

ESTRATEGIA H-ADAPTATIVA DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL ANÁLISIS ACÚSTICO DE PROBLEMAS CON VARIAS FRECUENCIAS NATURALES

REFERENCIA PACS: 43.20.Ks

Fuenmayor Fernández, F. J.; Denia, F. D. ; Albelda, J. y Giner, E.
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales. Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera, s/n.
46022 Valencia. España
Tel: 34 963 877 626
Fax: 34 963 877 629
E-Mail: ffuenmay@mcm.upv.es

ABSTRACT

This work presents a h-adaptive finite element strategy to obtain the optimum mesh in the analysis of acoustic problems with several natural frequencies considered simultaneously. When consistent mass matrices are used, the discretization error is basically due to the kinetic energy approximation. This allows to use error estimators similar to those applied in structural problems. a h-adaptive strategy has been developed to achieve the optimum mesh in which the desired error for each frequency is obtained.

RESUMEN

Este trabajo presenta una estrategia h-adaptativa de elementos finitos que permite obtener la malla óptima en el análisis de problemas acústicos donde se consideran simultáneamente varias frecuencias naturales. Cuando se utilizan matrices de masas consistentes, el error de discretización es fundamentalmente debido a la energía cinética aproximada. En este caso es posible utilizar estimadores de error similares a los empleados en los problemas de análisis de tensiones. Se ha desarrollado una estrategia h-adaptativa que permite alcanzar la malla óptima en la que se obtiene el error deseado para cada una de las frecuencias estudiadas.

1. INTRODUCCIÓN

En recientes trabajos, han sido desarrollados y validados algunos métodos de estimación de error de discretización en problemas acústicos. La referencia [1] utiliza la técnica de alisado del campo en un entorno definido en los puntos de superconvergencia (en terminología anglosajona *superconvergent patch recovery* o simplemente SPR), desarrollada por Zienkiewicz y Zhu [2, 3], aplicada a problemas acústicos considerando variables complejas. La técnica de SPR ha sido aplicada fundamentalmente a problemas de obtención de frecuencias y modos naturales en estructuras y se ha demostrado que conduce a una correcta estimación del error [4, 5]. Este trabajo utiliza la técnica del SPR adaptada al problema acústico, tal como se presentó en [1], con el fin de estimar el error de discretización en la obtención de frecuencias naturales acústicas. En este problema, se estima el error cometido en la frecuencia natural asociada a cada modo, mediante la comparación del gradiente de presión acústica calculado por elementos finitos y el

asociado a una solución mejorada. Los ejemplos numéricos presentados muestran una buena concordancia entre el error real y el error estimado mediante esta técnica. Una vez estimado el error de discretización, se mostrará como es posible definir una nueva malla de elementos finitos que permita alcanzar el nivel de error deseado previamente. Usualmente, el problema de h-adaptatividad en acústica, considera el problema de la obtención de la respuesta del sistema a una excitación armónica con una frecuencia dada [6]. El estudio del problema de autovalores sólo se aborda en la bibliografía asociada al problema de análisis de tensiones. En la referencia [5], se trata la obtención de la malla óptima para el cálculo de una única frecuencia natural y su modo asociado. En [7] se considera el problema de obtener la malla óptima para un conjunto de frecuencias naturales, entendida ésta como la malla cuyo error medio asociado al conjunto de autovalores es menor que el deseado. En este trabajo se presentará una estrategia adaptativa con el fin de obtener una malla óptima para un conjunto de frecuencias naturales acústicas, cuando se desea un error diferente para cada una de ellas. Tradicionalmente se ha definido la malla óptima como aquella que distribuye uniformemente el error absoluto entre todos los elementos [8]. Recientemente se ha mostrado que dicho criterio es equivalente a minimizar el número de elementos de la malla [9].

La estrategia presentada en este trabajo se aplicará a dos problemas. Primero, el problema de una recinto rectangular, cuya solución analítica exacta es conocida y permitirá validar la metodología. En segundo lugar, un problema más realista que permita evaluar la potencialidad del método propuesto.

