

## **EFEECTO DE LAS IMPEDANCIAS EN EL PATRÓN DE RADIACIÓN DE BOCINAS. ESTUDIO PREVIO: EL TUBO DE SECCIÓN CONSTANTE**

REFERENCIA PACS: 43.20.Rz

Rafael Piscoya Rodríguez  
Universidad Técnica de Berlín  
Einsteinufer 25  
D-10587 Berlín  
Alemania  
Fax: 004930 314 25135  
E-Mail: [Rafael.Piscoya@tu-berlin.de](mailto:Rafael.Piscoya@tu-berlin.de)

El autor es integrante del Laboratorio de Acústica de la Pontificia Universidad Católica del Perú, Av. Universitaria s/n cdra. 18, Lima – Perú.

### **ABSTRACT**

The present work describes the radiation from a (2-dimensional) flat piston that is located at one end of a pipe of a certain length, whose walls are covered with materials of different acoustic behaviour, of mass, spring or resistance type. This behaviour is determined through the acoustic impedance of each material. For simplicity, the pipe inside an infinite hard wall is considered. The wave equation is solved inside as well as outside the pipe in such a way that the boundary conditions imposed by the movement of the piston, the walls of the pipe and the hard wall are satisfied. The frequency dependent radiation efficiency and pattern are calculated for different impedances. This work serve as a pre-study of the main subject, which is the sound radiation from a horn, where the pipe's cross section is no longer constant, but changes with the length. Nevertheless, this case can be studied using the same method of solution. On the other side, the results obtained here give a qualitative idea of the effect the different impedances have on the sound field of a horn.

### **RESUMEN**

El presente trabajo describe la radiación de un pistón plano (bidimensional) que se encuentra en el extremo de un tubo de cierta longitud, cuyas paredes se encuentran recubiertas con materiales de diferente comportamiento acústico, sea tipo masa, rigidez o resistencia. Dicho comportamiento se determina a través de la impedancia acústica de cada material. Por simplicidad se considera que el tubo está empotrado en una pared rígida infinita. La ecuación de onda se resuelve tanto dentro como fuera del tubo de manera que las condiciones de frontera que imponen el movimiento del pistón, las paredes del tubo y la pared rígida se cumplan. Se calculan la eficiencia y el patrón de radiación, que varían con la frecuencia, para diferentes impedancias. Este trabajo sirve como estudio previo al tema central de la investigación que es la radiación de una bocina, en donde ya no se tiene un tubo de sección transversal constante sino que ésta varía con la longitud, sin embargo este caso puede ser investigado empleando el mismo método de solución, por otro lado, los resultados aquí obtenidos permiten tener una idea cualitativa del efecto que producen las distintas impedancias en el campo sonoro que produce una bocina.

**INTRODUCCIÓN**

El campo sonoro que produce una fuente de dimensión finita empotrada en una pared rígida infinita se puede determinar si se conoce su distribución de velocidades, puesto que la presión sonora en todo punto del espacio es una función de la Transformada de Fourier de la velocidad. Cuando la fuente, en este caso un pistón plano, no está sobre la superficie de la pared sino en el extremo de un tubo, la distribución de velocidades que produce el campo ya no es la del pistón sino la que se tiene en la boca del tubo. La forma de esta velocidad va a cambiar de acuerdo al tipo de impedancia que tienen las paredes del tubo. Se estudiarán los casos límites en los que las paredes del tubo tienen impedancia infinita e impedancia nula así como los casos de impedancias tipo masa, rigidez y resistencia.

**DESCRIPCIÓN DEL CAMPO SONORO**

El campo sonoro que produce el pistón estará completamente determinado si se conoce la presión dentro del tubo  $p_i(x,y)$  y la presión fuera del tubo  $p_e(x',y')$ . Ambas funciones son soluciones de la ecuación de onda que deben satisfacer las condiciones de frontera. Para obtener la solución  $p_i$  se utiliza el método usual para estudiar la absorción en canales, que es el de reemplazar el tubo real de ancho  $2h$  e impedancia  $Z$  en ambas paredes por el de un tubo con la mitad de ancho y con una de las paredes rígidas. Esta pared rígida sirve como "espejo" para la otra mitad del tubo. Este método es aplicable debido a la simetría del sistema.

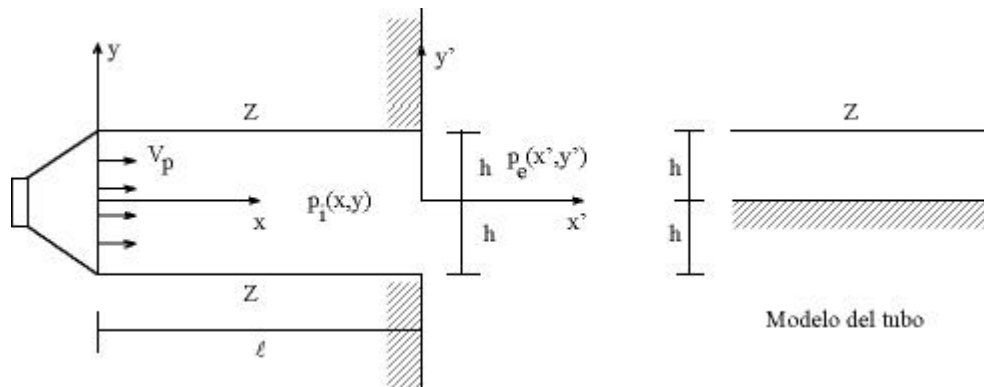


Figura 1 Sistema real y modelo empleado en la solución

Considerando una solución de la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 p_i(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_i(x, y)}{\partial y^2} + k^2 p_i(x, y) = 0 \tag{1}$$

del tipo  $p_i(x, y) = \Phi(x)\Psi(y)$  e imponiendo las condiciones de frontera:

$$v_y(x, y = 0) = 0 \quad , \quad v_y(x, y = h) = \frac{-p_i(x, y = h)}{Z} \tag{2}$$

se obtiene la expresión:

$$p_i(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{-jk_n x} + B_n e^{jk_n x}) \cos(k_{ny} y) \quad , \quad k_n = \sqrt{k_0^2 - k_{ny}^2} \tag{3}$$

donde  $k_{ny}$  satisface la ecuación de valores propios:

$$k_{ny} \tan(k_{ny} h) = j \frac{k_0}{Z / \rho c} \tag{4}$$

La ecuación trascendente (4) puede resolverse numéricamente o empleando un método gráfico.

La forma de la solución (3) indica que dentro del tubo existen modos de oscilación transversales con numero de onda  $k_{ny}$  que se excitan por el movimiento del pistón y se propagan a lo largo del tubo con número de onda  $k_n$ . El primer término entre paréntesis corresponde a ondas que se propagan en la dirección +x y el segundo a ondas que se

propagan en dirección -x (estas últimas son las ondas que se reflejan en la boca del tubo debido al cambio de impedancia).  $k_0$  es el número de onda en el aire. Los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  se determinan de las condiciones de frontera.

Los  $k_{ny}$  y los  $k_n$  van a ser en general complejos porque satisfacen ecuaciones complejas. Un valor complejo de  $k_n$  significa que la amplitud del modo de oscilación decae exponencialmente con la distancia por lo tanto se trata de un campo cercano. El amortiguamiento no es producido por disipación sino que es una propiedad del campo. La correspondiente constante de amortiguamiento está dada por la parte imaginaria de  $k_n$ . Debido al decaimiento de los modos, su efecto sólo se puede notar en las cercanías del pistón y de la boca del tubo, en donde todos los modos son excitados (unos más que otros). La presión fuera del tubo  $p_e(x', y')$  se determina directamente de la T.F. de la velocidad en el plano que contiene la pared infinita ( $x'=0$ ).

$$p_e(x', y') = \frac{1}{2\rho} \int_{-\infty}^{\infty} V(k) \frac{k_0}{k_r} e^{-jk_r x'} e^{jk_y y'} dk \quad (5)$$

donde  $V(k) = \int_{-\infty}^{\infty} v_x(x'=0, y') e^{-jk_y y'} dy'$  y  $k_r = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k^2} & k_0^2 > k^2 \\ -j\sqrt{k^2 - k_0^2} & k_0^2 < k^2 \end{cases}$

Como se trata de una pared rígida la velocidad normal  $v_x$  se anula en la superficie  $|y'| > h$  entonces:

$$V(k) = \int_{-h}^h v_x(x'=0, y') e^{-jk_y y'} dy'$$

$$V(k) = \frac{1}{\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{k_0} (A_n e^{-jk_n \ell} - B_n e^{jk_n \ell}) \left( \frac{\sin(k - k_{ny})h}{k - k_{ny}} + \frac{\sin(k + k_{ny})h}{k + k_{ny}} \right) \quad (6)$$

La velocidad en la boca del tubo va a ser una suma de todos los modos de oscilación permitidos por lo tanto los modos que no se propagan en el tubo pueden sin embargo contribuir al campo sonoro en el exterior. La contribución será significativa si su amplitud permite que se produzca una variación significativa de la forma de la velocidad.

