

GENERACIÓN DE LENTES ULTRASÓNICAS MEDIANTE FRACTALES DE CANTOR POLIÁDICOS

PACS: 43.35. Bf

Sergio Castiñeira-Ibáñez^{1,2}; Daniel Tarrazó-Serrano; Pilar Candelas²; Jose Miguel Fuster³; Constanza Rubio²

¹Departamento de Ingeniería Electrónica, Universitat de València. Avd. de la Universitat s/n. 46100 Burjassot, Valencia, Spain

E-mail: casiser@uv.es

²Centro de Tecnologías Físicas: Acústica, Materiales y Astrofísica, Universitat Politècnica de València, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain

datarser@upv.es, pcandelas@fis.upv.es, crubiom@fis.upv.es

³Departamento de Comunicaciones, Universitat Politècnica de València, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain

E-mail: jfuster@dcom.upv.es

Palabras Clave: Lentes ultrasónicas, Fractales, Modulación

ABSTRACT

The use of flat ultrasonic lenses has become a possibility for the shaping and / or targeting of ultrasonic beams in the field of industry, food engineering and biomedical applications. In this work, we present lens designs based on polyadic Cantor fractals (PCFL). Flat lenses with this type of geometry are easy to implement and, through diffractive phenomena of acoustic waves, are able to modulate the beam in the axial axis.

RESUMEN

El uso de lentes ultrasónicas planas se ha convertido en una posibilidad para la conformación y/o la focalización de haces ultrasónicos en el campo de la industria, la ingeniería de alimentos y las aplicaciones biomédicas. En este trabajo se presentan diseños de lentes basadas en los fractales de Cantor poliádicos (LFCP). Lentes planas con este tipo de geometrías son fáciles de implementar y, mediante fenómenos difractivos de las ondas acústicas, son capaces de modular el haz en el eje axial.

INTRODUCCIÓN

La teoría ondulatoria aplicada a las diferentes áreas de la física tiene una gran similitud. Como consecuencia, muchos conceptos utilizados en esta área relacionados con el guiado de ondas utilizando estructuras fractales se han trasladado al área de la acústica para dar un nuevo enfoque en la construcción de lentes ultrasónicas basadas en estructuras fractales. Estas lentes siendo planas, son capaces de modular el haz de ultrasonidos igual que lo hacen las lentes convencionales, con la diferencia que la capacidad para enfocar y guiar las ondas de estas últimas se consigue gracias a las superficies curvas y el material refractario utilizado, Figura 1. Entre las diferentes estructuras fractales, este trabajo se centra en conjuntos de

Cantor poliádicos (PCS, del inglés polyadic Cantor sets). Este tipo de fractales se construyen mediante algoritmos muy sencillos, siendo ésta la principal razón por la que la mayoría de los estudios realizados se basan en fractales de Cantor [1-3]. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es presentar la generación y caracterización de estructuras fractales basadas en PCS y analizar su aplicación como lentes ultrasónicas.

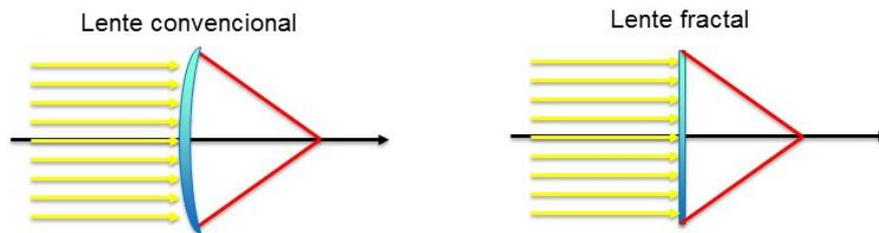


Figura 1.- Lente convencional curva y refractiva. Lente fractal plana.