2. ESTIMACIÓN DE ERROR Y DEFINICIÓN DE LA ESTRATEGIA H-ADAPTATIVA

El error exacto asociado a cada frecuencia natural puede definirse como

$$e_{wes(r)}^2 = \mathbf{w}_{ef(r)}^2 - \mathbf{w}_{ex(r)}^2 \quad (1)$$

donde $\mathbf{w}_{ef(r)}$ es la frecuencia natural r-ésima obtenida mediante el método de elementos finitos y $\mathbf{w}_{ex(r)}$ es la correspondiente frecuencia exacta. En general, el valor exacto no será conocido y se deberá considerar un valor estimado del error previamente definido, que se denotará mediante $e_{wes(r)}$. Dicho error estimado puede obtenerse elevando al cuadrado la norma del error de discretización $\|e_{es(r)}\|^2$ derivado de un alisado del gradiente de presión acústica $\nabla p_{a(r)}^*$ [4].

$$e_{wes(r)}^2 \approx \|e_{es(r)}\|^2 = \int_V (\nabla p_{a(r)}^* - \nabla p_{aef(r)})^T (\nabla \tilde{p}_{a(r)}^* - \nabla \tilde{p}_{aef(r)}) dV \quad (2)$$

donde $\nabla p_{aef(r)}$ es el gradiente de la presión acústica obtenido a partir de la solución inicial de elementos finitos y correspondiente al modo r-ésimo, la tilde denota magnitudes complejas conjugadas y V es el volumen asociado al dominio que ocupa el fluido.

La estrategia h-adaptativa se basa en los resultados mostrados en [10]. Cuando se consideran matrices de masa consistentes, refinamiento uniforme y no existen singularidades, el error estimado está acotado por $e_{wes(r)} \leq C_{(r)} h^p$, donde h es el tamaño de elemento, p es el grado del polinomio de interpolación y $C_{(r)}$ es una constante positiva que no depende de h. Esta desigualdad tiende a la igualdad en el rango asintótico donde estamos trabajando. La igualdad puede evaluarse localmente considerando que el dominio está definido por un sólo elemento. Teniendo en cuenta dos mallas consecutivas del proceso h-adaptativo, puede definirse la relación entre el error local en la nueva malla y el mismo error en la malla previa mediante

$$\frac{e_{wes(r)}^{(e)}|_{pre}}{e_{wes(r)}^{(e)}|_{new}} \approx \left[\frac{h_{pre(r)}^{(e)}}{h_{new(r)}^{(e)}} \right]^p = (R_{(r)}^{(e)})^p \quad (3)$$

donde $e_{wes(r)}^{(e)}|_{pre}$ es el error estimado para el elemento e de la malla previa de tamaño $h_{pre(r)}^{(e)}$, y

$e_{wes(r)}^{(e)pre}|_{new}$ es el error estimado para todos los elementos de la nueva malla contenidos en el elemento e de la malla previa, cuyo tamaño es $h_{new(r)}^{(e)pre}$. La ecuación (3) define la relación de refinamiento local $R_{(r)}^{(e)}$ para el modo r .

El error total en la malla nueva puede evaluarse como una función que dependerá del error estimado en la malla previa y la relación de refinamiento local,

$$e_{wes(r)}^{(e)}|_{new}^2 = \sum_{e=1}^{N_{new}} e_{wes(r)}^{(e)}|_{new}^2 = \sum_{e=1}^{N_{pre}} e_{wes(r)}^{(e)pre}|_{new}^2 = \sum_{e=1}^{N_{pre}} \left(e_{wes(r)}^{(e)}|_{pre}^2 \left(R_{(r)}^{(e)} \right)^{-2p} \right) \quad (4)$$

donde N_{pre} y N_{new} son el número de elementos en la malla previa y en la nueva, respectivamente. El número de elementos de la nueva malla contenidos en el elemento e de la malla previa puede estimarse para problemas bidimensionales mediante

$$N_{new(r)}^{(e)pre} \approx \left(R_{(r)}^{(e)} \right)^2 \quad (5)$$

y, por lo tanto, el número total de elementos en la nueva malla puede estimarse como

$$N_{new(r)} \approx \sum_{e=1}^{N_{pre}} \left(R_{(r)}^{(e)} \right)^2 \quad (6)$$

