Aplicación del método de los elementos de contorno para la determinación de la atenuación del ruido producido por barreras

*Antonio Sanchis Sabater *, Alicia Giménez Pérez *, Albert Marín Sanchis, Pedro E. Solana Quirós*
Laboratorio de Acústica Industrial. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales.
Universidad Politécnica de Valencia.
** Miembro de la S.E.A.*

RESUMEN

Este artículo describe la aplicación del método de los elementos de contorno para el cálculo de la atenuación de ruido por interposición de barreras acústicas en espacios abiertos.

Partiendo de la formulación de ecuaciones integrales de Burton y Miller, que permiten obtener soluciones válidas para cualquier número de ondas. Se describe el proceso seguido para la obtención de los operadores integrales para el caso mencionado y seguidamente se determina la función de onda en la superficie del contorno con el fin de poder determinar el campo sonoro en cualquier punto del espacio exterior. A continuación se comentan los resultados obtenidos.

Introducción

El tráfico de vehículos, especialmente el de las vías de comunicación interurbanas crea altos niveles de ruido. La protección más inmediata es la construcción de una barrera acústica. Uno de los problemas en el diseño de la barrera es el de la difracción del sonido en el borde de la misma al restar eficacia al cálculo del campo acústico. Los diferentes trabajos sobre la simulación del comportamiento acústico de las barreras establecen hipótesis simplificativas necesarias que, en muchos casos, van en detrimento de la exactitud. Para abordar analíticamente el estudio del campo acústico en la zona de sombra de la barrera, se ha de recurrir a métodos numéricos como: **Elementos Finitos** y particularmente el Método de los **Elementos de Contorno.**

Formulación del problema

El Método de los Elementos de Contorno se puede tratar de forma directa o indirecta. El problema directo, utilizado para este estudio, parte de la fórmula integral de Helmholtz (1).

Cuando se resuelven los problemas exteriores, es usual expresar la función de onda total como la suma de dos ondas: una onda incidente ϕ_i y otra difusa ϕ_d, que cumplen la condición de radiación, $\phi_t = \phi_i + \phi_d$ A partir de la ecuación (1) y teniendo en cuenta esta descomposición de la solución, la función de onda total se puede obtener a partir de (2).

O bien a partir de la fórmula integral de Helmholtz (2) diferenciada en el punto P, (3).

Imponiendo a la función de onda total ϕ_t la condición de Robin en el contorno $\partial\phi_t / \partial n + h.\phi_t = 0$ las ecuaciones (2) y (3) quedan reducidas a (4), donde $[M_{K,h}] = [M_K]+h.[L_K]$ y $[N_{K,h}]=[N_K]+h.[M_K]^T$

Discretización en elementos superficiales

Para poder aplicar las ecuaciones integrales de Helmholtz al problema exterior es necesario que la totalidad de las superficies que limitan el dominio exterior sean superficies regulares tal como las define Kellog, o Lyapunov. En nuestro caso, las superficies se reducen a planos unidos consecutivamente. Los elementos superficiales son, los que corresponden a la discretización de la topografía del terreno en torno a la barrera, y los de la propia barrera. El análisis se ha realizado en dos dimensiones para fuente lineal; los planos quedan reducidos a segmentos. Los elementos de contorno finitos quedan definidos por el punto central, su longitud y el plano al que pertenece.

(1)
$$\iint_\Omega \left[\phi(Q).\frac{\partial G_K(P,Q)}{\partial n_Q} - G_K(P,Q).\frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_Q}\right] d\Omega_Q = \begin{cases} \phi(P);\ P \in exterior \\ \frac{1}{2}.\phi(P);\ P \in \Omega \\ 0;\ P \in interior \end{cases}$$

(2)
$$\iint_\Omega \left[\phi_t(Q).\frac{\partial G_K(P,Q)}{\partial n_Q} - G_K(P,Q).\frac{\partial \phi_t(Q)}{\partial n_Q}\right] d\Omega_Q = \begin{cases} \phi_t(P) - \phi_i(P);\ P \in E \\ \frac{1}{2}.\phi_t(Q) - \phi_i(P);\ P \in \Omega \\ -\phi_i(P);\ P \in D \end{cases}$$

(3)
$$\frac{\partial}{\partial n_P}\iint_\Omega \left[\phi_t(Q).\frac{\partial G_K(P,Q)}{\partial n_Q} - G_K(P,Q).\frac{\partial \phi_t(Q)}{\partial n_Q}\right] d\Omega_Q = \begin{cases} \frac{\partial \phi_t(P)}{\partial n_P} - \frac{\partial \phi_i(P)}{\partial n_P};\ P \in E \\ \frac{1}{2}.\frac{\partial \phi_t(Q)}{\partial n_P} - \frac{\partial \phi_i(P)}{\partial n_P};\ P \in \\ -\frac{\partial \phi_i(P)}{\partial n_P};\ P \in D \end{cases}$$

