

MODELADO Y VALIDACIÓN EXPERIMENTAL DEL PROCESO DE EMISIÓN/RECEPCIÓN DE ULTRASONIDOS EN AIRE UTILIZANDO LA R.I.

REFERENCIA PACS 43.35.Yd

Enrique A. Vargas Cabral, Ramón Ceres Ruiz, Leopoldo Calderón Estévez, José M. Martín Abreu
Instituto de Automática Industrial–CSIC La Poveda 28500–Arganda del Rey (Madrid–España)
email: evargas, ceres, leopoldo, abreu @iai.csic.es

ABSTRACT

This article uses the mathematical formulation of Huygens' principle and the convolution integral method proposed by Stepanishen in 1971, to develop algorithms that synthesize signal echoes for processes of reflection on simple geometry objects. We describe the method of impulse response (I.R.) for an emitter system of arbitrary shape and apply it to the special case of a circular piston. The acoustic field in emission/reflection processes for different configurations of the transducer's elements and objects has been modeled and validated by experimental measurements.

RESUMEN

En este artículo, a partir de la formulación matemática del principio de Huygens y utilizando el método de la integral de convolución propuesto por Stepanishen en 1971; se desarrollan los algoritmos necesarios para sintetizar señales de eco en procesos de reflexión sobre objetos de geometría simple. Se describe el método de la respuesta espacial al impulso (R.I) para un sistema emisor de perfil arbitrario y se lo particulariza para el caso de un pistón circular plano. Se efectúa además, el análisis del campo acústico en emisión/recepción para varias configuraciones de los elementos transductores y diferentes objetos, validando los resultados obtenidos a partir del modelo teórico, con comprobaciones experimentales.

1 ECUACIONES MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

Nuestro principal objetivo en este trabajo es modelar la señal eléctrica generada por un transductor circular de dimensiones finitas, originada en el proceso de emisión/recepción en régimen transitorio, para medios fluidos homogéneos e ideales, debido a la reflexión de ondas acústicas sobre objetos de geometría simple. A partir de la teoría clásica del sonido en un fluido, la presión instantánea $p(\vec{M}, t)$, producida por una onda ultrasónica en su propagación puede ser expresada por:

$$p(\vec{M}, t) = \rho_0 \frac{\partial \phi(\vec{M}, t)}{\partial t} \quad (1)$$

Donde $\phi(\vec{M}, t)$, en $m^2 s^{-1}$, es el potencial de velocidad en la posición $\vec{M} = (x, y, z)$, en el tiempo t y ρ_0 es la densidad en equilibrio del medio. El potencial de velocidad está relacionado con la velocidad de la partícula $\vec{V}(\vec{M}, t)$ a través del operador gradiente, $\vec{V}(\vec{M}, t) = -\nabla \phi(\vec{M}, t)$. Para el caso de un pistón plano, uniformemente excitado de área A , localizado en el plano $Z = 0$ y rodeado por una pantalla rígida e infinita, $\phi(\vec{M}, t)$ puede expresarse por la integral de Rayleigh:

$$\phi(\vec{M}, t) = \int_A \frac{V_n(\vec{M}_0, t - r/c)}{2\pi r} dA \quad (2)$$

Donde r es la distancia que separa al punto \vec{M} , en el que se desea calcular el campo, del punto \vec{M}_0 del pistón; siendo c , la velocidad del sonido. La velocidad del pistón es normal a la superficie del plano y viene descrita por la función $V_n(\vec{M}_0, t)$. La ecuación (2), es la formalización matemática del principio de Huygens, y se la conoce como “Expresión de Rayleigh para excitación arbitraria”, la cual establece que todos los puntos de un transductor finito, pueden ser considerados como fuentes de ondas secundarias; y que el campo generado por el emisor puede ser construido por la superposición lineal del campo, producido por cada una de las fuentes secundarias [4].