3. MALLA ÓPTIMA PARA UN CONJUNTO DE MODOS

En el caso de considerar simultáneamente varios modos naturales, el problema de definir la malla óptima consiste en la minimización del número de elementos en la malla nueva,

$$N_{new} = \sum_{e=1}^{N_{pre}} \left(R^{(e)} \right)^2 \quad (7)$$

sujeto al cumplimiento del error deseado para cada modo $e_{w(r)}|_d$ considerado en el análisis

$$\sum_{e=1}^{N_{pre}} \left(e_{wes(r)}^{(e)}|_{pre}^2 \left(R^{(e)} \right)^{-2p} \right) - e_{w(r)}|_d^2 = 0 \quad r = 1, \dots, N_M \quad (8)$$

donde N_M es el número de modos. La solución de este problema fue presentada en [11] y conduce a

$$\left(R^{(e)} \right)^{2(p+1)} = \sum_{r=1}^{N_M} \left[\mathbf{x}_r \left(R_{(r)}^{(e)} \right)^{2(p+1)} \right] \quad (9)$$

donde \mathbf{x}_r es el factor de contribución al refinamiento global del modo r . Esta expresión permite calcular la relación de refinamiento local para cada elemento de la malla previa. El factor de contribución al refinamiento global de cada uno de los modos puede obtenerse del sistema de ecuaciones

$$\sum_{e=1}^{N_{pre}} \left[e_{wes(r)}^{(e)}|_{pre}^2 \left(\sum_{j=1}^{N_M} \left(\mathbf{x}_j \left(R_{(j)}^{(e)} \right)^{2(p+1)} \right)^{-\frac{p}{p+1}} \right) \right] = e_{w(r)}|_d^2 \quad r = 1, \dots, N_M \quad (10)$$

Por lo tanto, la relación de refinamiento local para un conjunto de modos naturales puede evaluarse como una función de las relaciones de refinamiento local $R_{(j)}^{(e)}$ obtenidas para cada uno

de dichos modos [4], multiplicados por los correspondientes factores de contribución al refinamiento global α_j que actúan como pesos. Los valores de estos factores pueden ser positivos, negativos o nulos. Un valor positivo significa que es necesario tener en cuenta el refinamiento de ese modo para alcanzar el error deseado. Un valor nulo implica que el modo no participa en el refinamiento de la malla, así que el refinamiento impuesto por los otros modos permite alcanzar el error deseado en el modo r sin necesidad de refinamiento adicional. Por último, un valor negativo significa que los otros modos refinan la malla de modo que el error en el r -ésimo modo es menor del deseado (en realidad este modo tiende a alcanzar refinamientos locales inferiores de los obtenidos pero ese nivel de refinamiento está ya impuesto para conseguir el error deseado en otros modos). Consecuentemente, los modos con factores de contribución al refinamiento global negativos deben ser excluidos del sistema de ecuaciones (8) durante el proceso de obtención de la malla óptima.

4. EJEMPLOS NUMÉRICOS Y DISCUSIÓN

Con el objeto de validar la metodología propuesta y presentar un ejemplo de aplicación se estudiaron dos problemas bidimensionales cuando el medio es aire. En primer lugar se obtuvieron los modos acústicos asociados a un recinto rectangular con paredes rígidas de dimensiones $L_x = 1.6$ m. y $L_y = 1$ m., cuya solución analítica exacta es conocida. Las figuras 1 (a) y 1 (b) muestran el índice de efectividad para una secuencia de mallas con elementos triangulares lineales y cuadráticos, respectivamente. El refinamiento incluye diez modos naturales simultáneamente (sólo se consideran desde el segundo al décimo modo puesto que el error en el primero asociado a una presión constante es cero).

