CÁLCULO DO ISOLAMENTO ACÚSTICO DE PAREDES COMPOSTAS: REVISÃO E GENERALIZAÇÃO DO MODELO DE LONDON

PACS: 43.50.Gf

C. S. André, Jorge [1]; O. S. Mateus, Mário [2]; G. Silva, Manuel Carlos [3]
[1,3] Dep. de Engª. Mecânica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra;
[2] ADAI – Associação para o Desenvolvimento da Aerodinâmica Industrial
[1,3] Pinhal de Marrocos, Pólo II, [2] Caminho da Malavada, 12
3030 Coimbra - Portugal
Tels.: [1,3] 351 239 790 732; [2] 351 239 708 580
Fax: [1,3] 351 239 790 771; [2] 351 329 708 580
E-mails: [1] jorge.andre@dem.uc.pt; [2] adai@mail.telepac.pt; [3] manuel.gameiro@dem.uc.pt.

ABSTRACT

The model of London (1949,1950) is presented to the acustical engineer, with the purpose of fulfilling an important lack of the literature in this field of engineering. With a simple generalisation, this model allows the calculation of the acustical transmission loss ψ [dB] of multiple walls composed of an arbitrary number of homogeneous pannels separated by air gaps, both for directional and diffuse reverberant sound fields, either monocromatic or policromatic.

RESUMO

Apresenta-se o modelo de London (1949,1950) ao projectista de isolamentos acústicos, visando suprir uma importante lacuna da literatura nesta área da engenharia. Mediante uma generalização simples, este modelo permite calcular a perda de transmissão acústica ψ [dB] de paredes múltiplas com um número arbitrário de painéis homogéneos e caixas de ar, para som direccional ou multi-direccional reverberante, e monocromático ou policromático.

1. INTRODUÇÃO

O modelo de London (1949,1950) está, ainda hoje, na base de muitos cálculos de engenharia acústica. Contudo, para o projectista de engenharia, a compreensão cabal deste modelo pela leitura directa dos artigos originais, não se afigura uma tarefa fácil. Por outro lado, tanto quanto é do conhecimento dos Autores, as descrições do modelo disponíveis na literatura de engenharia (cfr. Beranek 1960, 1971, 1993, Lord 1980), mormente em língua portuguesa (cfr. Mateus e Tadeu 1999, Silva 1978), são demasiado superficiais para oferecer uma verdadeira via alternativa. No presente artigo, apresenta-se uma exposição acessível, ordenada e completa deste modelo, com ênfase para o tratamento de paredes compostas. De passagem, aproveita-se para generalizar o modelo para som policromático (direccional ou reverberante) e para uma classe mais ampla de paredes compostas do que as consideradas por London (paredes simples ou duplas).

2. O MODELO

2.1. Versão-Base (Som Direccional e Monocromático)

2.1.1. Relações básicas de Acústica

Para um trem de ondas acústicas simples, planas (ou direccionais) monocromáticas e estacionárias, propagando-se num meio gasoso homogéneo, a amplitude complexa do campo flutuante (i.e., já subtraído o valor do campo na condição imperturbada do meio) de pressão p, designada por P, é dada, no ponto de vector de posição **r** e no instante t, por

$$P(\mathbf{r},t) = P_0 \cdot e^{i\cdot(\phi_0 + \omega t - k\cdot \mathbf{r}\bullet\mathbf{t})}, \tag{1}$$

sendo: P_0, a amplitude real; i, a unidade imaginária; $\phi_0 \equiv \phi\,(O,0)$ [rad], a fase na origem do sistema de referência, OXYZ, no instante inicial de contagem do tempo t; ω [rad/s], a frequência angular, convertível numa frequência cíclica f [Hz], dado que $\omega = 2\pi f$; k [rad/m], o número de onda, intercambiável com o comprimento de onda λ [m], através de $\lambda = 2\pi k$; e **t**, o versor da direcção de propagação. Além disso, os parâmetros (ω, k) estão ligados pela relação $\omega = k\cdot c$, sendo c [m/s], a velocidade de propagação das ondas. Se no meio se propagarem, em simultâneo, vários trens de ondas simples, cada um com os seus parâmetros ($P_{0l}, \phi_{0l}, \omega_l, k_l, \mathbf{t}_l$), a amplitude P, do trem de ondas resultante, obtem-se aplicando o Princípio da Sobreposição (Linear). Por outro lado, quaisquer que sejam o número e as características das ondas acústicas (longitudinais) em propagação no meio, das leis de conservação de massa e de quantidade de movimento aplicadas a um volume de controle infinitesimal do meio em oscilação, atendendo à intensidade infinitesimal das ondas sonoras, resulta a equação de onda da Acústica (forma diferencial de Euler, cfr. Beranek 1993):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\cdot \nabla p\,, \tag{2}$$