Las condiciones de frontera que permiten determinar los  $A_n$  y  $B_n$  son :

- $v_x(x=0) = v_p(y)$  ( $v_p$  es la velocidad normal del pistón)
- $v_x(x=\ell) = v_x(x'=0)$

**EFICIENCIA Y PATRÓN DE RADIACIÓN**

La descripción de la radiación de una fuente puede lograrse si se conocen:

- la potencia radiada en el dominio de la frecuencia
- la distribución espacial de esa potencia.

La potencia radiada se describe a través de la **eficiencia de radiación**. Ésta se define como la razón de potencias:

$$S = \frac{\text{Potencia radiada}}{P_{\infty}} \quad , \quad P_{\infty} = \frac{1}{2} \rho c v_p^2 D \quad (7)$$

$P_{\infty}$  es una cantidad de referencia que corresponde a la potencia que produciría una fuente grande (en comparación con la longitud de onda) cuya superficie  $D$  (en nuestro caso  $D=2h$ ) se mueve a una velocidad constante  $v_{mp}$  definida como:

$$v_{mp}^2 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |v_p(y)|^2 dy \quad (8)$$

Cuando la fuente es un pistón plano sobre una pared rígida, la eficiencia de radiación a una frecuencia  $f$  es aproximadamente la razón entre la potencia radiada en el intervalo  $[0, f]$  y la

potencia en todo el dominio de frecuencias. Esto permite entender que a bajas frecuencias la eficiencia de radiación sea pequeña mientras que a altas frecuencias, por el decaimiento del espectro de potencia con la frecuencia, sea aproximadamente 1 (ver fig. 2).

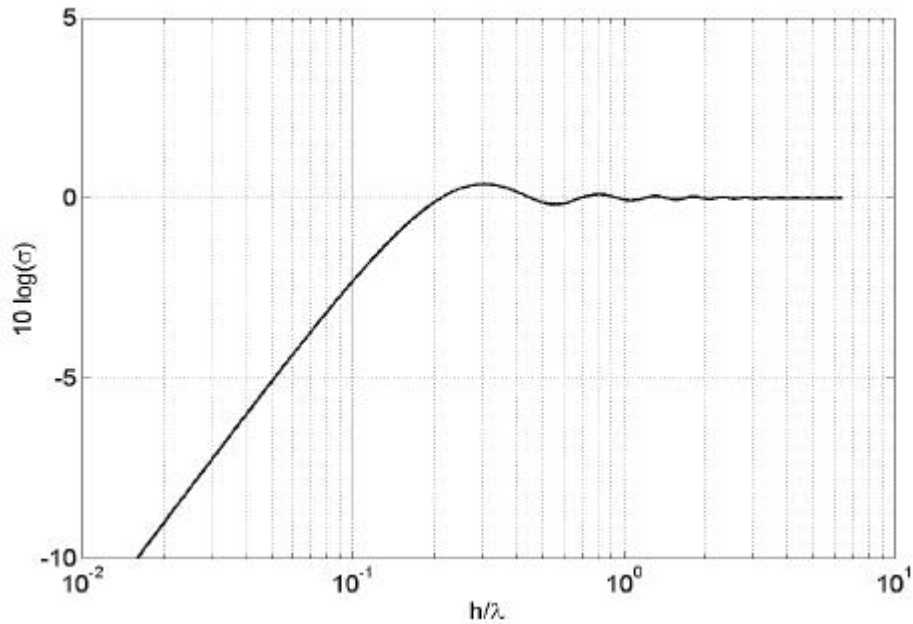


Figura 2. Eficiencia de radiación de un pistón plano en una pared rígida infinita

La distribución espacial de la potencia radiada se determina a través del **patrón de radiación** que se define como:

$$R(\mathbf{q}) = \frac{|V(k = -k_0 \sin \mathbf{q})|^2}{R_{\max}} \quad (9)$$

El patrón de radiación está dado por la parte de la curva  $V(k)$  comprendida entre  $-k_0 < k < k_0$ .

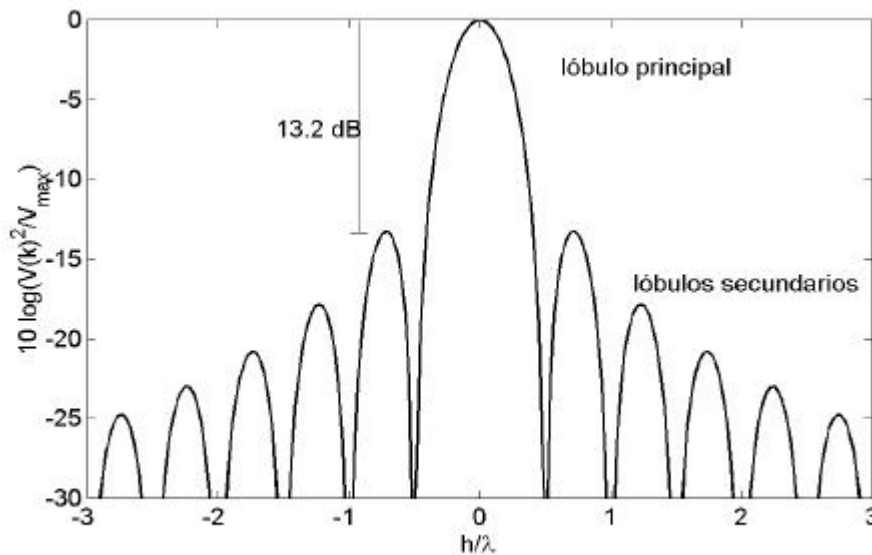


Figura 3 Espectro de la intensidad radiada por el pistón en la pared rígida infinita.

Para frecuencias bajas ( $h/\lambda \ll 1$ ) esa parte de la curva es casi constante y la distribución de potencia es uniforme. Para frecuencias mayores la parte del espectro que se considera presenta máximos y mínimos (Fig. 3) por lo que la distribución ya no es más uniforme sino que aparecen direcciones hacia donde la potencia radiada es mayor (lóbulos). El

lóbulo central (principal) se hace más angosto conforme aumenta la frecuencia, característica común de muchos tipos de fuentes (fig. 4). El primer lóbulo secundario aparece a partir de  $h/\lambda=0.5$  y su amplitud máxima es 13.2 dB menor que la del lóbulo principal a partir de  $h/\lambda=0.75$ .

