

## **MODELAGEM VIBRO-ACÚSTICA PARA DETERMINAÇÃO DE RADIAÇÃO SONORA EM CAIXA DE ENGRENAGEM DE USO VEICULAR**

REFERÊNCIA PACS: 43.40.Yq

Soeiro, Newton S. <sup>1</sup>; Gerges, Samir N. Y. <sup>2</sup>; Bento Coelho, J.L. <sup>3</sup>

1 Universidade Federal do Pará

Departamento de Engenharia Mecânica

Rua Augusto Corrêa s/n – Guamá

66.075-110 Belém-PA-Brasil

Tel: 55 91 211 1961. Fax: 55 91 211 1325

E-Mail: nsoeiro@ufpa.br

2 Universidade Federal de Santa Catarina

Laboratório de Vibrações e Acústica

Caixa Postal 476

88.040-900 Florianópolis-SC-Brasil

Tel: 55 48 234-4074 / 331 9227. Fax: 55 48 331 9677 / 234 1519

E-Mail: gerges@mbox1.ufsc.br

3 Instituto Superior Técnico, Centro de Análise e Processamento de Sinais, 1096 Lisboa, Portugal.

Tel: 351 1 841 9000. Fax: 351 1 352 3014

E-Mail: bcoelho@ist.utl.pt

### **ABSTRACT**

Presented in this paper is a numeric procedure for determination of the acoustical radiation using the finite and boundary element methods. In order to demonstrate the efficiency of the methods used, this procedure is applied in the determination of the radiated sound power, sound pressure field and radiation efficiency of a vehicular gearbox.

### **RESUMO**

O artigo apresenta um procedimento numérico para a solução do problema de radiação sonora, relacionado às estruturas com geometria complexa, usando os métodos de elementos finitos e elementos de contorno. De modo a ilustrar a utilização dos métodos usados, o procedimento é aplicado na determinação da potência sonora radiada, campo de pressão sonora e eficiência de radiação de uma caixa de engrenagem de uso veicular para uma condição de operação específica.

### **INTRODUÇÃO**

Em controle de ruído é quase sempre necessário prever não só o nível de pressão sonora mas também o nível de potência sonora ou a sua forma não dimensional, isto é, a eficiência de radiação, visto que o nível de pressão sonora varia com a distância e ambiente enquanto o nível de potência sonora é uma grandeza que depende somente da fonte sonora. Por outro lado, a potência sonora radiada por uma estrutura está intimamente relacionada ao campo de velocidade na sua superfície, que por sua vez é consequência das forças de excitação presentes e de suas características estruturais.

A predição da potência sonora radiada de uma estrutura passa, em geral, pela formulação de um modelo que permita a previsão de suas características dinâmicas obtendo-se, assim, as condições de contorno necessárias para a solução do problema acústico e, em consequência, a determinação dos parâmetros acústicos.

Neste artigo, objetivando a determinação de parâmetros acústicos relacionados ao problema de radiação sonora de uma caixa de engrenagem, apresenta-se um modelo global da caixa de engrenagem e a metodologia de predição dos parâmetros vibro-acústicos, através dos métodos de elementos finitos e elementos de contorno combinados. Algumas simulações são desenvolvidas para condições distintas de marchas engrenadas variando-se o torque atuante e a rotação de funcionamento da caixa de engrenagem.

## PROCEDIMENTO DE CÁLCULO E FORMULAÇÃO TEÓRICA

O procedimento para a determinação da radiação acústica envolve, de um modo geral, como um passo inicial, a determinação da velocidade de superfície da estrutura sob análise, a qual tem origem no carregamento aplicado sobre a mesma. Em seguida, é feito o cálculo da pressão sonora, resolvendo a equação de onda acústica, com as velocidades de superfície obtidas na etapa inicial representando as condições de contorno do problema acústico. Assim, quando a abordagem tem como enfoque estruturas complexas, como é o caso de uma caixa de engrenagem de uso veicular, os métodos de elementos finitos (MEF) e elementos de contorno (MEC) podem ser usados, respectivamente, para a determinação do campo de velocidade de superfície e parâmetros acústicos, conforme ilustra a Fig. 1.