1.1 Respuesta espacial al impulso de un pistón plano. Método de Stepanishen para el cálculo de la RI

Si se limita el estudio a la vibración de superficies planas en modo espesor, la función $V_n(\vec{M}_0, t)$ es separable y puede ser escrita como: $V_n(\vec{M}_0, t) = O(\vec{M}_0)V(t)$. Lo que indica que la velocidad puede tener distintas amplitudes en cada punto emisor $O(\vec{M}_0)$, pero que su forma temporal $V(t)$ es uniforme en todos los puntos de la superficie radiante. En la ecuación (2), la dependencia temporal de $V_n(\vec{M}_0, t - r/c)$ puede ser expresada por:

$$V(t - r/c) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\tau)\delta(t - r/c - \tau)d\tau \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) e intercambiando el orden de la integración, el resultado puede ser expresado por: $\phi(\vec{M}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\tau) \int_A \frac{O(\vec{M}_0)\delta(t-r/c-\tau)}{2\pi r} dAd\tau$. Definiendo la función $h(\vec{M}, t)$, como:

$$h(\vec{M}, t) = \int_A \frac{O(\vec{M}_0)\delta(t - r/c)}{2\pi r} dA \quad (4)$$

La velocidad potencial puede ser expresada como la convolución de $h(\vec{M}, t)$ con la forma de onda de la velocidad del pistón.

$$\phi(\vec{M}, t) = V(t) \otimes h(\vec{M}, t) \quad (5)$$

Si se considera que el radiador se comporta como un pistón, o lo que es lo mismo, que todos sus puntos se mueven con la misma velocidad, y suponiendo la misma de valor unitario, la ecuación (4) se reduce a la expresión más conocida dada por Stepanishen [6]: $h(\vec{M}, t) = \int_A \frac{\delta(t-r/c)}{2\pi r} dA$. La función $h(\vec{M}, t)$, es conocida como “*Respuesta Espacial a un Impulso*”, y expresa el potencial de velocidad creado en un punto \vec{M} del espacio, al aplicar una excitación de velocidad, en forma de delta de Dirac en cada uno de los puntos de la superficie del transductor. Para cada punto \vec{M} del espacio, $h(\vec{M}, t)$ es una función temporal dependiente tanto del perfil del transductor como de la posición del punto. Para el calculo de la RI de un pistón plano, existen diferentes métodos basados en consideraciones geométricas [4, 1, 3]. Uno de esos métodos es el desarrollado por Stepanishen y colaboradores, denominado por Fink como el método del “observador local” [1], el cual se desarrolla a continuación:

Sea un pistón de perfil arbitrario de área A , cuya superficie es excitada por un impulso unitario de Dirac, en contacto con un medio fluido homogéneo y sin pérdidas. Supongamos dicho pistón situado en el plano $Z = 0$ y que se comporta como una pantalla rígida e infinita. Sea $M(x, y, z)$ un punto cualquiera del semiespacio $Z > 0$, en el que se quiere calcular la perturbación y $M'(x, y, 0)$ la proyección de $M(x, y, z)$ sobre el plano $Z = 0$, Fig.1(a). En un instante determinado los únicos puntos del transductor que contribuyen al campo en M , son aquellos que se encuentran a una distancia $r = ct$ del punto M . Es decir, aquellos que se encuentran en la intersección de la superficie radiante A , y una esfera con centro en M y radio $r = ct$. Dicha intersección consiste en un arco de circunferencia con centro en M' y radio $\sigma(t)$ tal que:

$$\sigma^2(t) = r^2(t) - z^2 = (r(t) \sin \theta(t))^2 \quad (6)$$

Donde $\theta(t)$ es el ángulo que forma el radio con la perpendicular al plano $Z = 0$. Si llamamos $\Gamma(r)$ a la longitud del arco de intersección de la esfera de radio r y el transductor, y se toma un elemento de superficie diferencial $dA = \Gamma d\sigma$ que se encuentra excitado en el instante t , se obtiene para la respuesta al impulso $h(\vec{M}, t)$: $h(\vec{M}, t) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\delta(t-r/c)}{2\pi r} \Gamma(r) d\sigma$, donde σ_1 y σ_2 se corresponden a los puntos más cercano y más lejano del pistón con respecto al punto \vec{M}' , respectivamente. Teniendo en cuenta que de la ecuación (6), $rdr = \sigma d\sigma$ y que en un instante τ ; $r = c\tau = \frac{\sigma(c\tau)}{\sin \theta(c\tau)}$. Efectuando un cambio de variables, la integral anterior puede ser puesta de la forma:

$$h(\vec{M}, t) = \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(c\tau)}{2\pi\tau \sin \theta(c\tau)} \delta(t - \tau) d\tau \quad (7)$$