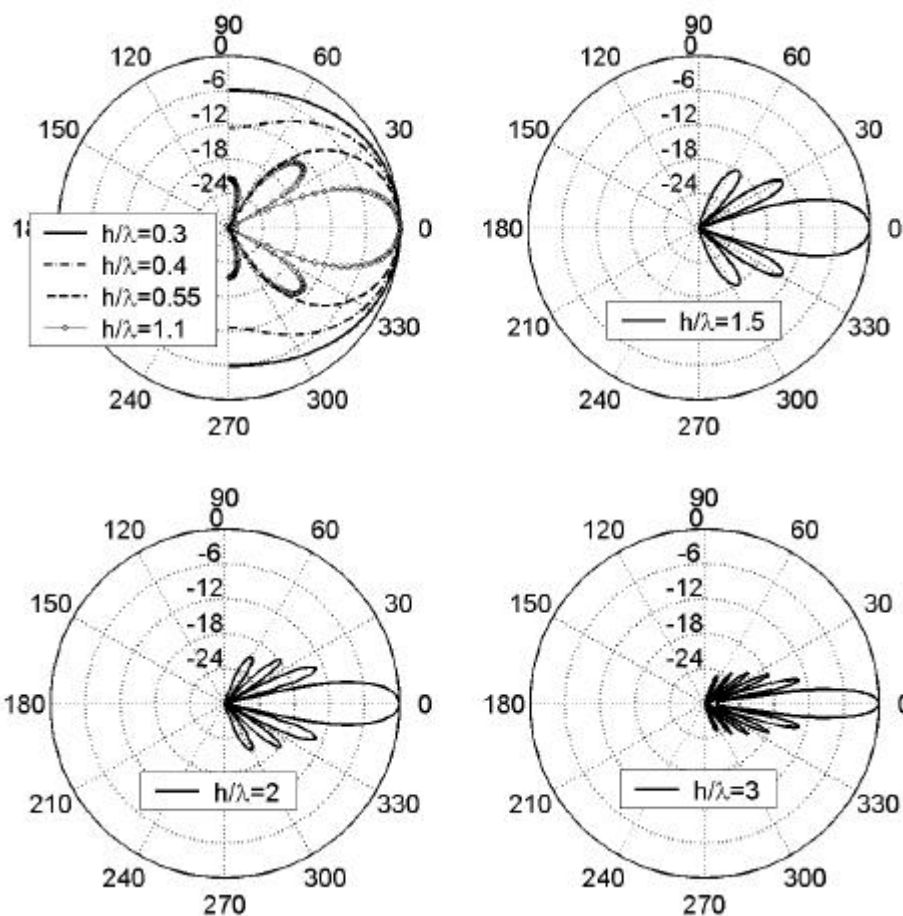


Figura 4 Patrones de radiación de un pistón plano en una pared rígida para diferentes frecuencias.

### PISTÓN PLANO EN EL EXTREMO DE UN TUBO - INFLUENCIA DE LAS DISTINTAS IMPEDANCIAS

La eficiencia de radiación del pistón va a depender:

- de la impedancia efectiva que encuentra la membrana.
- de la atenuación a lo largo del tubo.
- de la combinación de los distintos modos en la boca del tubo.

El patrón de radiación en cambio sólo es determinado por la distribución de la velocidad en la boca del tubo, producto de la combinación de los distintos modos transversales presentes.

#### Casos Límites

##### Impedancia infinita

Cuando las paredes del tubo son completamente rígidas ( $Z \rightarrow \infty$ ) los modos de vibración transversales,  $k_{ny}$  son todos reales y cumplen una relación sencilla:

$$k_{ny} = \frac{n\pi}{h}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Los modos de propagación a lo largo del tubo tienen los valores :

$$k_n = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} \quad (11)$$

por lo tanto  $k_n$  será real para  $k_0 h > n\pi$ .

El modo fundamental corresponde al valor  $n=0$ . Para este modo  $k_{ny}=0$  y  $k_n=k_0$ . La presión es constante en toda la sección transversal (y también la velocidad), por lo tanto se trata de una onda plana. Este modo no tiene amortiguamiento por lo que se propaga a lo largo del tubo. Todos los demás modos (modos superiores) tienen constantes de decaimiento que aumentan con el orden del modo pero que disminuyen conforme la frecuencia se hace mayor. A partir de una cierta "frecuencia de corte" un modo superior se propaga.

En la Fig. 5 se muestra la eficiencia de radiación de un pistón plano en un tubo de paredes rígidas y largo  $\ell=3h$ .

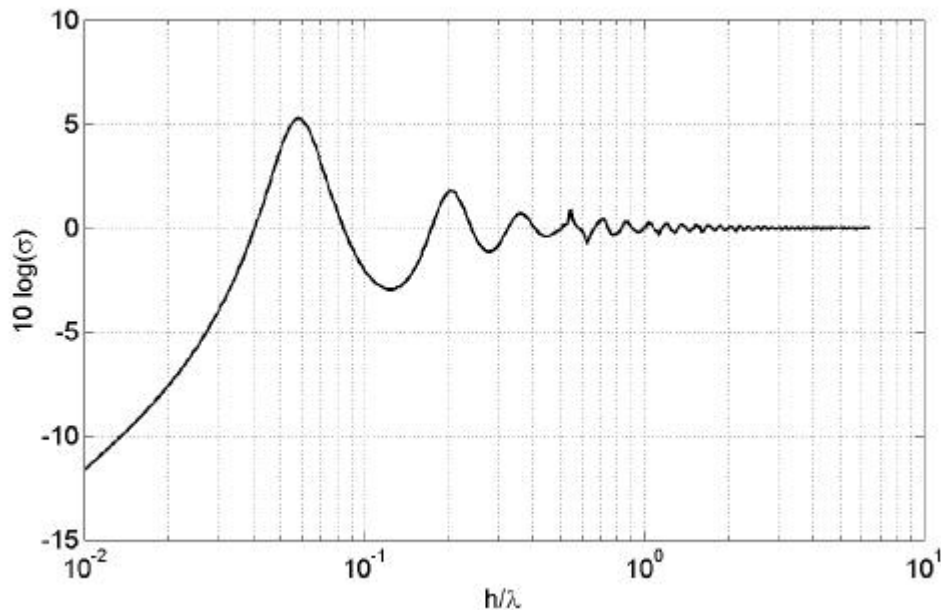


Figura 5 Eficiencia de radiación de un pistón en un tubo rígido.

Los máximos que se observan en la curva de la eficiencia de radiación son producidos por las resonancias en el tubo. Para frecuencias menores a  $h/\lambda=0.5$  éstas corresponden al modo fundamental cuya longitud de onda es la misma que la del aire y que es el único que se propaga. Las resonancias deberían producirse para  $h/\lambda=0.25 \cdot m/r$ ,  $m=1,3,\dots$  donde  $r$  es la razón  $\ell/h$ . Para  $r=3$ , la primera resonancia debería aparecer en  $h/\lambda=0.083$  pero ocurre a  $h/\lambda=0.06$ , debido a que el tubo es "acústicamente más largo". Esto se conoce también como "efecto de borde". La diferencia entre el largo físico y el largo acústico del tubo disminuye con la frecuencia.

El coeficiente de reflexión del modo fundamental decrece lentamente con la frecuencia (mientras más pequeña es la longitud de onda, menos notará el cambio de impedancia en la boca del tubo) y se vuelve pequeño para  $h/\lambda > 0.5$  por este motivo los máximos son cada vez menos marcados. A frecuencias mucho mayores es prácticamente cero y la onda plana se transmite por completo al medio. Por el contrario, los modos superiores una vez que se propagan, se reflejan todos con un coeficiente de reflexión igual a 1, de modo que la condición de frontera sobre la superficie del pistón se cumpla. Sus amplitudes relativas a la del modo fundamental son pequeñas por lo que su efecto no es marcado. Sólo el primer modo superior produce un efecto importante. De allí que el considerar sólo la onda plana especialmente a bajas frecuencias es una aproximación razonable.

El patrón de radiación cambia un poco respecto al patrón del pistón solo (sin tubo), por la presencia de los modos superiores. Cerca de la frecuencia de corte del primer modo superior ( $h/\lambda=0.5$ ) la variación es más notoria puesto que el modo se excita fuertemente.