La impedancia acústica de cada elemento, al igual que el coeficiente de Robin $h(Z_2 / Z_1)$ se obtiene a partir de la resistencia mecánica del plano al cual pertenece, por la expresión de Delany, (6).

en donde f representa la frecuencia, σ la resistencia al flujo de aire del terreno, Z_2 la impedancia del plano y Z_1 la del aire.

El método de Burton y Miller

Tanto la fórmula de Helmholtz como su formulación diferencial tienen solución no única. Por ello Burton y Miller propusieron un camino basado en una combinación de ambas formulaciones. Así, la combinación lineal propuesta queda de la siguiente forma (7).

Modelo matemático

El modelo matemático desarrollado en el Laboratorio de Acústica Industrial de la Universidad Politécnica de Valencia, abordó la resolución de la formulación de Burton y Miller mediante la realización de un conjunto de programas que permitieran determinar para cualquier número de ondas, la atenuación acústica que produce una barrera con una geometría y características mecánicas dadas, en una superficie horizontal de su zona de sombra. Dicha atenuación se determinará mediante la diferencia del nivel sonoro calculada con barrera y sin ella, teniendo en cuenta las reflexiones en las distintas superficies del terreno.

El modelo programado en lenguaje fortran e implementado sobre un ordenador Alliant fx/100 contiene los siguientes pasos:

1° Se discretiza la topografía del terreno donde se pretende instalar la barrera mediante planos. Como las fuentes de ruido se supondrán lineales y paralelas entre sí, la dirección OY será la tangente a las fuentes. Los planos tendrán una profundidad unidad y cada uno de ellos quedará definido por los vértices extremos del segmento $[(x_i, z_i), (x_{i+1}, z_{i+1})]$ expresados en metros, y la resistencia mecánica del plano.

(4)
$$\left\{\tfrac{1}{2}[I]-[M_{K,h}]\right\}\phi_t = \phi_i,\ P \in \Omega$$

(5)
$$\left\{\tfrac{1}{2}.h.[I]+[N_{K,h}]\right\}\phi_t = -\frac{\partial \phi_i}{\partial n},\quad P \in \Omega$$

(6)
$$\frac{Z_2}{Z_1} = 1 + 9{,}08.(\frac{f}{\sigma})^{-0{,}75} - j.11{,}9.(\frac{f}{\sigma})^{-0{,}73}$$

(7)
$$\left\{-\tfrac{1}{2}.[I]+[M_{K,h}]+\alpha.\left\{\tfrac{1}{2}h.[I]+[N_{K,h}]\right\}\right\}\phi_t = -(\phi_i + \alpha.\frac{\partial \phi_i}{\partial n})$$

(8)
$$h = j.K.\frac{Z_1}{Z_2}$$

(9)
$$G(r) = \frac{j}{4}.H_o^{(1)}(K.r) = \frac{-N_0(K.r)+j.J_0(K.r)}{4}$$

(10)
$$\frac{\partial G(r)}{\partial n_Q} = K.\frac{N_1(K.r)-j.J_1(K.r)}{4}.\cos(\vec{n}_Q.\vec{r})$$

(11)
$$\begin{aligned}
h.[L_K].[\phi_t] &= \iint_\Omega G_K(P,Q).h(Q).\phi_t(Q).d\Omega_Q \\
[M_K].[\phi_t] &= \iint_\Omega \frac{\partial G_K(P,Q)}{\partial n_Q}.\phi_t(Q).d\Omega_Q \\
h.[M_K]^T.[\phi_t] &= \frac{\partial}{\partial n_P}\iint_\Omega G_K(P,Q).h(Q).\phi_t(Q).d\Omega_Q \\
[N_K].[\phi_t] &= \frac{\partial}{\partial n_P}\iint_\Omega \frac{\partial G_K(P,Q)}{\partial n_Q}.\phi_t(Q).d\Omega_Q
\end{aligned}$$

(12)
$$[h.L_K(i,m)]\phi_t(m) = \sum_{j=1}^{N} h_j \iint_{\Omega_j} G_K(P_i,Q).\frac{\partial \phi_t(Q)}{\partial \phi_t(m)}.\phi_t(m).d\Omega_j \Rightarrow L_K(i,m) = \frac{\sum_{n=1}^{N}\iint_{\Omega_n}\left[-N_0(K.r_{i,n})+j.J_0(K.r_{i,n})\right].f_{mQ}(\phi_t(m)).d\Omega_n}{4.\phi_t(m)}$$