Por último, aplicando la propiedad de desplazamiento de la función delta de Dirac a (7), resulta la expresión dada por Stepanishen [6]:

$$h(\vec{M}, t) = \frac{\Gamma(ct)}{2\pi t \sin \theta(ct)} \quad (8)$$

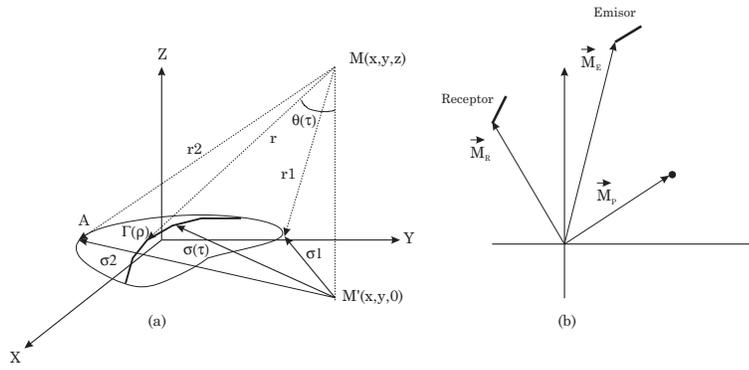


Figura 1: (a) Pistón de geometría arbitraria y un arco de aportación simultánea al campo en M. (b) Sistema de coordenadas utilizado en la descripción del proceso de reflexión sobre un punto.

Esta ecuación puede expresarse de forma más compacta en función de $\Omega(ct)$, ángulo con que un observador situado en M' ve al arco $\Gamma(ct)$, Fig.1(a). Dado que $\Gamma(ct) = \sigma\Omega(ct)$ y a partir de (7), resulta la expresión para la respuesta espacial a un impulso: $h(\vec{M}, t) = \frac{c}{2\pi}\Omega(ct)$. Utilizando las expresiones (1) y (5), la presión generada en el punto de coordenadas $\vec{M}_p(x_p, y_p, z_p)$, por un pistón plano, puede ser expresada por:

$$p(\vec{M}, t) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (V(t) \otimes h(\vec{M}, t)) \quad (9)$$

A partir del conocimiento de la geometría del transductor, la función $h(\vec{M}, t)$ puede ser calculada por el método de Stepanishen. Como puede apreciarse en la expresión (9), los efectos de la excitación se encuentran separados de los de la geometría. La función $V(t)$ incluye los efectos de la conversión electromecánica del transductor.

2 ANÁLISIS DEL PROCESO DE EMISIÓN RECEPCIÓN

En la sección anterior, se han analizado los procedimientos utilizados para el cálculo del campo de presión en emisión, producido por un transductor plano, para cualquier punto del espacio. En esta, se analizan los aspectos relativos al proceso de emisión/recepción de ultrasonidos considerando las demás etapas involucradas, que van desde la conversión electromecánica de energía en el transductor hasta la recepción de las ondas reflejadas, pasando a través de la propagación en el medio y la reflexión sobre el objeto.

2.1 Obtención de la RI en un proceso de emisión/reflexión sobre un punto

La señal eléctrica captada por un receptor plano de área A , debido a la reflexión de un frente de ondas sobre un objeto considerado como puntual, es el resultado de la integración sobre su superficie del campo de presión reflejado por el punto y propagado por el medio hasta cada uno de los puntos del receptor, convolucionado con la respuesta de conversión electromecánica del transductor en recepción, $h_{TR}(t)$. El diagrama de la Fig.1(b), esquematiza el sistema considerado, donde los vectores \vec{M}_R , \vec{M}_E y \vec{M}_P representan a los vectores de posición del receptor, emisor y del punto reflector respectivamente. De acuerdo a lo expresado anteriormente, la señal eléctrica recibida puede ser representada por:

$$y(\vec{M}_R, t) = h_{TR}(t) \otimes \int_A p_s(\vec{M}_R, t) dA \quad (10)$$

Siendo el campo de presión p_s que actúa sobre el receptor igual a:

$$p_s(\vec{M}_R, t) = \int_t p(\vec{M}_P, \tau) \frac{\delta(t - \tau - |\vec{M}_R - \vec{M}_P|/c)}{2\pi |\vec{M}_R - \vec{M}_P|} d\tau \quad (11)$$

Reemplazando (11) en (10), utilizando la expresión (9) para el campo de presión incidente y efectuando la integración sobre la superficie A del receptor y en el tiempo se obtiene:

$$y(\vec{M}_R, t) = \rho_0 \times h_{TR}(t) \otimes \frac{\partial V(t)}{\partial t} \otimes h_{DE}(\vec{M}_P, \vec{M}_E; t) \otimes h_{DR}(\vec{M}_R, \vec{M}_P; t) \quad (12)$$