Si en la boca del tubo estuviera presente sólo este modo la potencia sería radiada más en forma paralela a la pared que hacia el frente, por ello el lóbulo central tiende a hacerse más ancho. La diferencia entre el lóbulo central y el primer lóbulo secundario no es constante como en el caso del pistón solo pero oscila alrededor del valor 13.2 dB. Las variaciones más importantes están nuevamente alrededor de  $h/\lambda=0.5$

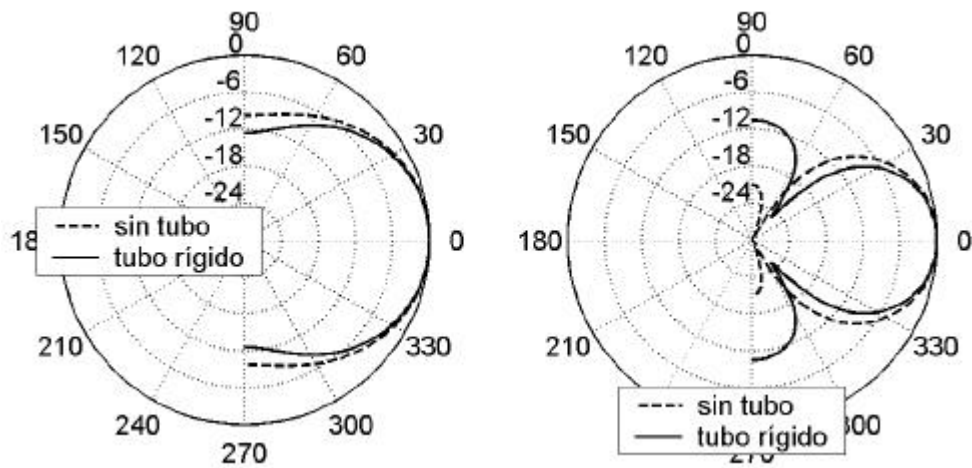


Figura 6 Patrón de radiación para un pistón solo y en un tubo rígido. Izq:  $h/\lambda=0.4$ , Der:  $h/\lambda=0.55$

Impedancia cero

Cuando la impedancia de la superficie es cero, la presión sonora sobre ella es también cero, es decir no hay compresión de las partículas (las paredes no se oponen al movimiento del aire). Los modos de oscilación transversales son también reales y cumplen una relación sencilla :

$$k_{ny} = \frac{(n + 0.5)\pi}{h} , \quad n = 0,1,2,\dots \tag{12}$$

Los modos de propagación a lo largo del tubo tienen los valores :

$$k_n = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{(n + 0.5)\pi}{h}\right)^2} \tag{13}$$

por lo tanto  $k_n$  será real para  $k_0 h > (n+0.5)\pi$ .

A diferencia del caso rígido hay un rango de frecuencias para el cual no es posible la propagación de modo alguno (ni siquiera el fundamental), en ese rango funciona el tubo como un silenciador. A partir de  $h/\lambda=0.25$  el tubo permite que se radie energía al medio. Todos los modos alcanzan un coeficiente de reflexión cercano a 1 apenas empiezan a propagarse pero éste decrece rápidamente, por este motivo las resonancias de cada modo son más notorias que en el caso rígido, principalmente el fundamental.

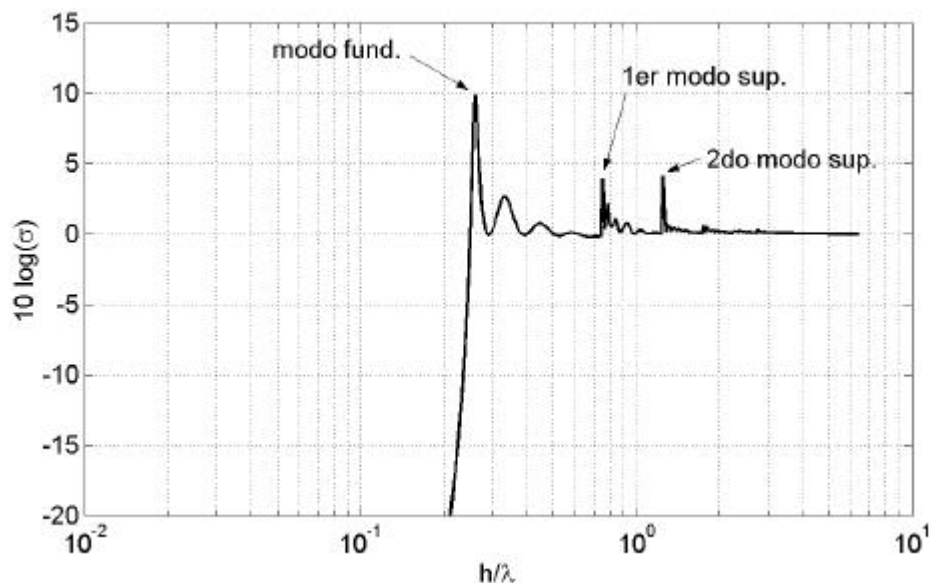
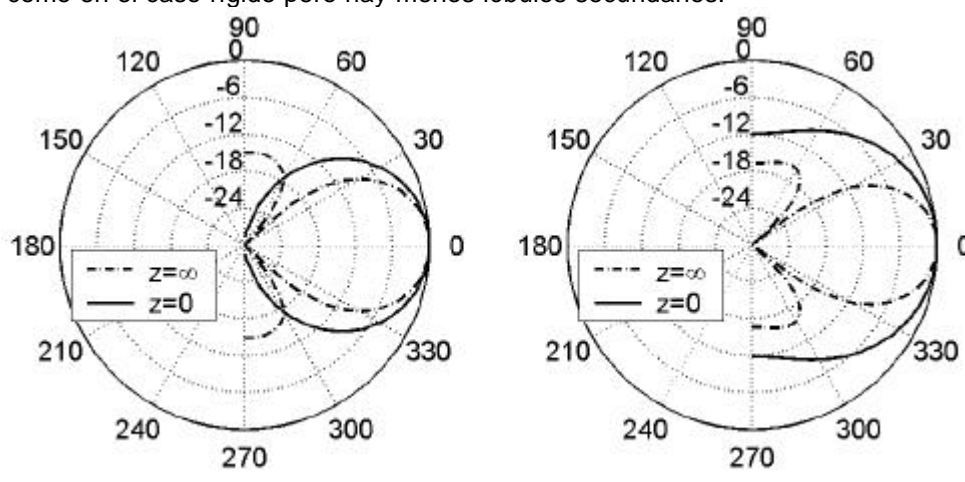


Figura 7 Eficiencia de radiación de un pistón cuyas paredes tienen impedancia cero

El patrón de radiación en este caso va a cambiar más que en el tubo rígido pues los modos superiores se excitan fuertemente cuando empiezan a propagarse. Cerca a las frecuencias de corte  $h/\lambda=0.75$  y  $h/\lambda=1.25$  se puede apreciar la presencia de estos modos en el patrón de radiación. A bajas frecuencias  $h/\lambda < 0.85$  el lóbulo central va a ser más ancho y los lóbulos secundarios van a ser pequeños (Fig. 8 (arriba)). A frecuencias algo mayores ( $h/\lambda$  entre 0.85 y 2) el lóbulo central va a ser más ancho pero los lóbulos secundarios van a ser pequeños en algunos casos y en otros no (Fig. 8 (abajo)). A frecuencias altas el lóbulo central es tan ancho como en el caso rígido pero hay menos lóbulos secundarios.





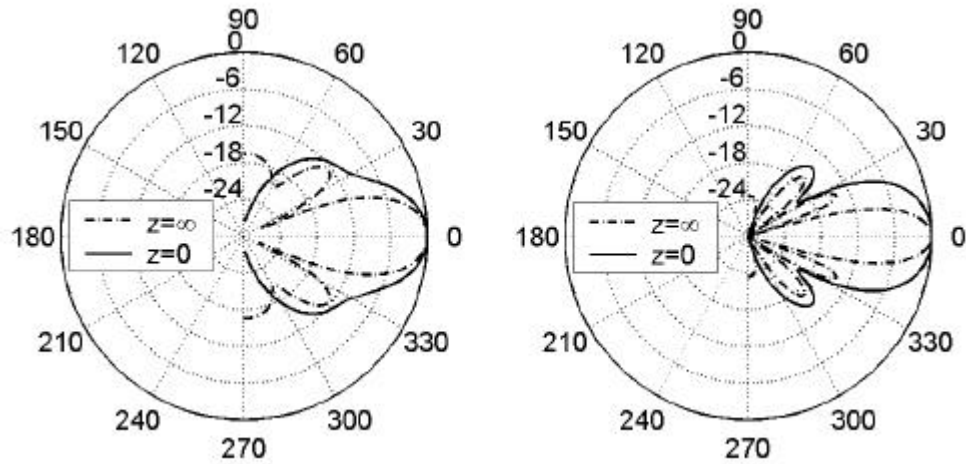


Figura 8 Patrón de radiación de un pistón en un tubo con paredes de impedancias infinita y cero. Arriba: Izq.  $h/\lambda=0.7$ , Der.  $h/\lambda=0.8$ ; Abajo: Izq.  $h/\lambda=1.15$ , Der.  $h/\lambda=1.7$

### Impedancia Tipo Masa

Este tipo de impedancia tiene la forma  $Z=jm''\omega$ , donde  $m''$  es la masa por unidad de superficie y  $\omega$  es la frecuencia angular. Los modos transversales  $k_{ny}$  son también reales. Debido a la dependencia con la masa, para valores pequeños de  $m''$  (y a bajas frecuencias) el comportamiento deberá tender al de tipo  $Z=0$  y para masas grandes (y frecuencias altas) deberá tender al caso rígido, es decir, se espera que el comportamiento pase de un caso límite al otro conforme se varía la masa. Este tipo de impedancia tampoco produce disipación pues se trata de un elemento reactivo.