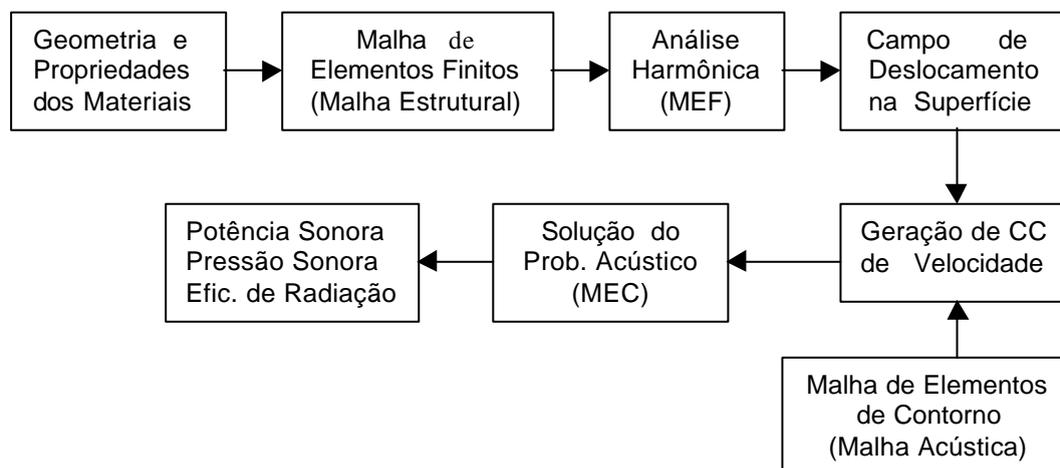


Figura 1 - Esquema do procedimento de simulação do problema de radiação sonora.

### Formulação do Problema de Dinâmica - Método de Elementos Finitos

A equação que governa o movimento vibratório de uma estrutura pode ser dada na forma matricial como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema e  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{F}$  são definidos, respectivamente, como os vetores generalizados de deslocamento e de carga aplicada. As matrizes de massa e de rigidez, relacionadas na Eq. (1), são matrizes globais que representam a estrutura sob análise e são obtidas a partir das matrizes de massa e de rigidez dos elementos finitos usados para discretizar a geometria da estrutura que, por sua vez, são obtidas a partir das seguintes equações:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\mathbf{v}} \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\mathbf{v} \quad (2)$$

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{\mathbf{v}} \mathbf{H}^t \mathbf{r} \mathbf{H} \, d\mathbf{v} \quad (3)$$

onde  $\mathbf{r}$  é a massa específica do material,  $\mathbf{H}$  é a matriz função de forma,  $\mathbf{B}$  é a matriz de derivadas das funções de forma e  $\mathbf{D}$  é a matriz de elasticidade do elemento. A matriz de amortecimento global  $\mathbf{C}$  é obtida a partir das matrizes de massa e rigidez global assumindo a hipótese de amortecimento proporcional ou de Rayleigh, como:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (4)$$

#### Formulação do Problema Acústico - Método de Elementos de Contorno

A análise acústica pelo método de elementos de contorno é um procedimento de solução numérica baseado na solução de equações integrais obtidas a partir da aplicação do teorema da divergência ao produto interno da equação diferencial, que governa o problema, e a função de Green. Para o problema acústico, no domínio da frequência, esta equação diferencial é a equação escalar de Helmholtz, que segundo Gerges (2000) é dada por:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (5)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano,  $p$  é a pressão acústica e  $k = \omega/c$  é o número de onda acústica.