Donde $h_{DE}(\vec{M}_P, \vec{M}_E; t)$ y $h_{DR}(\vec{M}_R, \vec{M}_P; t)$ representan las funciones de difracción producidas por el emisor y el receptor con respecto a la posición del punto. La ecuación (12) puede ser escrita como:

$$y(\vec{M}_R, t) = \frac{\partial}{\partial t} U_{ER}(t) \otimes h_{DER}(\vec{M}_E, \vec{M}_P, \vec{M}_R; t) \quad (13)$$

La función $U_{ER}(t)$ engloba información acerca de la excitación del transductor, la respuesta de los circuitos de amplificación y la conversión electromecánica en emisión y recepción de los transductores. En tanto que en la función $h_{DER}(\vec{M}_E, \vec{M}_P, \vec{M}_R; t)$ se encuentra representada la geometría del sistema, constituida por el emisor, el punto y el receptor respectivamente. En lo que sigue, esta dependencia espacial será expresada de forma simplificada como $h_{DER}(\vec{M}_P, t)$. Hay que destacar que las características de conversión del emisor están incluidas en $U_{ER}(t)$ a través de la función de velocidad $V(t)$ de cada uno de los puntos de la membrana.

2.2 Reflexión sobre objetos planos de dimensiones finitas

Procediendo de manera análoga que en la sección (2.1) y aplicando el principio de superposición, podemos llegar a una expresión similar a la ecuación (13) para el caso de un objeto que ocupa un volumen cerrado V . Así, si consideramos que las dimensiones y los radios de curvatura del objeto son suficientemente grandes con relación a la longitud de onda de la radiación incidente, de forma que la aproximación de Kirchoff pueda ser aplicable, lo que supone tratar cada elemento superficial del volumen como si se encontrará inmerso en una pantalla rígida e infinita [2] y utilizando la aproximación de Born de primer orden, lo que significa que las interreflexiones entre elementos de superficie no serán considerados [5]; la señal en el receptor debida a la reflexión en los objetos contenidos en el volumen V será:

$$y(\vec{M}_R, t) = \frac{\partial}{\partial t} (U_{ER}(t) \otimes \int_V h_{DER}(\vec{M}_E, \vec{M}_{Pi}, \vec{M}_R; t) dv) \quad (14)$$

Donde se han extraído fuera del símbolo de la integral aquellos términos que no dependen de la posición de los puntos reflectores. Asumiendo que toda la energía incidente se refleja, la integral anterior puede extenderse a toda la superficie S de los objetos existentes en el volumen considerado, con lo que:

$$y(t) = \frac{\partial}{\partial t} (U_{ER}(t) \otimes \oint_S h_{DER}(\vec{M}_E, \vec{M}_{Pi}, \vec{M}_R; t) ds) \quad (15)$$

El integrando de la ecuación (15) es una función que depende de la posición de cada uno de los puntos respecto al emisor y receptor respectivamente y de la curvatura del objeto en el sentido de la determinación si el punto se encuentra “iluminado” por la fuente, como también si se encuentra en la zona de “visión” del receptor; esto es necesario para no considerar en la integral aquellas zonas del objeto que se encuentran en la región de sombra o de oclusión. Este enfoque da una buena aproximación, en tanto que los radios de curvatura de las irregularidades sean grandes respecto a la longitud de onda incidente.

3 RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección se efectúa la comparación del campo de presión obtenido utilizando el modelo, con el campo medido experimentalmente. Los análisis se efectúan para el caso de un pistón circular, por ser ésta la geometría de los transductores utilizados en las distintas experiencias; la del transductor capacitivo de Polaroid, de la serie 600. Este transductor posee un radio de 18 mm, con una frecuencia central de 55 kHz. Las experiencias han sido realizadas con diferentes objetos, tales como prismas cilíndricos, rectangulares, superficies planas de grandes dimensiones entre otros [8]. Sin embargo, por motivos de espacio en este trabajo únicamente se presentan los obtenidos con prismas cilíndricos. Se ha hecho incidir el frente de ondas sobre la base de los prismas, por lo que de ahora en adelante, los prismas cilíndricos serán denominados de discos.

La respuesta al impulso en emisión/recepción debido a la reflexión en un disco, puede ser fácilmente calculada a partir de la integración del segundo término de la ecuación (15). En la Fig.2(a) se presentan las respuestas al impulso normalizadas para discos centrados respecto a un único transductor, el cual se considera que opera como emisor/receptor. El radio del disco se ha variado en el intervalo $[5 \leq R \leq 50]$ mm, en incrementos de 5 mm; el centro del disco se supone a una profundidad de $z = 155$ mm. La curva de menor área corresponde a un radio de 5 mm y la de mayor al de 50 mm.