En la figura 9 se muestran los primeros 5 modos transversales ( $|\cos(k_{ny}y)|$ ) para diferentes valores de masa  $m''$ . Se puede observar como la forma de los modos (principalmente los 3 primeros) pasa gradualmente del límite  $Z=0$  al  $Z=\infty$ . En la figura 11 se comparan las distribuciones de velocidad a lo largo del tubo y los patrones de radiación correspondientes cuando se tiene impedancia infinita y de tipo masa.

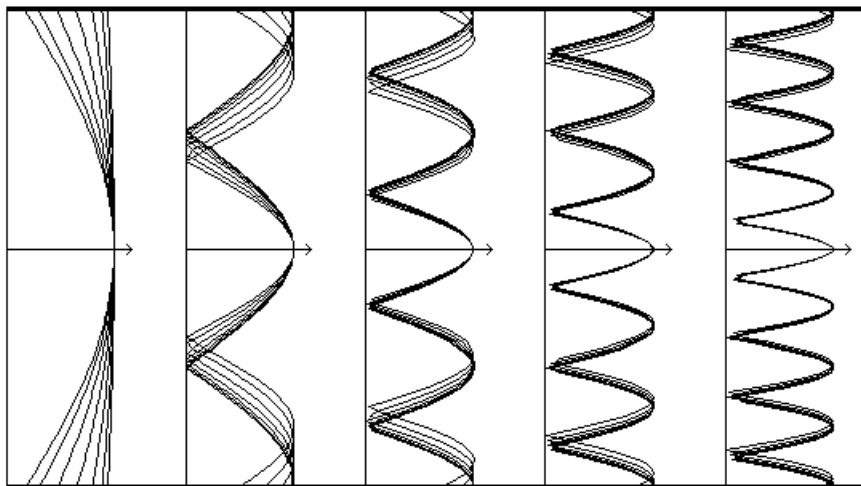


Figura 9 Distribución espacial de los primeros 5 modos transversales de oscilación de un tubo con paredes de impedancia tipo masa.  $m''/\rho h=1, 2, \dots, 64$ ;  $h/\lambda=0.55$ .

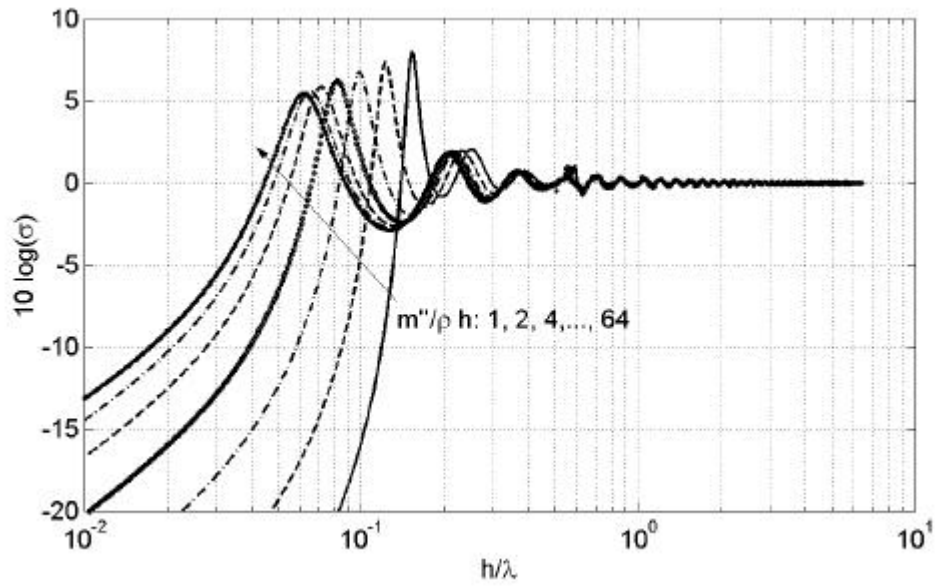
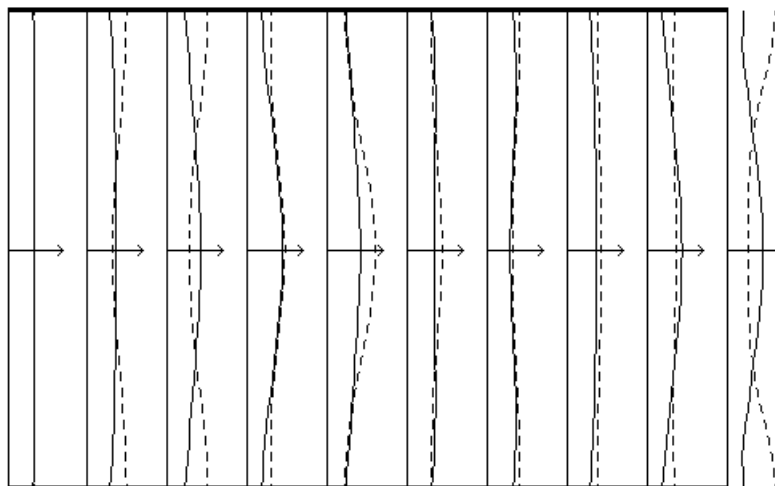


Figura 10 Eficiencia de radiación del pistón en un tubo con impedancia de tipo masa  $m''/\rho h=1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$



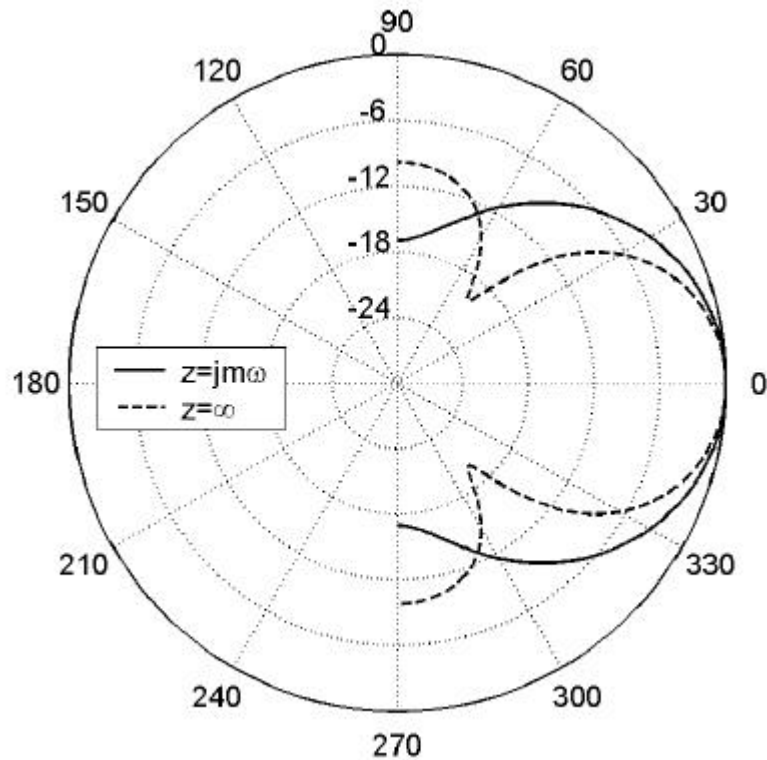


Figura 11 *Arriba*: Distribución de la velocidad en dirección x a lo largo del tubo; *Abajo*: Patrones de radiación producidos por las distribuciones de velocidad. — impedancia tipo masa; - - - pared rígida.