As possíveis condições de contorno utilizadas são as seguintes:  $p = \bar{p}$  em  $S_1$  (condição de Dirichlet),  $\partial p / \partial n = -i \mathbf{r} \omega \bar{v}_n$  em  $S_2$  (condição de Neumann) e  $\partial p / \partial n = -i \mathbf{r} \omega A_n p$  em  $S_3$  (condição de Robin), com  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , sendo  $\bar{p}$  a pressão sonora na superfície  $S_1$ ,  $\bar{v}_n$  a velocidade normal na superfície  $S_2$  e  $A_n$  a admitância normal na superfície  $S_3$ .

Em acústica, tanto a análise de elementos de contorno direta (aproximação colocacional) quanto a indireta (aproximação variacional) podem ser usadas. As palavras direta/indireta referem-se a escolha da incógnita na superfície do modelo. O método direto usa a pressão e velocidade normal como variáveis de superfície enquanto o método indireto utiliza a descontinuidade de pressão e de velocidade normal através da superfície (diferença entre os dois lados de uma superfície). Estas duas formulações levam a equações integrais diferentes, para o campo de pressão, que são resolvidas usando técnicas diferentes. Por outro lado, as palavras colocacional / variacional referem-se a técnica de solução. Em uma técnica colocacional força-se a solução aproximada satisfazer a equação integral do contorno exata em um número finito de pontos sobre a superfície, enquanto que na técnica variacional, a solução aproximada é obtida minimizando-se um funcional associado com a equação integral do contorno original. Neste trabalho é apresentada a formulação matemática do método indireto que foi o utilizado nas simulações.

Método Indireto (Aproximação Variacional)

A equação integral que forma a base da análise de elemento de contorno indireta, segundo Gardner et al (1996), é obtida em termos de descontinuidade de velocidade ( $\sigma$ , *single layer potencial*) e de pressão ( $\mu$ , *double layer potencial*) através da superfície, como:

$$p(\mathbf{R}) = -\int_S \left[ G(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \mathbf{s}(\mathbf{R}') - \frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R}')} \mathbf{m}(\mathbf{R}') \right] ds(\mathbf{R}') \quad (6)$$

onde  $p$  é a pressão acústica sobre a superfície,  $\partial\{\cdot\}/\partial n(\mathbf{R}')$  é a derivada parcial de uma função em relação a normal para fora do domínio acústico em um ponto  $\mathbf{R}'$  da superfície,  $G$  é a função de Green e  $\sigma$  e  $\mu$  estão relacionados, respectivamente, à diferença de velocidade de partícula e de pressão acústica através da superfície  $S$  como:

$$\mathbf{s} = \frac{\partial p^+}{\partial n} - \frac{\partial p^-}{\partial n} = -i \mathbf{r} \omega (u^+ - u^-) \quad (7)$$

$$\mathbf{m} = p^+ - p^- \quad (8)$$

Nas Eq. (7) e (8), os sobrescritos + e - simbolizam os valores em ambos os lados da superfície  $S$ .

Embora a formulação indireta seja válida para condições de contorno em geral, a representação aqui é restrita à condição de contorno de velocidade, devido ao propósito da abordagem feita para o problema de determinação da eficiência de radiação acústica. Sob esta condição, visto que  $\sigma = 0$ , a equação integral para a velocidade de partícula normal pode ser obtida da equação integral de pressão (Eq. (6)) como:

$$-i \mathbf{r} \omega u(\mathbf{R}) = \int_{S(\mathbf{R}')} \left[ \frac{\partial^2 G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R}') \partial n(\mathbf{R})} \mathbf{m}(\mathbf{R}') \right] ds(\mathbf{R}') \quad (9)$$

A solução da Eq. (6) pode ser obtida pela minimização de um potencial  $J$ , onde:

$$J = \frac{1}{2} \int_{S(\mathbf{R})} \int_{S(\mathbf{R}')} \frac{\partial^2 G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R}') \partial n(\mathbf{R})} \mathbf{m}(\mathbf{R}') \mathbf{m}(\mathbf{R}) ds(\mathbf{R}') ds(\mathbf{R}) + i \mathbf{r} \omega \int_{S(\mathbf{R})} u(\mathbf{R}) \mathbf{m}(\mathbf{R}) ds(\mathbf{R}) \quad (10)$$