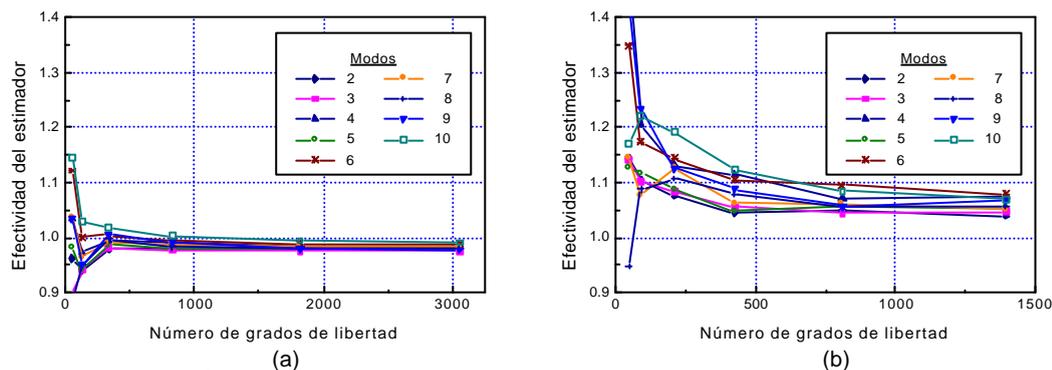
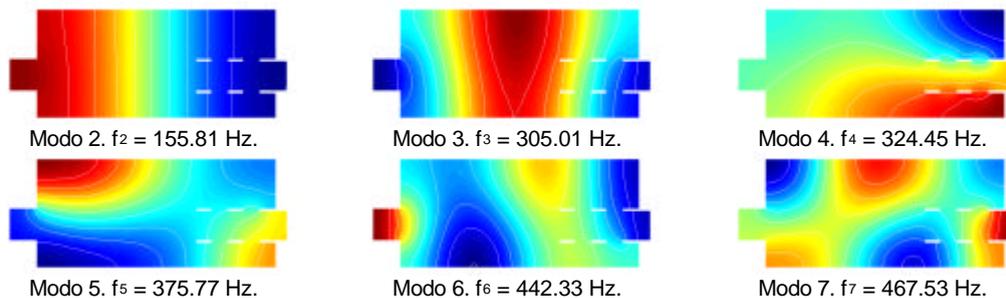


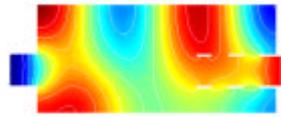
Figura 1. Índice de efectividad en función del número de modos para un recinto rectangular: (a) elementos triangulares lineales. (b) elementos triangulares cuadráticos.

Como ejemplo de aplicación se estudio una cámara bidimensional similar a la analizada en [6] limitando el error relativo a un 5 % en el caso de elementos triángulos lineales y al 2 % en el de cuadráticos. La Figura 2 muestra del segundo al décimo modo junto con sus frecuencias naturales calculados con la malla óptima con elementos cuadráticos.

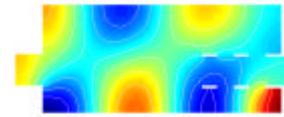




Modo 8. $f_8 = 526.68$ Hz.



Modo 9. $f_9 = 554.98$ Hz.



Modo 10. $f_{10} = 602.103$ Hz.

Figura 2. Modos naturales de presión del silenciador con elementos triangulares cuadráticos y malla óptima.

En las Figuras 3 y 4 se presenta el error relativo utilizando triángulos lineales y cuadráticos. En las gráficas (a) sólo se considera el refinamiento del décimo modo y en las (b) se consideran simultáneamente los nueve modos. Se aprecia que en escala logarítmica los errores relativos estimados tienen un comportamiento lineal lo que nos confirma que dicho error satisface la ecuación $e_{we_s(r)} \leq C_{(r)} h^p$. También se observa que si se considera únicamente el refinamiento del modo 10, los modos 4, 7, 8 y 9 no satisfacen el error relativo deseado.