### Impedancia Tipo Resistencia

Este tipo de impedancia es independiente de la frecuencia y en el caso de una capa porosa con resistencia de flujo por unidad de longitud  $\Xi$  y espesor  $d$  tiene la forma  $Z=\Xi d$ . Debido a la forma de la impedancia es también de esperarse una transición del caso  $Z=0$  al caso rígido conforme  $\Xi d$  se hace cada vez mayor. Como se observa en la fig. 12 la variación en la forma de los modos no es tan gradual como en el caso anterior pues los  $k_{rj}$  son complejos.

La figura 13 muestra el comportamiento de la eficiencia de radiación con el incremento de la impedancia y la fig. 14 los cambios en el patrón de radiación.

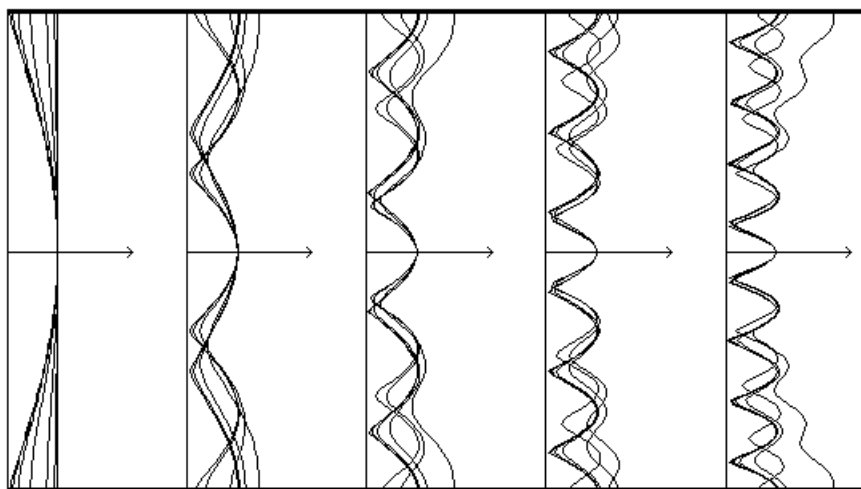


Figura 12 Distribución espacial de los primeros 5 modos transversales de oscilación de un tubo con paredes de impedancia tipo resistencia.  $\Xi d/\rho c=0.25, 0.5, \dots, 16$ ;  $h/\lambda=0.55$

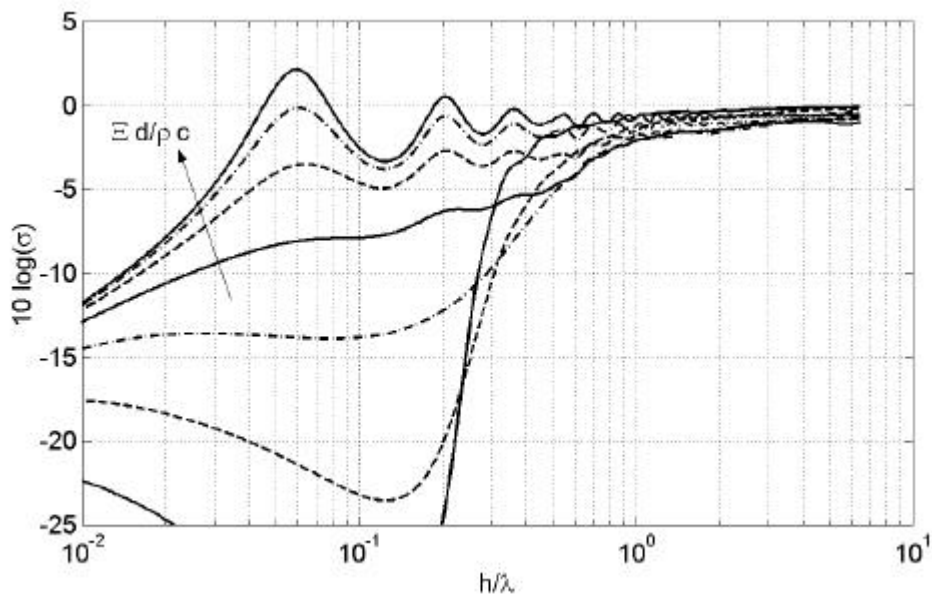


Figura 13 Eficiencia de radiación de un pistón en un tubo con impedancia de tipo resistencia  $\Xi d/\rho c = 0.25, 0.5, 1, 2, 4, 8, 16$ .

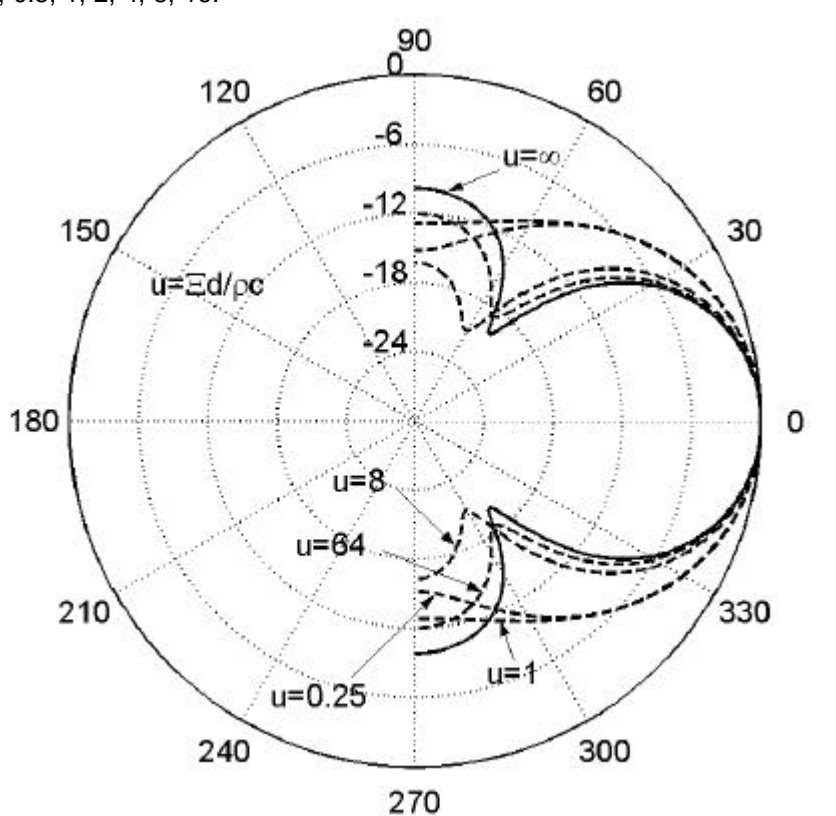


Figura 14 Patrones de radiación para diferentes valores de  $\Xi d/\rho c$  y frecuencia  $h/\lambda=0.55$

Con paredes de impedancia resistiva sí se produce disipación de energía principalmente por rozamiento de las moléculas de aire con el material. A bajas frecuencias, cuando la longitud de onda es grande comparada con el ancho del tubo, se disipa más energía que a altas frecuencias cuando varias longitudes de onda entran en el ancho del tubo y la energía puede transmitirse por el centro del tubo. Este comportamiento puede apreciarse en la figura 15. Para  $h/\lambda=0.2$  se ve cómo una parte de la energía es absorbida por el material (vectores de intensidad que salen por las paredes) mientras que para  $h/\lambda=3$  la intensidad es máxima en el centro del tubo y pequeña en la superficie.