Os valores desejados das variáveis de superfície dos elementos de contorno,  $\mu$ , são aqueles que minimizam o funcional definido na Eq. (10). Este funcional pode ser expresso na forma matricial como:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{\hat{m}}^T \mathbf{A} \mathbf{\hat{m}} - \mathbf{\hat{m}}^T \mathbf{b} \quad (11)$$

onde os elementos da matriz  $\mathbf{A}$  e do vetor  $\mathbf{b}$  são obtidos da avaliação das integrais aproximando os potenciais  $\sigma$  e  $\mu$  nos nós dos elementos usados na discretização da superfície  $S$ . A equação final do sistema pode ser obtida, a partir da Eq. (11), impondo a condição de estacionariedade em  $\mathbf{m}$ , isto é  $\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{b}$ . Subseqüentemente, as respostas de velocidade e pressão acústica no campo, potência sonora radiada e eficiência de radiação podem ser avaliadas pelas seguintes expressões:

$$p(\mathbf{r}) = -\int_S \left[ G(\mathbf{R}', \mathbf{r}) \mathbf{s}(\mathbf{R}') - \frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{r})}{\partial n(\mathbf{R}')} \mathbf{m}(\mathbf{R}') \right] ds(\mathbf{R}') \quad (12)$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial x_j(\mathbf{r})} = -i\rho\omega u_j = -\int_{S(\mathbf{R}')} \left[ \frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{r})}{\partial x_j(\mathbf{r})} s(\mathbf{R}') - \frac{\partial^2 G(\mathbf{R}', \mathbf{r})}{\partial n(\mathbf{R}') \partial x_j(\mathbf{r})} m(\mathbf{R}') \right] ds(\mathbf{R}') \quad (13)$$

$$W_{rad} = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \{ \mathbf{m} \mathbf{n}^* \} ds \quad (14)$$

$$S_{rad} = \frac{W_{rad}}{\rho c \int_S |v_{rms}^2| ds} \quad (15)$$

onde  $x_j(\mathbf{r})$ , para  $j = 1$  a  $3$ , são os vetores unitários nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, na posição  $\mathbf{r}$  e  $u_j$  é a velocidade de partícula na direção  $x_j$  e posição  $\mathbf{r}$ .

### OS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS E ELEMENTOS DE CONTORNO

O modelo de elementos finitos da caixa de engrenagem é construído a partir da união do modelo do sistemas de eixos engrenados com o modelo do alojamento, conforme mostrado na Fig. 2. A junção destes dois modelos é feita através das matrizes de rigidez que representam os mancais de rolamento, as quais são obtidas conforme modelo de mancal de elementos rolantes descrito no artigo de Soeiro et al. (1999). Assim, a malha de elementos finitos que representa a caixa de engrenagem é uma combinação de 7764 elementos de casca, 987 elementos de viga, 27 elementos de rigidez generalizadas e 15 elementos representados por uma matriz de massa diagonal onde os elementos da diagonal representam as propriedades de inércia rotativa e de translação. Na Fig. 2 são mostrados dois modelos do sistema de eixos engrenados, que correspondem às condições de primeira e terceira marchas engrenadas, nos quais a diferença básica consiste na representação dos pares de engrenagens acopladas.