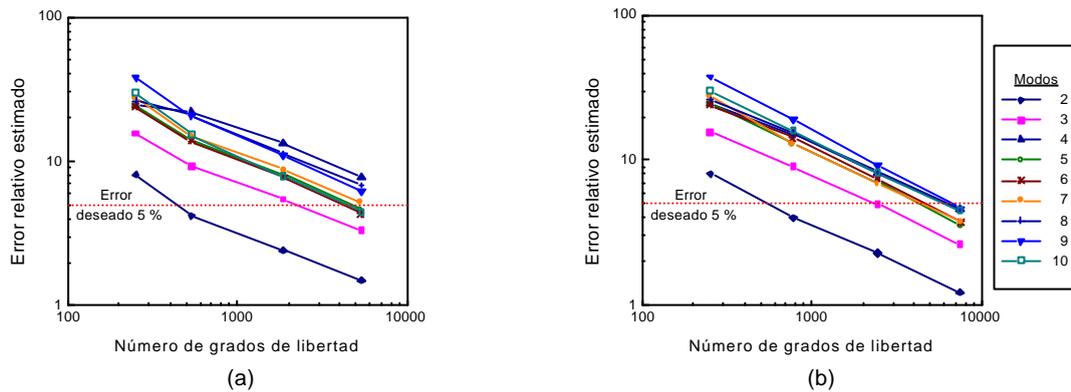


Figura 3. Error relativo estimado para un silenciador con elementos triangulares lineales: (a) refinamiento según el error del décimo modo. (b) refinamiento considerando los nueve modos simultáneamente.

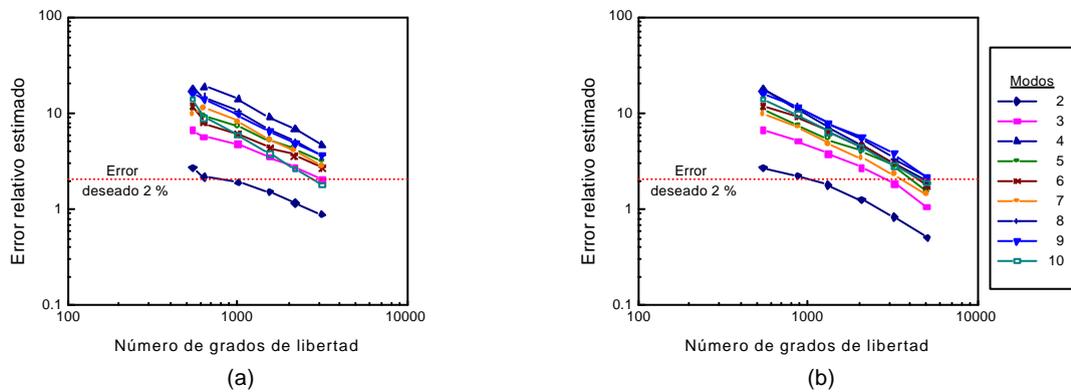


Figura 4. Error relativo estimado para un silenciador con elementos triangulares cuadráticos: (a) refinamiento según el error del décimo modo. (b) refinamiento considerando los nueve modos simultáneamente.

En la Figura 5 se pueden observar los factores de contribución al refinamiento global cuando se utilizan triángulos lineales y cuadráticos. Se observa que solamente contribuyen al refinamiento global los modos 5, 9 y 10, lo que significa que ellos son capaces de refinar a los otros modos.

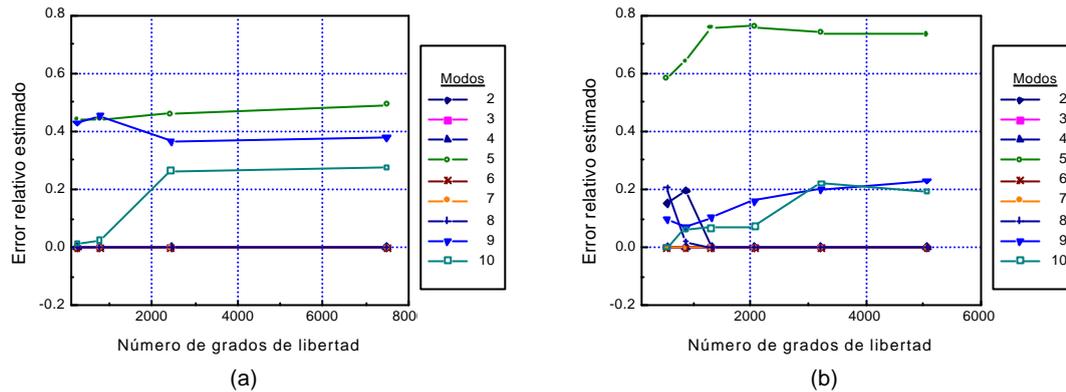


Figura 5. Factores de contribución al refinamiento global de modo para un silenciador:
(a) con elementos triangulares lineales. (b) con elementos triangulares cuadráticos.