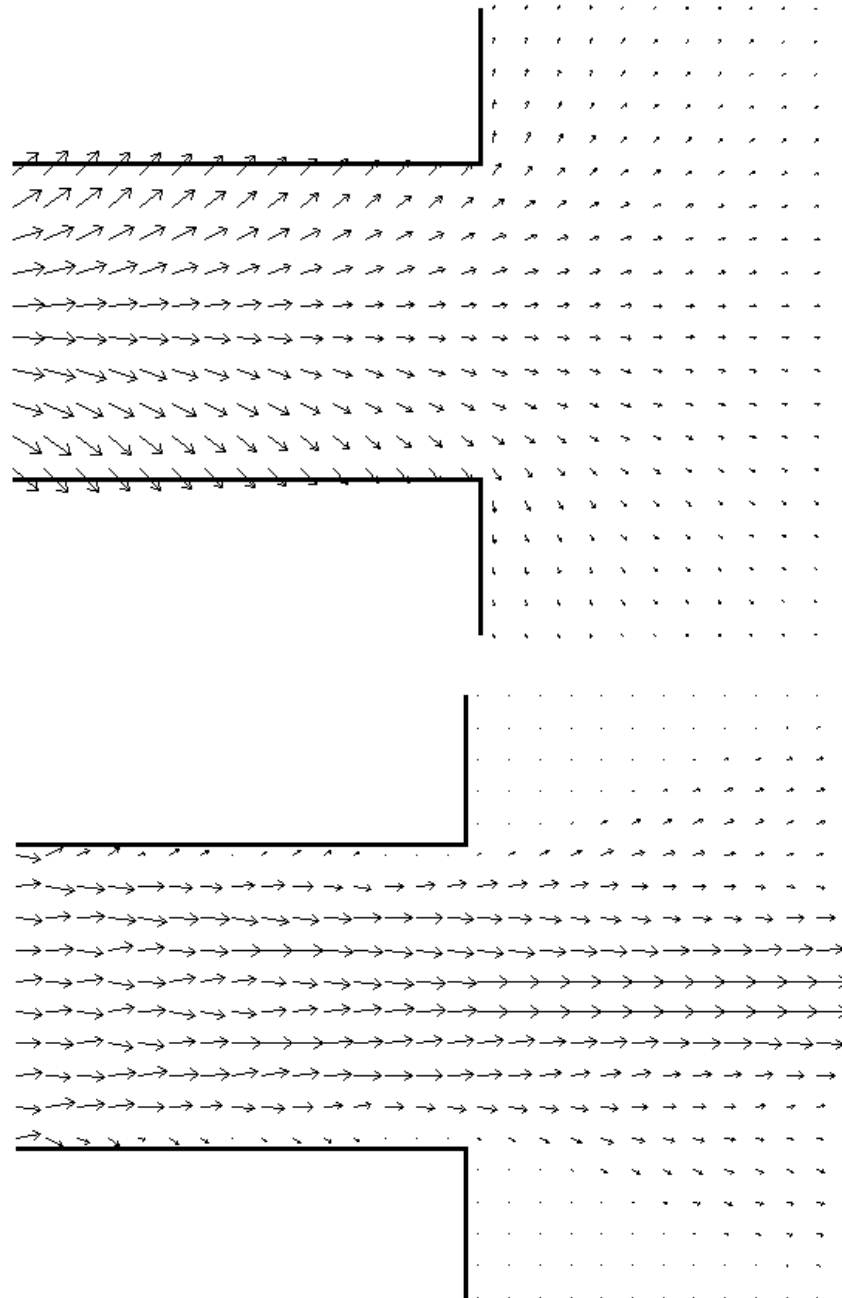


Figura 15 Vectores de intensidad en un tubo con impedancia tipo resistencia  $\Xi d/\rho c=1$ ; Arriba:  $h/\lambda=0.2$ ; Abajo:  $h/\lambda=3$

### Impedancia Tipo Rigidez

Esta impedancia tiene la forma  $Z = -js''/\omega$ , donde  $s''$  es la constante de rigidez por unidad de superficie. Los modos de oscilación transversal  $k_{ny}$  son todos reales menos uno que es puramente imaginario. Este único modo imaginario va a ser que la distribución del campo sonoro sea diferente a la de los 2 casos anteriores, mayormente cuando  $s''$  es pequeño y a bajas frecuencias. Este único modo imaginario tiene 2 características importantes:

- Es un modo sin amortiguamiento, es decir siempre se propaga a lo largo del tubo. Esta característica se observa fácilmente calculando  $k_n$ .

En este caso  $k_{ny} = jk$  entonces  $k_n^2 = k_0^2 + k^2 \geq 0$  por lo tanto  $k_n$  es siempre real y la constante de amortiguamiento es nula.

- La onda que se propaga a lo largo del tubo lo hace a través de la superficie de la pared por lo cual se le llama onda superficial. Como la distribución transversal está dada por  $\cos(k_{ny}y)$ , al ser  $k_{ny}$  imaginario puro el coseno se convierte en coseno hiperbólico, de manera que la velocidad es bastante mayor en la pared del tubo que en el resto de la sección transversal, sobre todo si  $|k_{ny}|$  es grande.

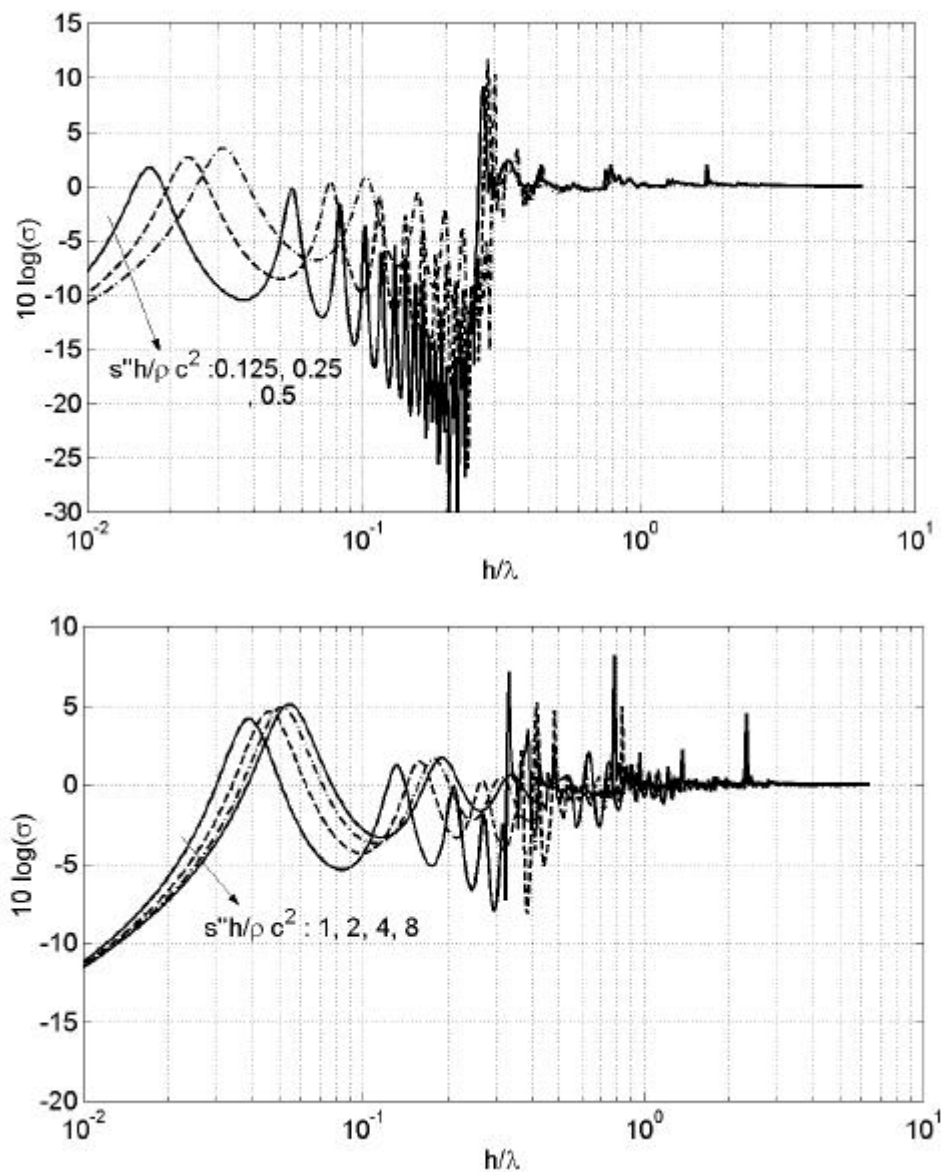


Figura 16 Eficiencia de radiación de un pistón en un tubo con impedancia de tipo rigidez para diferentes valores de  $s''h/\rho c^2$

Las fuertes oscilaciones que se observan en la eficiencia de radiación para  $s''$  pequeños (Fig. 16) corresponden a las resonancias (en dirección  $x$ ) de la onda superficial en el tubo. Los máximos y mínimos son bastante notorios porque el coeficiente de reflexión de este modo es cercano a 1. Sin embargo se nota una disminución en la eficiencia conforme aumenta la frecuencia hasta que repentinamente crece cuando el segundo modo empieza a propagarse. Esta caída de la eficiencia puede deberse a que el segundo modo (que no se propaga) se excita más que la onda superficial pero esa energía no se radia. Por eso, cuando el 2do modo se propaga se produce ese salto de la eficiencia de un valor negativo a otro positivo.