(13)
$$\begin{cases}
h.[L_K].[\phi_t] \approx h_n.\dfrac{-N_0(K.r_{i,n})+j.J_0(K.r_{i,n})}{4}.\iint_{\Omega_n}\phi_t(Q).e^{j.K.D.\cos(\bar{r},\bar{i}_Q)}.d\Omega_n \\
[M_K].[\phi_t] \approx K.\dfrac{N_1(K.r_{i,n})-j.J_1(K.r_{i,n})}{4}.\cos(\vec{n}_Q,\vec{r}_{i,n}).\iint_{\Omega_n}\phi_t(Q).e^{j.K.D.\cos(\bar{r},\bar{i}_Q)}.d\Omega_n \\
h.[M_K]^T.[\phi_t] \approx h_n.K.\dfrac{N_1(K.r_{i,n})-j.J_1(K.r_{i,n})}{4}.\cos(\vec{n}_P,\vec{r}_{i,n}).\iint_{\Omega_n}\phi_t(Q).e^{j.K.D.\cos(\bar{r},\bar{i}_Q)}.d\Omega_n
\end{cases}$$

(14)
$$N_1(\xi) = \frac{-\xi.(1-\xi)^2.(3+2.\xi)}{4};\ N_2(\xi) = (1-\xi^2)^2;\ N_3(\xi) = \frac{-\xi.(1+\xi)^2.(3-2.\xi)}{4}$$

(15)
$$\iint_{\Omega_n}\phi_t(Q).e^{j.K.D.\cos(\bar{r},\bar{i}_Q)}.d\Omega_n = \frac{l_n}{2}.\sum_{m=1}^{3}\phi_{2.(n-1)+m+p-1}.\int_{-1}^{1} e^{\frac{j.K.l_n.\xi.\cos(\bar{r},\bar{i}_Q)}{2}}.N_m(\xi).d\xi$$

(16)
$$[N_K][\phi_t] = \iint_\Omega \frac{\partial \phi_t(Q)}{\partial_q}.\frac{\partial G_K(P,Q)}{\partial_q}.d\Omega_Q + \iint_\Omega K^2.\vec{n}_P.\vec{n}_Q.G_K(P,Q).\phi_t(Q).d\Omega_Q$$

(17)
$$[N_K][\phi_t] = \iint_\Omega \frac{\partial \phi_t(Q)}{\partial_q}.\frac{\partial G_K(P,Q)}{\partial_q}.d\Omega_Q + [K^2.\vec{n}_P.\vec{n}_Q.][L_K][\phi_t]$$

(18)
$$\iint_\Omega \frac{\partial \phi_t(Q)}{\partial_q}.\frac{\partial G_K(P,Q)}{\partial_q}.d\Omega_Q = -K.\frac{N_1(K.r_{i,n})-j.J_1(K.r_{i,n})}{4}.\left|\cos(\vec{r}_{i,n},\bar{i}_P)\right|.\sum_{m=1}^{3}\phi_{2.(n-1)+m+p-1}.\int_{-1}^{1}\frac{\partial N_m(\xi)}{\partial \xi}.e^{\frac{j.K.l_n.\xi.\cos(\bar{r},\bar{i}_Q)}{2}}.d\xi$$

2° El programa determina la orientación del plano, el vector asociado al mismo y discretiza cada plano en elementos de superficie. Cada elemento quedará definido por un punto, el área del mismo y el plano a que pertenece. Con el fin de ahorrar memoria y reducir el tiempo de ejecución, la discretización de los planos se hace de forma desigual, de forma que en aquellos puntos más alejados de la zona de estudio cuya influencia en ésta es pequeña ya que decrece con la distancia, los elementos superficiales serán más grandes que en los próximos a la misma. Por otra parte se ha considerado un mínimo de cinco elementos por plano para que se pueda determinar la variación de la densidad superficial en él.

3° Se introduce la fuente o fuentes, expresando sus coordenadas x, z.

4° Se determinar el valor del campo incidente y el de su derivada.

5° Se obtienen los operadores integrales $[L_K]$, $[M_K]$ y $[N_K]$ y el sistema de ecuaciones de la densidad superficial sonora. Los operadores integrales facilitan el tratamiento numérico del campo acústico en la zona de sombra, conociendo la resistencia mecánica de los materiales del terreno y de la barrera.