CONSTRUCCIÓN DE LENTES PLANAS BASADAS EN CONJUNTOS DE CANTOR GENERALIZADOS

Los conjuntos de Cantor generalizados se realizan siguiendo la misma construcción del conjunto clásico de Cantor sustituyendo la razón 1/3 por una razón arbitraria $0 < r < 1/2$. Se obtienen conjuntos con las mismas propiedades, pero con diferente dimensión fractal (D). Esta dimensión siempre está comprendida entre 0 y 1. Los conjuntos de Cantor generalizados se caracterizan por los parámetros que se muestran en la Figura (2): N , número de copias del iniciador, r que es el factor de escala que reduce cada nueva copia en la siguiente etapa, ε que representa la anchura de uno de los huecos laterales generado en la primera etapa, g_c que representa la anchura del hueco central y s que denota la etapa de construcción del fractal. El tamaño de todos los segmentos que pertenecen a la misma etapa (s) son idénticos y su valor viene dado por la expresión:

$$W_s = L r^s \quad (1)$$

donde L representa la longitud del segmento inicial (iniciador).

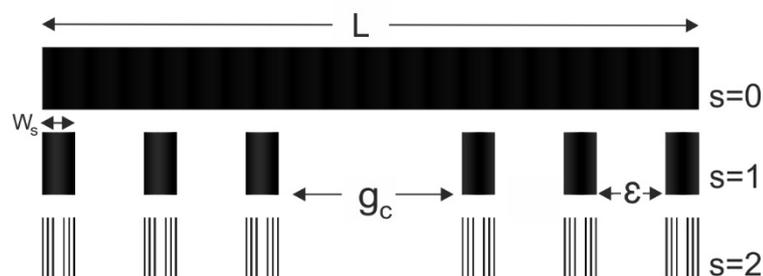


Figura 2.- Construcción del conjunto de Cantor generalizado. Se muestran los parámetros característicos y las primeras etapas de la construcción.

En la etapa siguiente, el iniciador se sustituye por un número de copias escaladas de sí mismo. Este proceso, se repite en las etapas siguientes. Hablando de manera estricta, se llega a un fractal cuando el número de etapas tiende a infinito. Cuando este proceso se ve truncado por la imposibilidad física de alcanzar el infinito, se obtiene las llamadas estructuras prefractales [4].

Si se denomina n_{gaps} al número de huecos de la etapa iniciadora, la dimensión fractal se calcula como:

$$D = \frac{\ln(n_{gaps} + 1)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (2)$$

Si se fija el número de elementos N , se tiene que variar el factor de escala r para obtener diferentes dimensiones fractales D . Con ello, el descriptor fractal D pasa a ser una medida directa de la transparencia del prefactal generado.

El parámetro g_c se relaciona con la fracción de hueco central mediante la expresión:

$$g_c = (1 - rN)f_{g_c} \quad (3)$$

Los Conjuntos de Cantor Generalizados pueden ser de orden par e impar. Los de orden par tienen en la etapa iniciadora, justo en el medio, un hueco central, y un número par de huecos a ambos lados del central (huecos laterales). En cambio, los de orden impar, tienen en la zona central un segmento de los N del iniciador y en los laterales de éste, dos huecos de igual tamaño (huecos adyacentes). Si se suma el espacio de los huecos laterales de orden impar se obtiene el equivalente al hueco central del fractal de orden par. Se completa la construcción del fractal de orden impar con huecos laterales de igual tamaño a ambos lados, Figura 3.

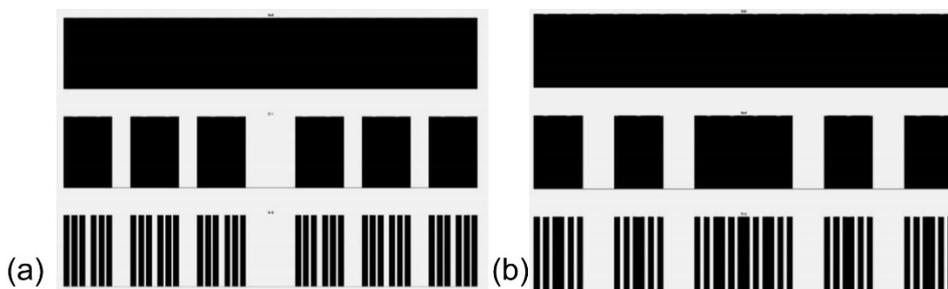


Figura 3.- (a) Conjunto de Cantor generalizado de orden par ($N=6$). (b) Conjunto de Cantor generalizado de orden impar ($N=5$).