En la Fig 17 se muestra la distribución de presión en el tubo y se puede observar la onda estacionaria producida por la reflexión de la onda superficial. La longitud de onda de la onda superficial es bastante menor que la longitud de onda en el aire.

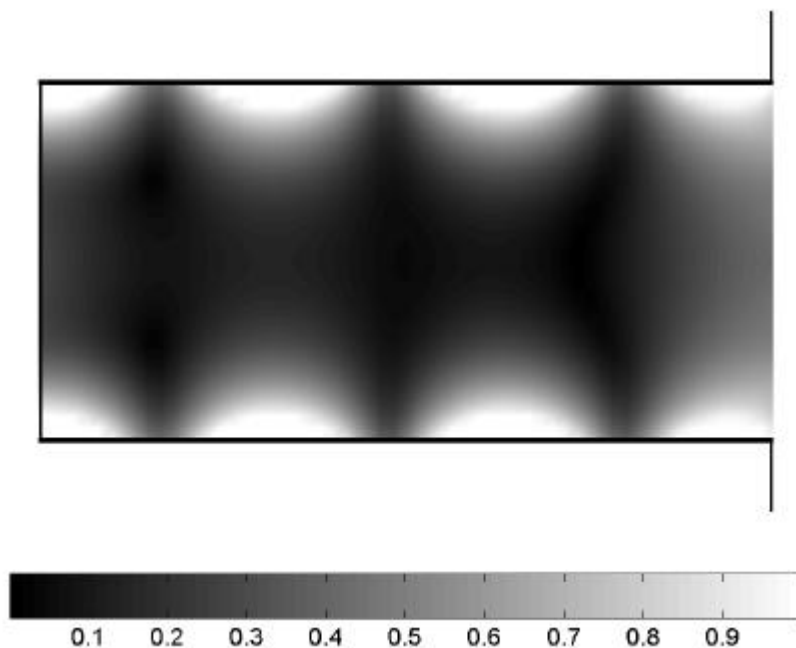


Figura 17 Distribución de la presión sonora dentro del tubo con paredes de impedancia tipo rigidez  $s''h/\rho c^2=0.125$  y  $h/\lambda=1.2$

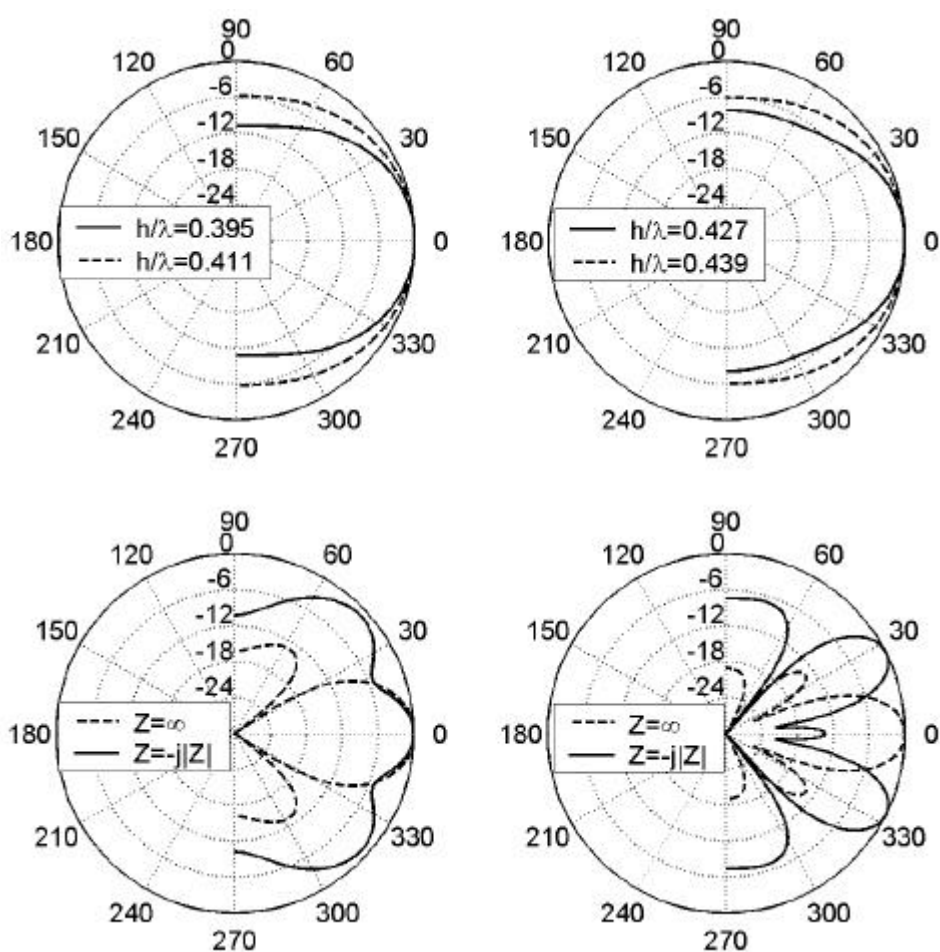


Figura 18 Patrón de radiación del pistón en un tubo con impedancia de tipo rigidez. *Arriba:* para valores muy próximos de  $h/\lambda$  ( $s''h/\rho c^2=0.125$ ); *Abajo:* comparado con el tubo con paredes rígidas: Izq  $s''h/\rho c^2=8$  y  $h/\lambda=0.84$ ; Der.  $s''h/\rho c^2=16$  y  $h/\lambda=1.2$

El patrón de radiación varía sensiblemente tanto con el valor de  $s''$  como con la frecuencia debido a las numerosas resonancias. Para valores pequeños de  $s''$  y frecuencias bajas el ancho del lóbulo central cambia para valores muy cercanos de  $h/\lambda$  como se aprecia en la Fig. 18 (*arriba*) y para valores grandes de  $s''$  la amplitud de los lóbulos secundarios aumenta y también se hace mucho mayor que el central en algunos casos (Fig. 18 *abajo*).

## OBSERVACIONES

El objetivo del análisis de este sistema ha sido mayormente el estudio de las posibles soluciones al problema de la radiación de un pistón que está en el extremo de un tubo. La solución empleada es una suma de los modos de oscilación permitidos que satisfacen las condiciones impuestas por las distintas impedancias de las paredes y por la fuente. Por los resultados obtenidos se puede ver que el efecto de los 2 primeros modos superiores puede ser importante sobre todo cuando la impedancia de la pared del tubo no es infinita y cerca de las correspondientes frecuencias de corte. Los mayores cambios se observan a bajas frecuencias, cuando la longitud de onda es mayor o del orden del ancho del tubo. A más altas frecuencias, cuando varias longitudes de onda entran en el ancho del tubo, el tipo de impedancia del tubo no afecta en gran medida la eficiencia de radiación.

La importancia del análisis aquí mostrado radica en que la bocina puede estudiarse empleando el mismo método aplicado para el tubo de sección constante si ésta se divide en un número de subsecciones (pequeños tubos) de lados paralelos al eje de la bocina en donde el ancho de una subsección es ligeramente mayor que el de la anterior. La ecuación de onda se resuelve de la misma manera en cada una de estas subsecciones imponiendo las condiciones de frontera apropiadas.