Para la determinación de los operadores se elige en cada caso K real y asigna α igual a la unidad imaginaria con signo opuesto a K. La constante **h** de la condición de Robin se determina por cálculo de la Impedancia del plano respecto a la impedancia acústica del aire, teniendo en cuenta la ecuación de Delany y otros (6) mediante (8).

El término entre llaves del primer miembro de la ecuación (7) será una matriz cuadrada de MxM elementos. Dado que cada elemento tiene tres nodos y, los extremos están compartidos con los elementos contiguos, cada elemento aporta dos nodos al conjunto. Los vértices entre planos, debido a la diferencia de pendientes, se consideran nodos dobles por todo lo cual la dimensión M será M = 2.N+P, con N el número de elementos superficiales y P el número de planos.

Así, el primer miembro de dicha ecuación será el producto de la matriz cuadrada indicada por el vector M dimensional formado por el valor del campo en cada nodo. Este vector será la incógnitas de nuestro sistema de ecuaciones.

6° La resolución del sistema proporciona las densidades superficiales en cada punto.

7° Finalmente se obtiene el campo sonoro para cada punto de la zona de estudio en los siguientes dos supuestos:

a) Con todos los planos de trabajo (barrera y topografía).

b) Con topografía del lugar.

Comparando estos resultados, se obtiene el efecto de la inserción de la barrera en el terreno, y comparando a) con el campo sonoro directo en cada punto, se obtiene la atenuación de la barrera.

Determinación de los operadores integrales

Como se trabaja con fuentes lineales la función de Green y su derivada será *n* (9) y (10).

Cada uno de los operadores integrales se corresponden con las integrales de (11).

Cada una de estas ecuaciones sirven para obtener las distintas componentes de los operadores, así se obtiene que la componente $L_K(i,m)$ significa que i es el punto P y el *m* aquel cuyo punto representativo Q_m tiene como densidad superficial $\phi_t(m)$, es decir (12) (13).

donde D representa la distancia de cada punto al centro del elemento y $\vec{t}_Q$ el versor tangente al elemento Q. Para hallar la integral se supone una función de forma a la variable $\vec{t}_Q$, asignando como función de forma los polinomios de Lagrange-Hermite (14).

Denominando l_n a la longitud del elemento n, se tiene (15).

El operador [NK] se obtiene a partir de la transformación de Maue Mitnezer (16) (17).

Análogamente se tiene (18).

REFERENCIAS

[1] Banerjee P.K.; Butterfield R. Mac Graw-Hill 1981
[2] Bettes P. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 11 p 53-64, 1977
[3] Brebbia C.A.; Walker S. Applied Math Modelling núm 6 vol 2 p 135-137, 1978
[4] Burton A. J.; Miller G. F. Proc. Roy. Soc. Lond. A. Vol 323 pp 201-210, 1971
[5] Delany M.E., E.N. Bazley. Applied Acoustics vol 3 p 105-116, 1970
[6] Latcha M.A.; Akay A.; Asme Journal of Vibration; Acoustics: Stress and Reliability in Design, núm 10, vol 108, p 447-453 ,1986
[7] Sanchis Sabater, A. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia. 1993
[8] Sanchis Sabater, A.; Giménez Pérez, A.; Marín Sanchis, A. ; Solana Quirós, P. E. Tecniacústica 96 Barcelona, Octub. 1996
[9] Sanchis Sabater, Antonio, Giménez Pérez, Alicia; Marín Sanchis, Albert; Solana Quirós, Pedro E. Tecniacústica 96 Barcelona Octubre 1996
[10] Sanchis Sabater, Antonio, Giménez Pérez, Alicia; Marín Sanchis, Albert; Solana Quirós, Pedro E. Tecniacústica 96 Barcelona. Octubre 1996
[11] Sanchis, Antonio; Giménez, Alicia; Marín, Albert; Solana, Pedro; Picard, M.A.; Romero, José. ASVA 97 2-4 april Tokyo, Japan, 1997
[12] Seznec R. 11 eme ICA Vol 1 p 75-88 Paris-Lyon-Toulouse 1983
[13] Seznec R. Journal of Sound and Vibration núm 2 vol 73 p 195-209 1980
[14] Tai G.R.C.; Shaw R.P.; The Journal of the Acoustical Society of America núm 3. Vol 56 pag. 796-804 1974.
[15] Ursell F. Proc. Cambridge Philos. Soc. Vol 74 p 117-125 1973
[16] Zienkiewicz O.C.; Kelly D.W.; Bettes P. International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol 11 p 355-375 1977