Como puede observarse en la Fig.2(a), a partir de $R = 20$ mm, valor próximo al radio del transductor (las que corresponden a las primeras zonas de Fresnel), el aumento del radio del disco no produce incrementos notables en el valor de la amplitud máxima, produciendo únicamente un ensanchamiento temporal de la

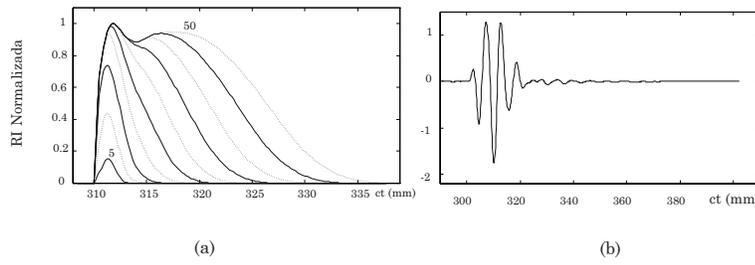


Figura 2: (a) Respuestas al impulso obtenidas para discos de radios entre $[5 \leq R \leq 50]$ mm, para una profundidad de $z = 155$ mm, centrados respecto al eje de un único transductor. (b) Señal $U_{ER}(t)$ obtenida con el emisor y el receptor enfrentados, separados por una distancia de 300 mm.

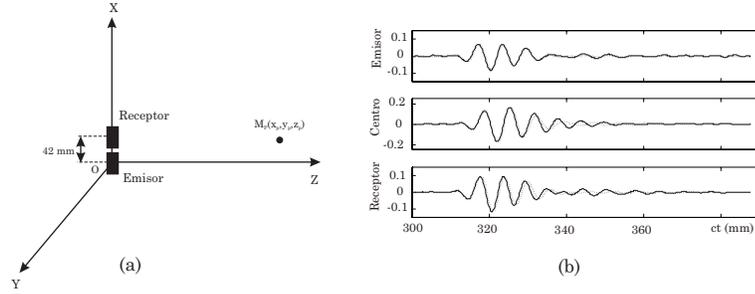


Figura 3: (a) Disposición de transductores utilizada en las experiencias. (b) Señales de eco obtenidas de discos de $R = 6$ mm. Experimentales (línea continua) y sintetizadas (línea de puntos). Posición del centro del disco, de arriba hacia abajo: a) $\vec{M}_c(0, 0, 155)$, b) $\vec{M}_c(21, 0, 155)$, c) $\vec{M}_c(42, 0, 155)$.

RI. Además, las RIs para todos los valores del radio presentan en común una subida brusca, que es debido al frente de onda plano que llega al receptor, siendo este tiempo de subida, prácticamente independiente del tamaño del objeto. Los gráficos de la Fig.2(a), a partir de $R = 35$ mm aproximadamente, presentan convexidad hacia abajo, que es debida a la interferencia entre el primer frente de onda plano y los sucesivos frentes que van llegando al receptor. El radio en el que se inician las convexidades se corresponden con el final del campo lejano del objeto respecto al receptor e inicio, lógicamente, del campo próximo, pudiendo ser calculada a través de la expresión $N = (4R^2 - \lambda^2)/\lambda^2$, siendo R el radio del disco.

Para comprobar la validez y la precisión en el modelado de la señal eléctrica generada, se han realizado diferentes medidas utilizando dos transductores, uno como emisor y otro como receptor, dispuestos de la forma esquematizada en la Fig.3(a); las coordenadas del centro del disco están referidas a este sistema coordenado de ejes. Se ha utilizado el modelo descrito para la síntesis de señales de eco. Para ello, se requiere del conocimiento de la función $U_{ER}(t)$, ver expresión (15). Esta función puede ser calculada a partir del conocimiento de los parámetros del modelo de conversión electromecánica del transductor [7] o puede ser medida. Se ha optado por el segundo método, por ser éste más preciso. Para lo cual, se han enfrentado los transductores entre sí, separados por una distancia de 300 mm, de manera que los efectos producidos por la difracción de ondas fuesen despreciables. El emisor fue excitado con un pulso de corta duración y la señal obtenida en bornas del receptor, una vez normalizada, es la que puede observarse en la Fig.2(b). Esta señal, contiene el comportamiento dinámico de los transductores tanto en emisión como en recepción, así como de los circuitos de excitación y de amplificación de la señal.

Como objetos reflectores se han utilizado tres discos, de 6, 15 y 30 mm de radio, colocados a una profundidad de $z = 155$ mm, dispuestos de manera que la normal a la superficie del disco sea perpendicular al plano de los transductores. Cada uno de los discos se ha situado en tres posiciones espaciales distintas, para la misma profundidad. Estas posiciones coinciden con el centro del disco siendo colineal al centro del emisor, a un punto en el eje de simetría del sistema emisor/receptor, y al centro del receptor respectivamente. Los resultados de las simulaciones y las señales experimentales están representadas en las figuras 3(b), 4(a) y (b). La concordancia de las señales sintetizadas con las obtenidas de forma experimental es bastante buena, pudiendo las diferencias ser atribuidas a errores normales a cualquier sistema de medida y que son muy difíciles de modelar; como por ejemplo, errores de alineamiento o posicionamiento, ruidos eléctricos o acústicos, entre otros. Comparando los gráficos centrales de las figuras 3(b), 4(a) y 4(b) podemos ver como

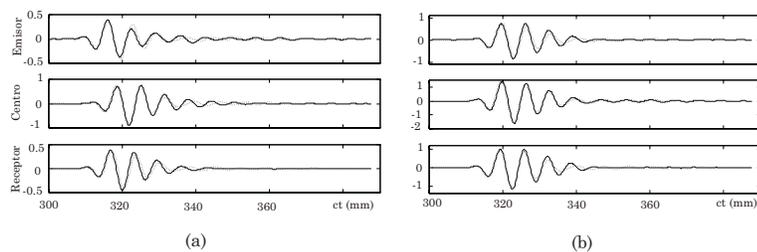


Figura 4: Idem que Fig.3(b) para discos de (a) $R=15$ mm y (b) $R=30$ mm respectivamente.

el modelo representa con mayor fidelidad a la señal experimental a medida que el radio del disco crece. Este es un resultado esperado, considerando que el número de puntos del objeto reflector que satisfacen las condiciones impuestas en las hipótesis de partida para la deducción del modelo aumentan. Dicho de otra manera, los puntos del borde del disco adquieren menor importancia a medida que el radio aumenta.

4 CONCLUSIONES

Utilizando el modelo de Stepanishen, se ha deducido una expresión para modelar la señal eléctrica generada por un receptor plano de área A , debido a la reflexión de ondas acústicas sobre objetos de geometría simple. En la expresión obtenida, las variables dependientes de la geometría se encuentran separadas de las que dependen del proceso de conversión y de la dinámica de los circuitos de excitación y amplificación de la señal. Se ha corroborado que existe un alto grado de similitud entre las medidas experimentales y los previstos por la teoría.

Agradecimientos

Enrique Vargas agradece a la Agencia Española de Cooperación Internacional (Becas Mutis), el apoyo financiero para la realización de la tesis doctoral en la UCM.

Referencias

- [1] Mathias Fink and J. F. Cardoso, *Diffractions effects in pulse-echo measurement*, IEEE Trans. Sonics Ultrason. **31** (1984), no. 0, 313–329.
- [2] A. Freedman, *A mechanism of acoustic echo formation*, Acustica **12** (1962), 10–21.
- [3] Luis Gómez, *Análisis del campo ultrasónico transitorio emitido por arrays lineales sometido a excitaciones temporales arbitrarias*, Tesis doctoral, Pontificia de Comillas - Instituto Católico de Artes e Industria, 1990.
- [4] Gerald R. Harris, *Review of transient field theory for a baffled planar piston*, J. Acoust. Soc. Am. **70** (1981), no. 1, 10–20.
- [5] J. A. Jensen, *A model for the propagation and scattering of ultrasound in tissue*, J. Acoust. Soc. Am. **89** (1991), no. 1, 183–190.
- [6] P. R. Stepanishen, *Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle*, J. Acoust. Soc. Am. (1971), no. 49, 1627–1638.
- [7] Peter R. Stepanishen, *Pulsed transmit/receive response of ultrasonic piezoelectric transducers*, J. Acoust. Soc. Am. **69** (1981), no. 6, 1815–1827.
- [8] Enrique A. Vargas, *Caracterización de reflectores e irregularidades superficiales por ultrasonidos en aire (en trámite de lectura)*, Tesis doctoral, Complutense de Madrid - Ciencias Físicas, Arquitectura de Computadores y Automática, 1999.