Para la construcción de la lente prefactal basta con fijarse en la Figura 4(a), donde a partir del prefactal de cantor generalizado y en la etapa $s=2$ que se denomina generadora, se sitúa en el centro un eje perpendicular (OZ). Al girar 180 grados sexagesimales la estructura se generan una serie de anillos concéntricos al eje OZ y contenidos en el plano perpendicular OXY , tal y como se muestra en la Figura 4(b).

Se ha obtenido pues una lente plana formada por anillos concéntricos siguiendo el algoritmo de los conjuntos de Cantor generalizados. Este tipo de lentes se les denomina PCFLs (del inglés Polyadic Cantor Fractal Lenses), [4].

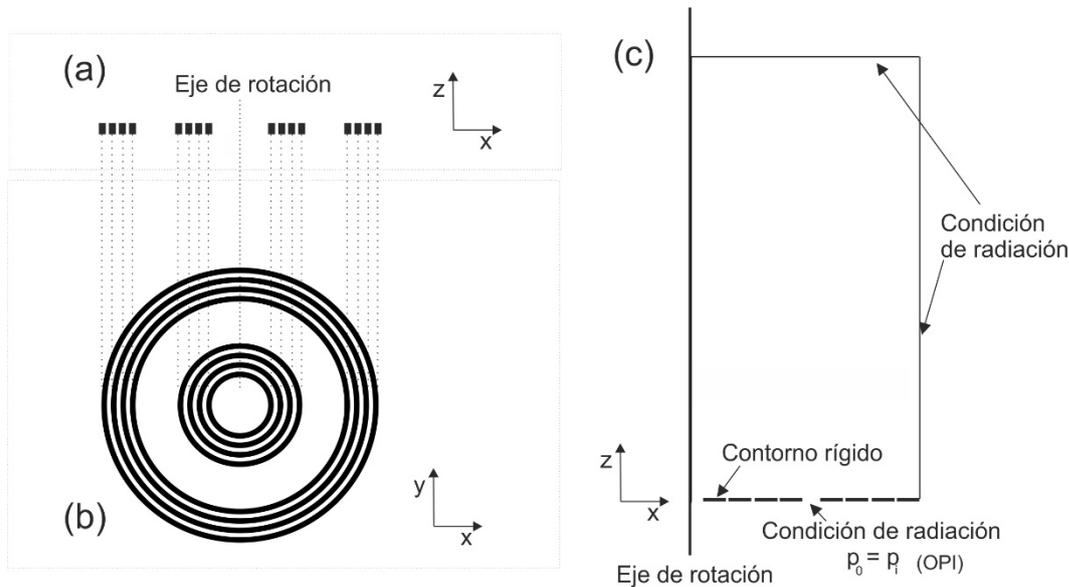


Figura 4.- (a) Estructura fractal $s=2$ situada en plano OXZ con eje de rotación centrado. (b) Lente circular obtenida al girar la estructura fractal 180° alrededor del eje OZ. Esta lente está situada en el plano OXY. (c) Modelo numérico 2D axisimétrico para la obtención de los resultados. Este modelo está situado en el plano OXZ y realiza el giro sobre el eje OZ.

MODELO NUMÉRICO

Actualmente existe un gran número de técnicas matemáticas para resolver problemas que tengan en cuenta la interacción de las ondas ultrasónicas con estructuras inmersas en agua. En este trabajo se ha utilizado el Método de los Elementos Finitos (FEM), en concreto el programa comercial COMSOL Multiphysics. Este método resuelve, de manera sencilla, formas geométricas complejas que incorporan múltiples fenómenos acústicos. Para resolver el problema es necesario definir la geometría a analizar, implementar correctamente las condiciones de contorno y discretizar el dominio de resolución.

Se resuelve la ecuación de ondas,

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \frac{\omega^2}{c^2 \rho} p = 0 \quad (4)$$

ecuación en derivadas parciales, y se estudia la propagación de la onda plana (OPI) a lo largo de la dirección OZ en el interior del medio. Los parámetros son: ρ densidad del medio (1000 kg/m^3), ω representa la frecuencia angular, c la velocidad ultrasónica (1500 m/s) y p la presión acústica.

En la Figura 4(c) se muestra el esquema del modelo numérico utilizado: ideal 2D axisimétrico. Este modelo permite realizar estudios 2D equivalentes a 3D, reduciendo considerablemente los tiempos de cálculo. Como se observa en la Figura 4(c), los elementos que forman el 2D se consideran rígidos por lo que se consideran contorno rígido (condición de Neumann). Los contornos que rodean al medio se consideran de radiación onda plana (condición de radiación Sommerfeld). Esta condición de radiación evita la reflexión de las ondas del dominio hacia el interior del mismo emulando un espacio infinito. El programa de resolución numérica realiza la rotación descrita en la sección anterior para obtener el equivalente real que se muestra en la Figura 5.

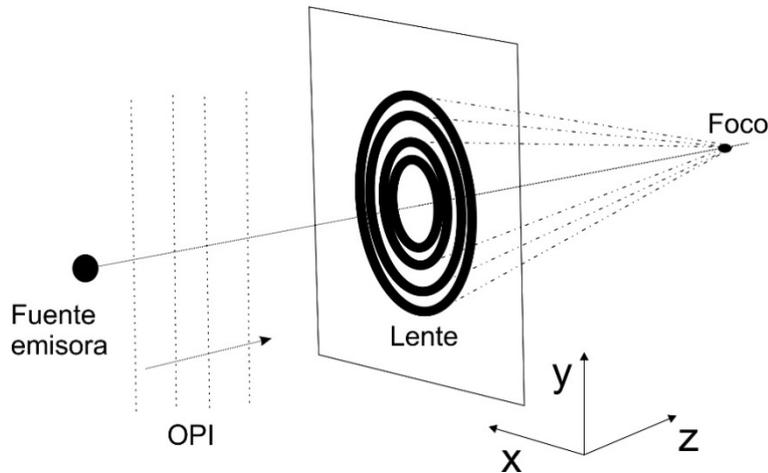


Figura 5.- Posición de la lente fractal en 3D. La fuente emisora produce ondas planas que viajan en la dirección del eje OZ y la lente modula el haz focalizando en el eje perpendicular por su centro,

Los cálculos realizados consisten en mapas de ganancia de presión acústica detrás de la lente, mediante la expresión:

$$G_{foco} = 20 \cdot \log_{10} \left| \frac{p}{p_i} \right| \quad (\text{dB}) \quad (5)$$

donde p representa la presión en cualquier punto y p_i representa la presión incidente de la onda plana.

RESULTADOS

Una vez presentados los parámetros de diseño de la lente se analiza la modulación del haz utilizando el método numérico descrito en la sección anterior. Para ello, se ha seleccionado una lente de $R = 12,5$ cm con grosor despreciable en comparación con la longitud de onda de trabajo. Los parámetros de diseño se ajustan inicialmente a los siguientes valores: $D = 0,6$, $N = 5$, $f_{gc} = 0,4$ obteniendo una lente como la mostrada en la Figura 6.

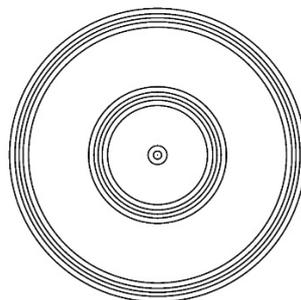


Figura 6.- Resultado de la PCFL de radio $R=12.5$ cm, $D=0.6$, $N=5$ y $f_{gc}=0.4$, grosor despreciable.

Los resultados que se analizan se corresponden con mapas de ganancia de presión sonora. Exactamente se muestra el plano OXZ, es decir, el plano perpendicular a la lente y que pasa por su centro. Es en este plano donde se observa la posición e intensidad de los diferentes focos obtenidos con la lente.

VARIACIÓN DE LA DISTANCIA FOCAL CON LA FRECUENCIA

Se fijan los parámetros $R = 12.5$ cm, $D = 0.6$, $N = 5$ y $f_{gc} = 0.4$. Se analiza cómo varía la posición de la distancia focal cuando es variada la frecuencia de excitación entre 50 kHz y 400 kHz. Los resultados se muestran en la Figure 7. Como se puede observar, la posición del foco más cercano a la lente varía su posición cuando la frecuencia aumenta de valor. Esta variación es lineal con la frecuencia, cumpliendo la ecuación:

$$d_{foco}(f) = d_{foco}(50kHz) \cdot \frac{f(kHz)}{50 kHz} \quad (6)$$

La representación gráfica de la ecuación 6 se muestra en la Figura 7 con trazo discontinuo rojo

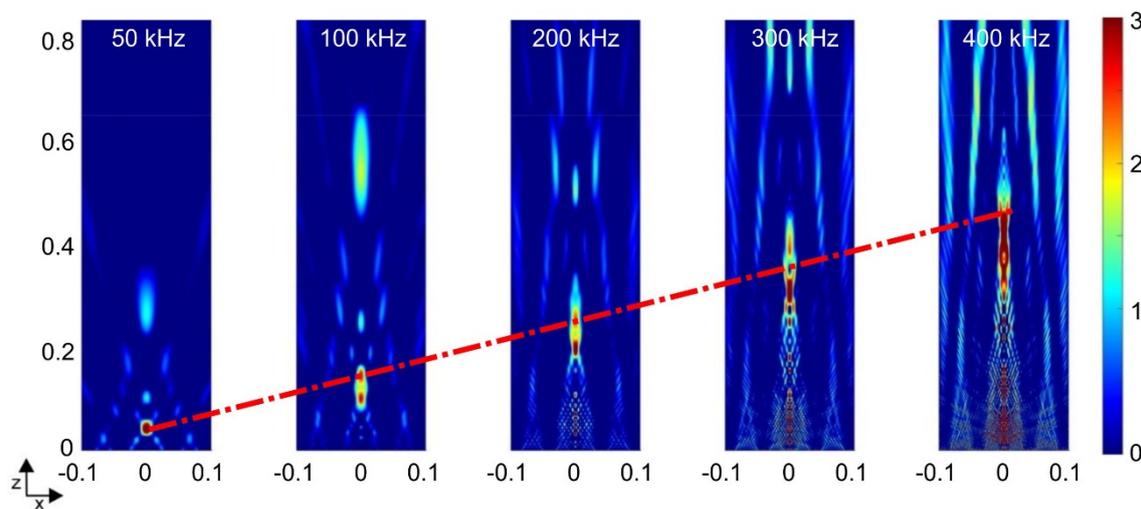


Figura 7.- Mapas de ganancia de presión sonora, en dB, para las frecuencias 50, 100, 200, 300 y 400 kHz obtenidos en el plano OXZ.

EFFECTO SOBRE EL FOCO DE LA VARIACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL D

Fijando los parámetros $R = 12.5$ cm, $f = 100$ kHz, $N = 5$ y $f_{gc} = 0.4$, se analiza la repercusión del cambio de la dimensión fractal D de la PCFL. Así, se ha variado la dimensión fractal entre 0.5 y 0.8, mostrando los resultados en la Figura 8. Como se puede observar, la posición de los focos no varía, en cambio aumenta la potencia sonora conforme la dimensión fractal crece. Es interesante observar en la Figura 8 como al aumentar la dimensión fractal, la lente se hace menos transparente mientras que la potencia en los focos aumenta considerablemente.