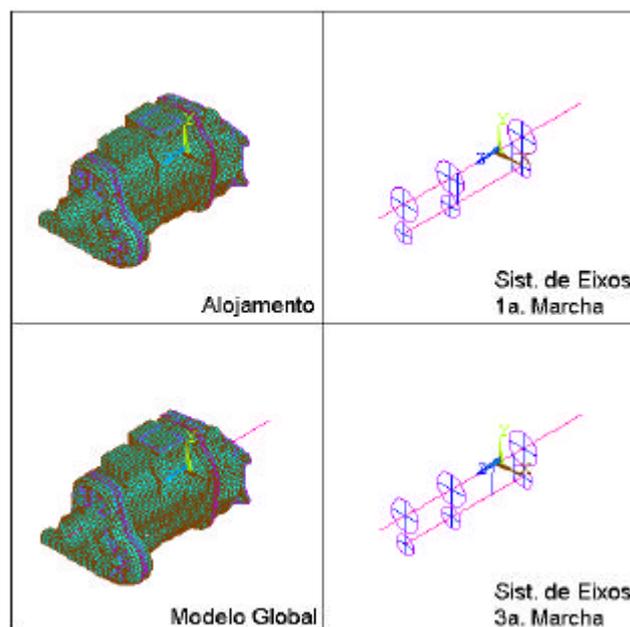


Figura 2 - Modelo de elementos finitos

O modelo de elementos de contorno da caixa de engrenagem é constituído por uma malha de elementos de contorno que contém elementos de forma retangular e triangular, que representam a geometria exterior fechada do alojamento, e por uma malha interior de elementos de impedância singular. A necessidade desta malha de elementos de impedância singular é devido ao problema de não unicidade de solução, em algumas frequências denominadas de frequências irregulares, que ocorre quando a superfície vibrante é

representada por um contorno fechado e a frequência de interesse corresponde à frequência de ressonância acústica do problema interior com condições de contorno idênticas. Assim, para eliminar este problema, é simulada uma quantidade de amortecimento no interior do contorno fechado através da especificação de uma condição de impedância que, para ser efetiva, necessita ter um valor positivo para a parte real, conforme informações obtidas nos artigos de Schenck (1968) e de Burton e Miller (1971). Portanto, foi usada uma malha de 150 elementos de impedância singular e especificada a condição de impedância igual a  $1,21 \times 344$ , sendo que esta malha e sua posição interna são mostradas na Fig. 3, juntamente com a malha de elementos de contorno da caixa de engrenagens.

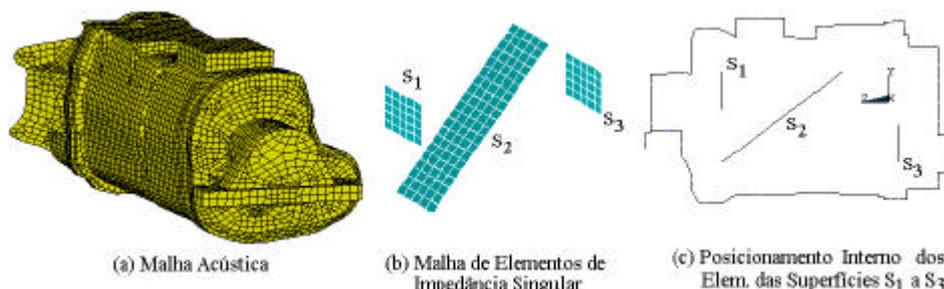


Figura 3 - Modelo de elementos de contorno e elementos de impedância singular.

### PREDIÇÃO DO COMPORTAMENTO VIBRO-ACÚSTICO

O problema de radiação acústica foi resolvido para condições de contorno de velocidade, as quais foram geradas nos nós correspondentes à superfície do alojamento, tendo-se por base a análise dinâmica via método de elementos finitos. Nesta análise o objetivo inicial foi a determinação do campo de deslocamento na superfície do alojamento da caixa de engrenagem, devido à excitação proveniente do engrenamento, a qual foi representada por uma série de Fourier composta pelos cinco primeiros harmônicos das frequências de engrenamento correspondentes à marcha engrenada. Assim, uma análise harmônica foi desenvolvida com base no método de expansão modal, onde a resposta forçada é obtida a partir da combinação linear das formas modais da estrutura que, por sua vez, foram determinadas a partir da análise modal via método de elementos finitos. Posteriormente, foram obtidos os resultados primários (*double layer potencial*), a partir do método de elementos de contorno, e em seguida foram obtidos a potência sonora radiada, o campo de pressão sonora e a eficiência de radiação em cada uma das frequências de engrenamento e seus harmônicos, dentro da faixa de 0 a 3 kHz. As Fig. 4, 5 e 6 apresentam uma amostra de resultados referentes à condição de primeira marcha, 100 % do torque líquido e rotação de 1800 rpm.