Las Figuras 6 (a) y 6 (b) muestran las mallas óptimas asociadas al refinamiento según el décimo modo y al refinamiento considerando todos los modos. Puede observarse que aunque el tamaño de los elementos es del mismo orden, existen diferencias locales, asociadas a las necesidades de refinamiento en ciertas zonas para obtener el error deseado para modos diferentes del décimo.

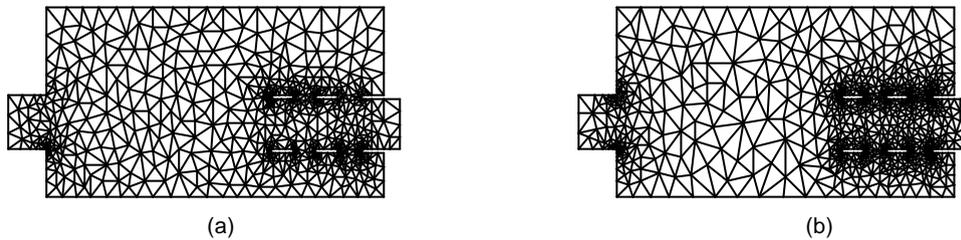


Figura 6. Malla óptima para un silenciador con elementos triangulares cuadráticos:
(a) refinamiento según el error del décimo modo. (b) refinamiento considerando los nueve modos simultáneamente.

5. CONCLUSIONES

Se ha definido un procedimiento h-adaptativo que permite considerar simultáneamente el error cometido para cada uno de los modos naturales a estudiar y obtener la malla óptima para el cálculo de las frecuencias naturales mediante un único análisis. La malla óptima se ha definido como aquella que permite obtener un error menor o igual al especificado para cada una de las frecuencias naturales y tiene asociado un menor número de elementos. El método propuesto se basa en la utilización del factor de contribución al refinamiento global como coeficiente de participación de cada modo en el refinamiento de la malla.

6. AGRADECIMIENTOS:

Este trabajo es resultado del proyecto TAP97-1270-C02-02 de la CICYT.

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] P. Bouillard, J. F. Allard y G. Warzeé 1996 , *Comm. Numer. Methods Eng.* **12**, 581-594. Superconvergent patch recovery technique for the finite element method in acoustics.
- [2] O.C. Zienkiewicz y J. Z. Zhu 1992 *Int. J. Numer. Methods Eng.* **33**, 1331-1364. The superconvergent patch recovery technique and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique.
- [3] O.C. Zienkiewicz y J. Z. Zhu 1992 *Int. J. Numer. Methods Eng.* **33**, 1365--1382. The superconvergent patch recovery technique and a posteriori error estimates. Part 2: error estimates and adaptivity.

- [4] J.-L. Restrepo 1997 Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia. H-adaptatividad de elementos finitos en análisis de frecuencias naturales.
- [5] P. Hager y N. E. Wiberg 1999 *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **176**, 441—462. Adaptive eigenfrequency analysis by superconvergent patch recovery.
- [6] R. Bausys y N. E. Wiberg 1999 *Journal of Sound and Vibration* **226**, 905--922. *Adaptive finite element strategy for acoustic problems.*
- [7] P. Ladeveze y J. P. Pelle 1989 *Int. J. Numer. Methods Eng.* **28**, 1929—1949. Accuracy in finite element computation for eigenfrequencies.
- [8] O. C. Zienkiewicz y J. Z. Zhu 1987 *Int. J. Numer. Methods Eng.* **24**, 337--357. A simple error estimator and adaptive procedures for practical engineering analysis.
- [9] F. J. Fuenmayor y J. L. Oliver 1996 *Int. J. Numer. Methods Eng.* **39**, 4039--4061. Criteria to achieve nearly optimal meshes in the h-adaptive finite element method.
- [10] P. Tong, T. H. H. Pian y L. L. Bucciarelli 1971 *Comput. Structur.* **1**, 623--638. Mode shapes and frequencies by finite element method using consistent and lumped masses.
- [11] F. J. Fuenmayor, J. L. Restrepo, J. J. Ródenas y J. E. Tarancón 1998 *Proc. Fourth World Congress on Computational Mechanics*, 181-203. A formulation of optimal mesh for problems with multiple analysis conditions.