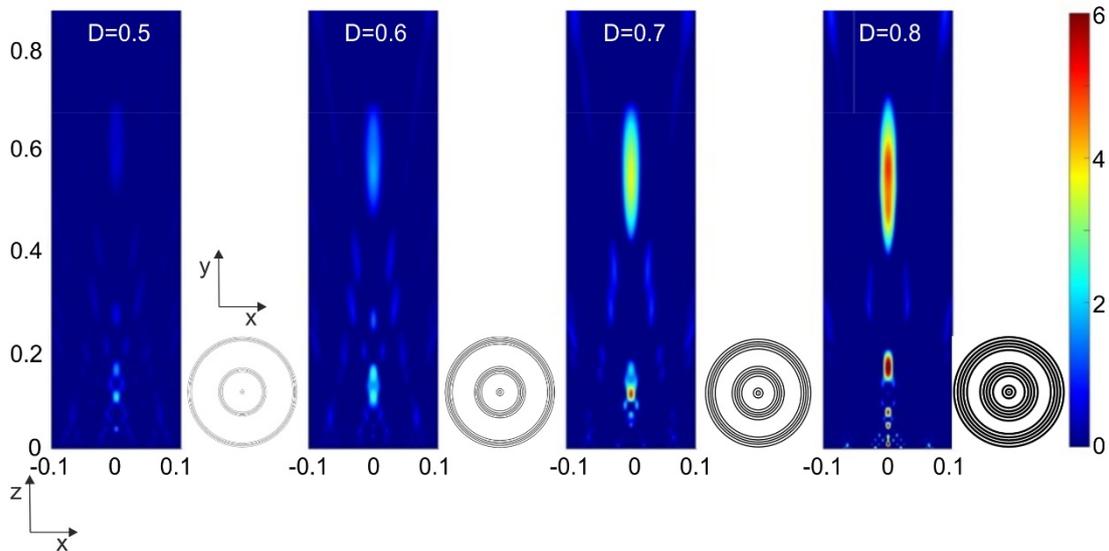


Figura 8.- Mapas de ganancia de presión sonora, en dB, para la frecuencia 100 kHz obtenidos en el plano OXZ, para diferente dimensión fractal: $D=0.5, 0.6, 0.7$ y 0.8 . Se muestra a la derecha de cada resultado la lente fractal situada en el plano OXY.

EFFECTO SOBRE EL FOCO DE LA VARIACIÓN DEL NÚMERO DE ELEMENTOS N

Fijando los parámetros $R = 12.5$ cm, $f = 100$ kHz, $D = 0.6$ y $f_{gc} = 0.4$, se analiza la repercusión del cambio del número de elementos sólidos N que constituyen la PCFL. Así, se ha variado este parámetro entre 4 y 7, mostrando los resultados en la Figura (9). Como se puede observar, la posición de los focos no varía, en cambio disminuye la potencia sonora conforme N crece.

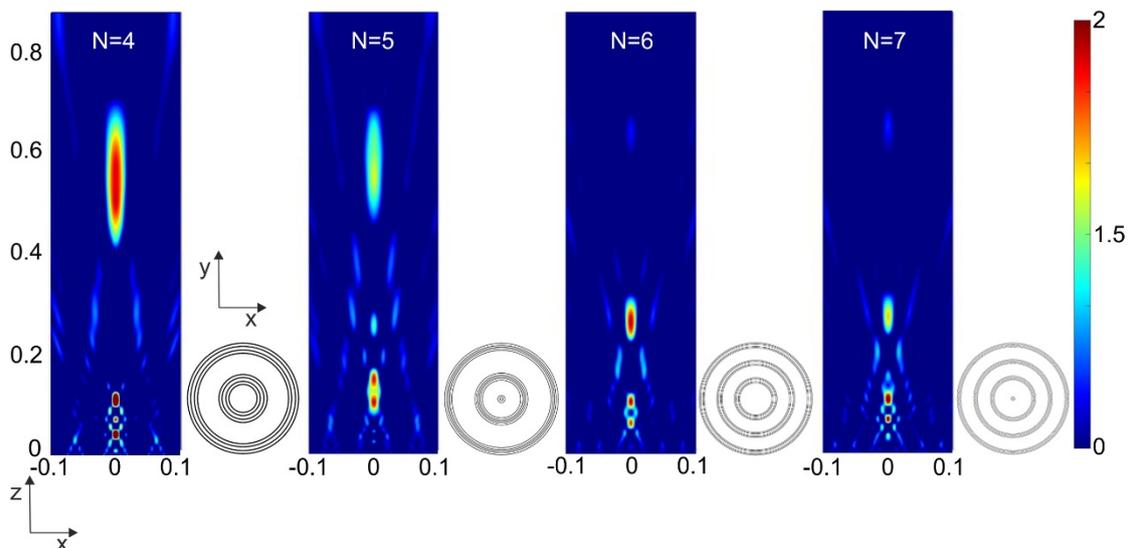


Figura 9.- Mapas de ganancia de presión sonora, en dB, para la frecuencia 100 kHz obtenidos en el plano OXZ, para diferente número de elementos de $s=2$: $N=4, 5, 6$ y 7 . Se muestra a la derecha de cada resultado la lente fractal situada en el plano OXY.

Es interesante observar en la Figura 9 como al aumentar el número de elementos sólidos N , la lente se hace más transparente mientras que la potencia en los focos más alejados disminuye,

mientras que aumenta en los focos más cercanos a la lente. En la Tabla 1 se muestran los resultados numéricos para este caso.

Tabla 1

N	f_{g_c}	r	$g_c/2R$	D
4	0.4	0.099	0.241	0.6
5	0.4	0.068	0.263	0.6
6	0.4	0.050	0.278	0.6
7	0.4	0.039	0.290	0.6

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una manera sencilla de obtener lentes planas construidas según algoritmos fractales con las que se puede modular el haz ultrasónico que la atraviesa. Una vez que se diseña el PCFL, se consigue un desplazamiento preciso del foco a lo largo del eje Z y se controla variando ligeramente la frecuencia de trabajo. La dimensión fractal (D) afecta a la ganancia del foco principal del mapa de presión. Por último, variando el número de elementos en la etapa $s = 1$ (N) permite aumentar la ganancia de focos adicionales o más cercanos. Esto proporciona al usuario un parámetro dinámico para controlar la posición de enfoque sin modificar la lente. Este control dinámico es crítico en aplicaciones médicas donde el enfoque de un haz ultrasónico permite la ablación térmica de los tumores.

AGRADECIMIENTOS

Investigación apoyada por el Ministerio de Economía, Industria y Competitividad y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional TEC2015-70939-R (MINECO / FEDER)

BIBLIOGRAFIA

- [1] Saavedra G, Furlan WD, Monsoriu JA. Fractal zone plates. Optics Letters, **28** (12):971–973 (2003)
- [2] Monsoriu JA, Saavedra G, Furlan WD. Fractal zone plates with variable lacunarity. Optics Express, **12**(18):4227–4234 (2004)
- [3] Furlan WD, Saavedra G, Monsoriu JA. White-light imaging with fractal zone plates. Optics Letters, **32**(15):2109–2111 (2007)
- [4] S. Castiñeira-Ibáñez, D. Tarrazó-Serrano, J. M. Fuster, P. Candelas and C. Rubio, Polyadic Cantor Fractals: Characterization, Generation, and Application as Ultrasonic Lenses, Chapter from the book Fractal Analysis - Applications in Health Sciences and Social Sciences, INTECH (2017)