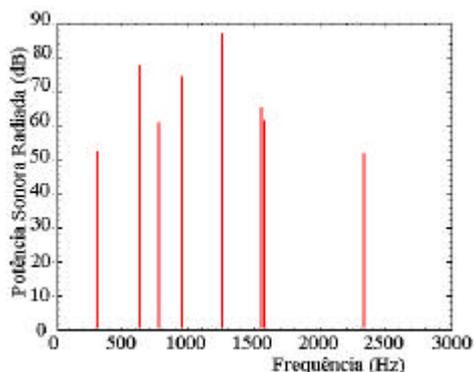


Figura 4 - Potência Sonora Radiada

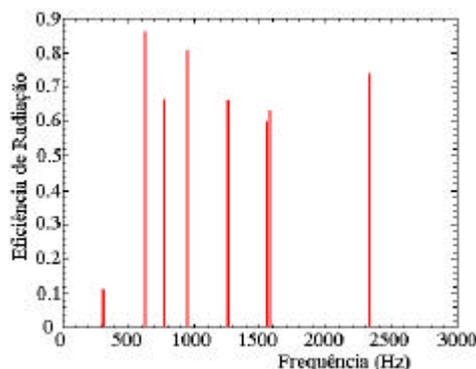
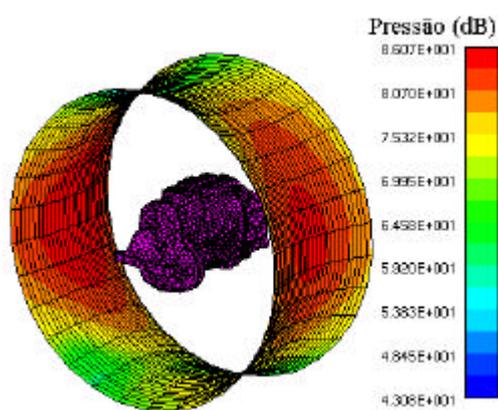


Figura 5 - Eficiência de Radiação

### CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia de abordagem numérica para determinação de parâmetros vibro-acústicos de estruturas complexas.



Uma aplicação feita com base em uma caixa de engrenagem de uso veicular, para a qual foi apresentado seus modelos de elementos finitos e elementos de contorno e alguns dos resultados obtidos referentes a uma condição operacional específica, permitiu verificar a potencialidade da metodologia empregada para a abordagem deste tipo de problema. Por outro lado, embora não tenha sido possível apresentar, no corpo deste artigo, a grande variedade de resultados obtidos nas simulações numéricas realizadas, o conjunto de dados obtidos na pesquisa permitiu inferir que as modificações de potência sonora radiada são sensíveis às condições operacionais da caixa de engrenagem e apontaram as rotações de 1800 e 3000 rpm como sendo as que levam a um valor máximo de potência sonora radiada nas condições

Figura 6 - Campo de pressão sonora de primeira e terceira marcha, respectivamente, bem como indicam ser as superfícies laterais do alojamento as partes que mais contribuem para a radiação sonora, como pode ser visualizado na Fig.6 referente a frequência de 1264,8 Hz.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Burton, A. J. e Miller, G. F., 1971, "The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems", Proc. R. Soc. London, V. 323, pp. 201-220.
- Gardner, K. B. et al, 1996, "Radiation efficiency calculation for verification of boundary element acoustic codes", Noise Control Eng. J., V. 44 (5), pp. 215-223.
- Gerges, S. N. Y., 2000, "Ruído: fundamentos e controle". 2a. Ed. Florianópolis: UFSC.
- Schenck, H. A., 1968, "Improved integral formulation for acoustic radiation problems", Journal of the Acoustical Society of America, V. 44, N. 1, pp. 41-58.
- Soeiro, N. S. et al., 1999, "Rolling bearing modelling to be incorporated in finite element models as generalized stiffness elements", 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering.