foco geométrico.

En el caso de los transductores focalizados existe un punto axial preferente, la focal geométrica con coordenada  $z = R$ . Para este punto, el valor concreto del número de Fresnel es

$$N_F(z = R) \equiv N_F = \frac{a^2}{\lambda R} = \frac{L_d}{\pi R} \quad (2)$$

Nótese que, pese a que difiere del parámetro de ganancia en un término constante,

## POSICIÓN DEL MÁXIMO DE PRESIÓN EN EL EJE. DESPLAZAMIENTO DE FOCO

Como punto de partida en nuestro análisis, consideraremos la solución analítica exacta para la amplitud de presión compleja  $A(r, z)$ , determinada por la ecuación de ondas en la aproximación paraxial

$$A(r, z) = -\frac{ik}{z} \exp\left(\frac{ik}{2z} r^2\right) \int_0^a \exp\left(\frac{ik}{2z} r'^2\right) J_0\left(\frac{k}{z} r r'\right) A(r', 0) r' dr', \quad (1)$$

La presión acústica total viene dada entonces por  $p(r, z, t) = A(r, z)e^{ikz - i\omega t}$ .

En el caso más sencillo, en el que la distribución de presión es constante a lo largo del transductor, y suponiendo un término de fase parabólico que representa el efecto de la focalización, la condición inicial correspondiente es

$$A(r', 0) = p_0 \exp\left(-\frac{ikr'^2}{2R}\right) \quad (2)$$

La amplitud de la presión obtenida mediante la resolución numérica de la ecuación (1) se muestra en las Figuras 2 (distribución en todo el espacio) y 3 (sección a lo largo del eje).

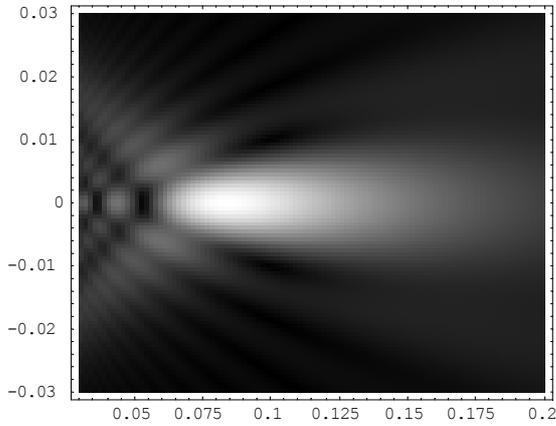


Figura 2. Distribución espacial de presión radiada por un transductor focalizado

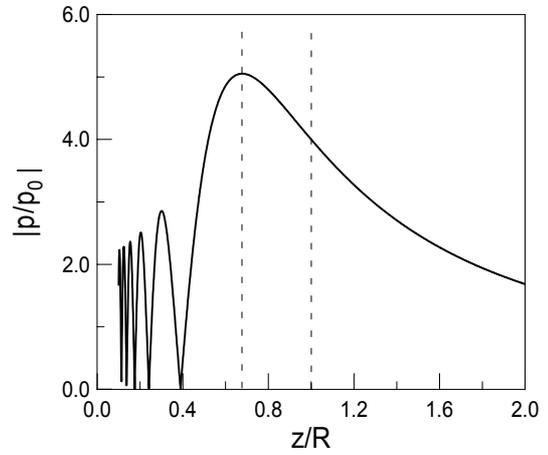


Figura 3. Distribución axial de amplitud

A partir de (1) y (2) puede obtenerse de forma explícita la presión a lo largo del eje  $z$ , que resulta ser

$$\left| \frac{p(0, \tilde{z})}{p_0} \right| = \left| \frac{2}{1 - \tilde{z}} \sin\left(\frac{\pi N_F}{2} \frac{1 - \tilde{z}}{\tilde{z}}\right) \right|, \quad (3)$$

donde las barras denotan valor absoluto,  $p_0$  es la presión constante a lo largo del transductor, y  $\tilde{z} = z/R$  es una coordenada adimensional a lo largo del eje del haz. En estas nuevas coordenadas, el foco geométrico se sitúa en  $\tilde{z} = 1$ .

La Figura 3 muestra la presión axial obtenida mediante la ecuación (3), para un transductor focalizado con  $N_F = 1.28$  ( $a = 1.5$  cm.,  $R = 11.7$  cm y  $\lambda = 0.15$  cm), que corresponde al sistema utilizado en la parte experimental. En ella es claramente visible un importante desplazamiento del máximo de presión hacia la superficie del transductor.

Es posible obtener de manera analítica la posición axial de dicho máximo de presión. Para ello, basta exigir que la derivada de la Ec. (3) sea nula (condición de extremo) y resolver. De aquí se obtiene que el máximo se encuentra a una distancia determinada por la solución de la ecuación trascendente

$$\frac{\tan(X)}{X} = \frac{1}{\tilde{z}} \quad (4)$$

donde se ha definido  $X = \frac{\pi N_F}{2} \frac{1-\tilde{z}}{\tilde{z}}$  [3].

En la Figura 4 (con círculos) se muestra la solución numérica exacta de la Ec. (4), a la que corresponde el punto axial de máxima presión (el más lejano del transductor), en función del número de Fresnel  $N_F$  y para algunos valores de éste. Como comparación se muestra también en línea discontinúa el resultado analítico aproximado  $\tilde{z}_{\max} = 1 - 12/\pi^2 N_F^2$  obtenido previamente por otros autores, (ver Ref. 3). Resulta evidente la inexactitud de dicha expresión para evaluar el desplazamiento de foco en el caso de número de Fresnel bajo.

A continuación presentamos el análisis que permite obtener una fórmula para el mencionado desplazamiento focal, pero válida para el rango completo de números de Fresnel (es decir, para transductores con curvatura y/o tamaño arbitrario). Para ello, es conveniente escribir primero la ecuación (4) en la forma

$$\frac{\sin(X)}{X} = \left( \frac{2X}{\pi N_F} + 1 \right) \cos(X). \quad (5)$$

La solución numérica de (5) muestra que la función  $X(N_F, \tilde{z}_{\max}(N_F))$  varía desde valores muy pequeños para  $N_F$  grande, hasta valores cerca de la unidad para  $N_F$  pequeño. Ello permite realizar un desarrollo en series de potencias de la ecuación (5) hasta tercer orden en  $X$ . Para estos desarrollos, es preferible el uso de la ecuación (5) en lugar de la ecuación (4) con el término  $\tan(X)$ , ya que las series alternantes en la ecuación (5) muestran una mejor convergencia y el resultado el más preciso, como veremos.

De este modo, se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para la determinación de  $\tilde{z}_{\max}$ ,

$$24\tilde{z}^2 = \pi^2 N_F^2 (3 - 4\tilde{z} + \tilde{z}^2), \quad (6)$$

cuya solución proporciona la dependencia de la localización del máximo de presión axial  $\tilde{z}_{\max}$  con el número de Fresnel  $N_F$ ,

$$\tilde{z}_{\max} = \frac{3\pi N_F}{2\pi N_F + \sqrt{\pi^2 N_F^2 + 72}} \quad (7)$$

Nótese que en el límite en que  $N_F$  es grande la ecuación (7) se reduce a  $\tilde{z}_{\max} \approx 1 - 12/\pi^2 N_F^2$ , que es la expresión aproximada mencionada anteriormente.

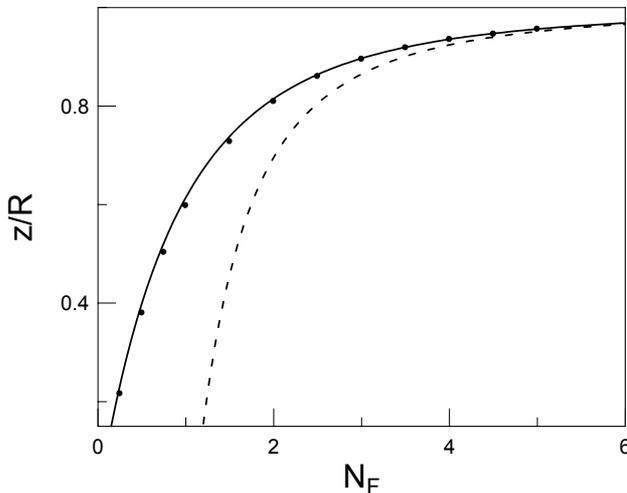


Figura 4. Posición del máximo de presión axial en función del número de Fresnel (ver texto).

La nueva expresión para  $\tilde{z}_{\max}$  que hemos obtenido es muy precisa (proporciona resultados muy próximos a los obtenidos mediante el análisis numérico de la ecuación (3) como se aprecia en la Figura 4, línea continua). La principal conclusión de los resultados presentados en la Figura 4 es que para  $N_F > 6$  (es decir, para transductores focalizados con alto número de Fresnel) el máximo principal de presión se encuentra muy próximo al foco geométrico, mientras que para  $N_F < 3$  (es decir, para transductores focalizados con bajo número de Fresnel) la diferencia entre ambos puntos axiales puede ser grande, y la posición del máximo se ve considerablemente desplazada hacia el transductor.

Nótese que, aunque los transductores con alto número de Fresnel se utilizan con más frecuencia en las aplicaciones usuales (que requieren gran focalización y concentración de energía), los de bajo número de Fresnel también son utilizados en la práctica, y de hecho son fabricados en series por varias casas comerciales. Con uno de estos transductores se ha medido experimentalmente el desplazamiento del máximo de presión axial. Para el transductor mencionado anteriormente (usado en la simulación), la distribución de presiones se midió a lo largo del eje z en régimen lineal (Figura 5). El resultado experimental muestra que, para el transductor examinado en el experimento, con  $N_F = 1.28$ , el punto de máxima presión se localiza a 7 cm de la fuente, que teniendo en cuenta el radio de curvatura del transductor utilizado  $R = 11.7$  cm resulta una coordenada adimensional para este punto igual a  $\tilde{z}_{\max} \approx 0.6$ , la cual muestra un buen acuerdo con el valor calculado teóricamente 0.67 (ver Fig. 3).

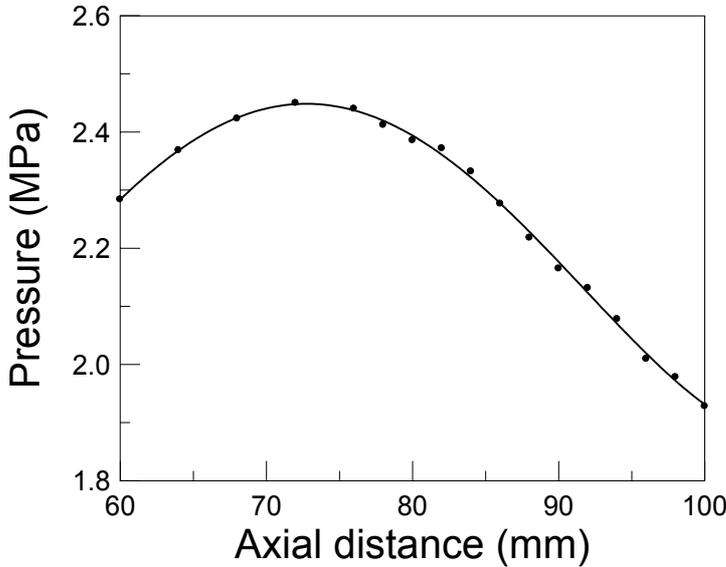


Figura 5. Distribución axial de presiones obtenida experimentalmente. La focal geométrica se encuentra a 11.7 cm

## DETERMINACIÓN DE LA GANANCIA REAL DE UN TRANSDUCTOR FOCALIZADO

Es ampliamente aceptado que la ganancia lineal de un transductor focalizado viene definida como

$$G = L_d / R \quad (8)$$

indicando el grado de incremento de la presión en un punto característico del haz, con respecto a la presión inicial sobre el transductor. De la distribución normalizada dada por la ecuación (3) resulta que en (8) la presión máxima sería la evaluada en la focal geométrica. Sin embargo, hemos demostrado que la ganancia real debe corresponder al máximo de presión, el cual no se produce necesariamente en la focal, sino en  $\tilde{z}_{\max}$ . Es decir, hemos de evaluar la ganancia real como:

$$G_r = \frac{p(0, \tilde{z}_{\max})}{p_0} \quad (9)$$

Para transductores con número de Fresnel grande, donde el máximo de presión está muy próximo a la focal geométrica, la diferencia entre  $G$  and  $G_r$  es despreciable. Sin embargo, en el caso de número de Fresnel bajo esto no se cumple, habiendo una discrepancia importante entre ambos valores de la ganancia. En base a la teoría presentada anteriormente, podemos obtener ahora una expresión que permita calcular el valor real de la ganancia, es decir, evaluada a partir de la ecuación (8).

La dependencia analítica de  $G_r$  con  $N_F$  se obtiene al sustituir  $\tilde{z}_{\max}(N_F)$ , dado por (8), en la ecuación (7), y resulta

$$G_r = \left| 2 \frac{(\pi N_F / 3) + \sqrt{2 + (\pi N_F / 6)^2}}{-(\pi N_F / 6) + \sqrt{2 + (\pi N_F / 6)^2}} \sin\left(-(\pi N_F / 6) + \sqrt{2 + (\pi N_F / 6)^2}\right) \right|. \quad (15)$$

Esta nueva expresión para la ganancia real  $G_r(N_F)$ , junto con la relación lineal  $G = \pi N_F$ , se muestran en la Figura 6, en las que las diferencias entre  $G$  y  $G_r$  en el límite de bajo número de Fresnel son evidentes.

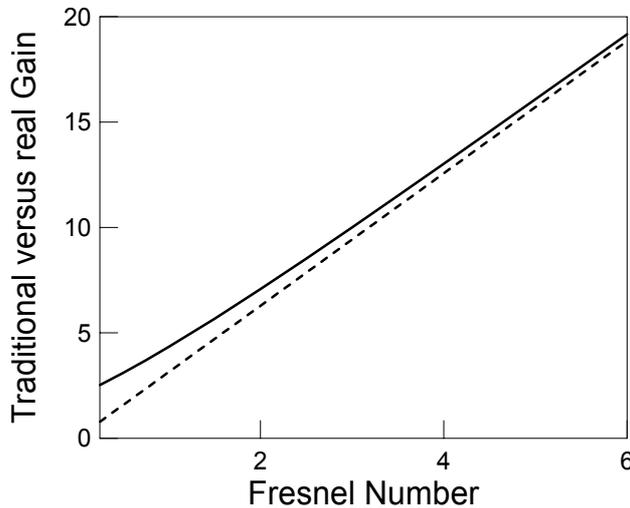


Figura 6. Comparación entre la ganancia real y la ganancia tradicional, en función del número de Fresnel.

## REFERENCIAS

- [1] H. T. O'Neil, *Theory of focusing radiators*, J. Acoust. Soc. Am. **21** (1949) 516-526.
- [2] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press (1999).
- [3] B. G. Lucas and T. G. Muir, *The field of a focusing source*, J. Acoust. Soc. Am. **72** (1982) 1289-1296
- [4] Yu. Makov, V. Espinosa, V.J. Sánchez-Morcillo, J. Cruañes, J. Ramis and F. Camarena, *Strong on-axis focal shift and its nonlinear variation in low-Fresnel-number ultrasound beams*, J. Acoust. Soc. Am. **119**, 3618-3624 (2006)