na qual: **v** e p são a velocidade de oscilação e a flutuação de pressão do meio devidas às ondas, e ρ_0 é a massa volúmica do meio imperturbado (ou silencioso). Tomando a componente segundo OX da eq. (2), substituindo (u,p) –u é a componente de **v** segundo OX– pelas respectivas amplitudes complexas, (U,P), e integrando em ordem ao tempo, resulta a seguinte relação auxiliar, válida para um trem de ondas monocromático:

$$U = \frac{i}{\rho_0 \omega}\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \tag{3}$$

A respeito da interacção do som com uma parede sólida, normal a OX, aplica-se, em primeiro lugar, a Lei da Reflexão, de acordo com a qual, o som direccional P_i, segundo $\mathbf{t}_i$, ao incidir numa das faces da parede, com ângulo de incidência $\theta_i = \angle(OX, \mathbf{t}_i)$, gera um som de reflexão P_r, que se propaga para o interior do meio de proveniência do som, segundo $\mathbf{t}_r$, com ângulo de reflexão $\theta_r = \angle(OX, \mathbf{t}_r)$, simétrico de θ_i (cfr. Fig. 1). Em segundo lugar, designando por P_t a amplitude complexa de pressão do som transmitido para o outro lado da parede, define-se a impedância acústica (complexa) da parede, Z_w, pela relação

$$P_i(0^-, y, t) - P_t(0^+, y, t) = Z_w \cdot U_w(y,t)\,, \tag{4}$$

na qual: com a notação $x = 0^-$, 0^+ se pretendem designar, respectivamente, as faces de incidência/transmissão do som na/da parede; U_w é a amplitude complexa da velocidade de oscilação da parede, segundo OX, induzida acusticamente; e as variáveis (y,t) podem tomar valores arbitrários. Em London (1949) propõe-se a seguinte expressão geral para a impedância acústica de uma parede simples, excitada por som monocromático e direccional, com ângulo de incidência $\theta \equiv \theta_i$ e frequência f:

$$Z_w = R_w + i \cdot L_w = \left(\frac{2r}{\cos\theta} \right) + i \cdot (2\pi f \cdot m) \cdot \left(1 - \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \cdot \sin^4\theta \right), \quad (5a,b)$$

função dos parâmetros acústicos da parede: m [kg/m^2], massa por unidade de área (no plano OYZ); r [kg/m^2·s], um coeficiente dissipativo; e f_c [Hz], frequência crítica (do som incidente) acima da qual se excita o primeiro modo de vibração da parede associado à transmissão de ondas transversais de flexão (com direcção de propagação no plano OYZ). Como se torna claro adiante, a componente real da impedância, R_w, tem carácter dissipativo (resistivo), enquanto a componente imaginária, L_w, tem carácter conservativo (reactivo ou indutivo). Para $f << f_c$ tem-se $L_w \approx 2\pi f \cdot m$, isto é, L_w converte-se numa reactância puramente inercial. Por último, definem-se ainda as seguintes grandezas características da transmissão acústica da parede:

$$A = \left(\frac{P_i}{P_t} \right)_{(O,0)}, \quad \tau = \frac{1}{|A|^2} \quad e \quad \psi = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\tau} \right), \qquad (6a,b,c)$$

designadas, respectivamente, por: A, atenuação (complexa); τ, razão de transmissão de energia; e ψ [dB], perda de transmissão.

2.1.2. Desenvolvimento específico do modelo

A versão-base do modelo trabalha com som monocromático e direccional, visando obter a perda global de transmissão do som, ψ [dB], de uma parede composta genérica (ver Fig. 1), formada por uma série de paredes ou painéis simples (homogéneos), com área infinita no plano OYZ, separadas por caixas de ar. Nomeadamente, é importante que não haja pontes sólidas entre os painéis, através das quais ocorra uma transmissão acústica significativa. Uma vez que o fenómeno tem uma óbvia simetria cilíndrica em torno do eixo OX, opta-se por trabalhar no plano OXY.

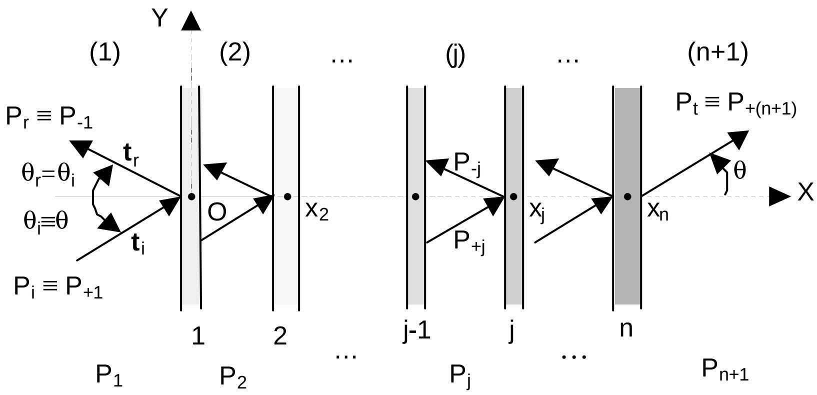

Fig. 1 – Corte no plano OXY, de uma parede composta genérica. Notação básica do modelo.

Para começar, de acordo com a Lei da Reflexão e o Princípio de Sobreposição, desprezando reflexões múltiplas nas faces interiores dos painéis, a amplitude complexa P_j, do campo de pressão acústica no meio (j), resulta simplesmente da sobreposição da onda incidente/ transmitida, de versor $\mathbf{t}_i$ e amplitude P_{+j}, com a onda reflectida, de versor $\mathbf{t}_r$ e amplitude P_{-j}, isto é,

$$\begin{cases} P_j = P_{+j} + P_{-j}\ , \quad (j = 1, 2, \ldots, n);\ \left[P_{+1} \equiv P_i\right] \\ P_{n+1} = P_{+(n+1)};\ \left[P_{+(n+1)} \equiv P_t\right] \end{cases} \qquad (7a,b)$$

Posto isto, os dois tipos de condições de fronteira a que está sujeito o som junto à parede j, nos meios (j,j+1), a uma altura da parede y, arbitrária, exprimem:

(i) o acopulamento entre o movimento oscilante da parede induzido acusticamente, e os campos de pressão acústica (P_j, P_{j+1}), de um e de outro lado da parede, traduzido pela relação de definição da impedância acústica Z_{w_j}, da parede j, similar a (4),

$$P_j\left(x_j^-, y, t\right) - P_{j+1}\left(x_j^+, y, t\right) = Z_{w_j} \cdot U_{w_j}(y, t), \quad (j = 1, 2, \ldots, n); \qquad (8)$$

(ii) e a igualdade entre as velocidades de oscilação do ar no par de meios (j,j+1), junto às faces (esquerda,direita) da parede j, e a própria velocidade da parede, isto é, em amplitudes complexas,

$$\begin{cases} U\left(x_j^-, y, t\right) = U\left(x_j^+, y, t\right) \\ U_{w_j}(y, t) = U\left(x_j^-, y, t\right) = U\left(x_j^+, y, t\right) \end{cases}; \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (9;\ 10a,b)$$

O corpo de eqs. {(3), (7–10)} determina completamente o problema acústico em análise, em ordem às variáveis complexas {…, P_{+j}, P_{-j}, U_{w_j},…}. O algoritmo recorrencial,

$$\begin{cases} P'_{+(n+1)} = 1,\ P'_{+j} = \left(1 + \gamma_j\right) \cdot P'_{+(j+1)} - \dfrac{\gamma_j}{a_j} \cdot P'_{-(j+1)} \\ P'_{-(n+1)} = 0,\ P'_{-j} = a_j \cdot \gamma_j \cdot P'_{+(j+1)} + \left(1 - \gamma_j\right) \cdot P'_{-(j+1)} \end{cases}, \ (j = n, n\text{-}1, \ldots, 1) \qquad (11a,b,c,d)$$

função dos parâmetros $a_j = e^{-2 i \cdot k \cdot x_j \cdot \cos\theta}$ e $\gamma_j = Z_{w_j} \cdot \dfrac{\cos\theta}{2\rho_0 c}$, proporciona a sua solução em ordem às amplitudes complexas reduzidas $P'_{\pm j}$, assim definidas:

$$P'_{\pm j} = \frac{P_{\pm j}}{P_t} = \left(\frac{P_{0_{\pm j}}}{P_{0_t}}\right) \cdot e^{i \cdot \left(\phi_{0_{\pm j}} - \phi_{0_t}\right)} = P'_{0_{\pm j}} \cdot e^{i \cdot \phi'_{0_{\pm j}}}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (12a,b,c)$$

as quais, além de eliminarem as variáveis $\left(P_{0_t}, \phi_{0_t}\right)$, sem influência no fenómeno, permitem escrever imediatamente a atenuação complexa da parede composta, na forma A = P'_{+1}, e, consequentemente, os parâmetros acústicos (τ, ψ) (cfr. eqs. 6a,b,c e Fig. 1). Assim, por exemplo, aplicando este algoritmo a uma parede simples, dupla e tripla, obtem-se, respectivamente,

$$A = \begin{cases} 1 + \gamma_1 \\ 1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \left(1 - \dfrac{a_2}{a_1}\right) \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \\ 1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \left(1 - \dfrac{a_2}{a_1}\right) \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 + \left(1 - \dfrac{a_3}{a_1}\right) \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_3 + \\ \quad + \left(1 - \dfrac{a_3}{a_2}\right) \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 + \left(1 - \dfrac{a_3}{a_2} - \dfrac{a_2}{a_1} - \dfrac{a_3}{a_1}\right) \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \end{cases} \qquad (13a,b,c)$$

2.2. Generalização (Som Multi-Direccional Reverberante e Policromático)

Qualquer ambiente acústico pode ser emulado pela sobreposição de uma infinidade contínua de feixes de trens de ondas planas e monocromáticas, cujos parâmetros $(\phi_0,P_0)_{\mathbf{t},f}$, da amplitude complexa do campo de pressão acústica $P_{\mathbf{t},f}$ (cfr. eq. 1), são função determinística ou aleatória de (**t**,f), estando a direcção **t** contida no hemisfério de incidência na parede e $f \in [f_1,\ f_2[\ \subset [0,\ +\infty[$. Um caso-limite tratável e com grande interesse prático é o chamado campo acústico reverberante, o qual goza das seguintes propriedades estatísticas: (i) para quaisquer dois pares ($\mathbf{t}_k$,f') e ($\mathbf{t}_j$,f''), $\phi_{0_{\mathbf{t}_k,f'}}$ e $\phi_{0_{\mathbf{t}_j,f''}}$ são variáveis aleatórias estatisticamente independentes; e (ii) isotropia. Neste caso, caracterizando o som pela sua densidade espectral de intensidade acústica, I $[W/m^2\cdot sr\cdot Hz]$ (**t**,f), a potência acústica incidente no (ou transmitida pelo) elemento de área A_w (arbitrária) da parede, é dada por

$$\begin{aligned}\dot{E}[W] &= \int_{\varphi:0}^{2\pi}\int_{\theta:0}^{\pi/2}\int_{f_1}^{f_2} I(\theta,\varphi,f)\cdot df\cdot\left(A_w\cdot\cos\theta\right)\cdot\left(\frac{r^2\sin\theta\cdot d\theta d\varphi}{r^2}\right)\\ &= \pi A_w\cdot\int_0^{\pi/2}\int_{f_1}^{f_2} I(\theta,f)\cdot\sin 2\theta\cdot df\cdot d\theta,\end{aligned}\qquad (14a,b)$$

onde: (r,θ,φ) são coordenadas esféricas baseadas em OXYZ (ver Fig. 1), de varrimento do hemisfério de incidência/transmissão do som, em que θ é o ângulo de incidência/ transmissão; e se tirou partido da simetria cilíndrica do fenómeno em relação ao eixo OX. Assim, as razões de transmissão de energia (médias) de uma parede, para campos acústicos reverberantes, policromáticos ($\overline{\tau}_{2\pi,f_1-f_2}$) e monocromáticos ($\overline{\tau}_{2\pi}$), e direccionais policromáticos ($\overline{\tau}_{f_1-f_2}$), são, respectivamente:

$$\begin{cases}\overline{\tau}_{2\pi,f_1-f_2} = \dfrac{\dot{E}_t}{\dot{E}_i} = \displaystyle\int_{f_1}^{f_2} I_i(f)\cdot\overline{\tau}_{2\pi}(f)\cdot df \Big/ \int_{f_1}^{f_2} I_i(f)\cdot df\\ \overline{\tau}_{2\pi}(f) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\tau(\theta,f)\cdot\sin 2\theta\cdot d\theta\ ,\ \tau(\theta,f) = \dfrac{I_t(\theta,f)}{I_i(\theta,f)}\\ \overline{\tau}_{f_1-f_2}(\theta) = \displaystyle\int_{f_1}^{f_2}\tau(\theta,f)\cdot\dot{E}_{f,i}(f)\cdot df \Big/ \int_{f_1}^{f_2}\dot{E}_{f,i}(f)\cdot df\end{cases}\qquad (15a,b;16a,b;17)$$

A eq. (16b) é equivalente à eq. (6b), e, na eq. (17), $\dot{E}_f$ [W/Hz] = 2π [sr]$\cdot A_w\cdot I \equiv$ (densidade espectral de potência). A partir destas razões médias definem-se os correspondentes coeficientes de perda acústica, ($\overline{\psi}_{2\pi,f_1-f_2}$, $\overline{\psi}_{2\pi}$, $\overline{\psi}_{f_1-f_2}$), através de relações similares à (6c). Para o cálculo numérico dos integrais que aparecem nas relações (15b,16a,17), requer-se uma técnica de integração de passo adaptativo, como a do método de Romberg (cfr. Chapra e Canale, 1989), pois as respectivas funções integrandas apresentam picos muito altos e estreitos no intervalo de integração.

Na Tab. 1 resumem-se os parâmetros de entrada/saída do modelo generalizado. As propriedades acústicas (r,f_c) devem ser consultadas na literatura especializada ou determinadas, empiricamente, para o painel em causa.

Parâmetros de Entrada				P. de Saída	
		Direccional	Reverberante	Direccional	Reverberante
Som	Monocromát.	f, θ	f, θ: 0º–90º	ψ [eqs. 11,6]	$\overline{\Psi}_{2\pi}$ [eqs. 11,6a,b;16a,6c]
	Policromático	f: f_1–f_2, θ; $\dot{E}_{f,i}(f)$	f: f_1–f_2, θ: 0º–90º, I_i (f) isotrópico	$\overline{\Psi}_{f_1-f_2}$ [eqs. 11,6a,b;17,6c]	$\overline{\Psi}_{2\pi,f_1-f_2}$ [eqs. 11,6a,b;15b,16a,6c]
Parede	$\{(x_j, m_j, r_j, f_{c_j}),\ j = 1, \ldots, n\}$ n = (nº de painéis simples) • (m_j, r_j, f_{c_j}) = (propr. acústicas do painel j; cfr. eq.5b) x_j = (coordenada x do ponto médio, segundo a espessura, do painel; cfr. Fig. 1)				
Ar	ρ_0, c				

Tab. 1 – Parâmetros de entrada/saída do modelo de London generalizado.

3. CASO PRÁTICO ILUSTRATIVO

Na Fig. 2 mostram-se as curvas espectrais das perdas de transmissão acústica direccionais, ($\psi_{0º}$, $\psi_{45º}$, $\psi_{80º}$), e média hemisférica, $\overline{\Psi}_{2\pi}$ (para som reverberante monocromático), de uma parede dupla, no intervalo de f [KHz]: [0.125, 4.000].

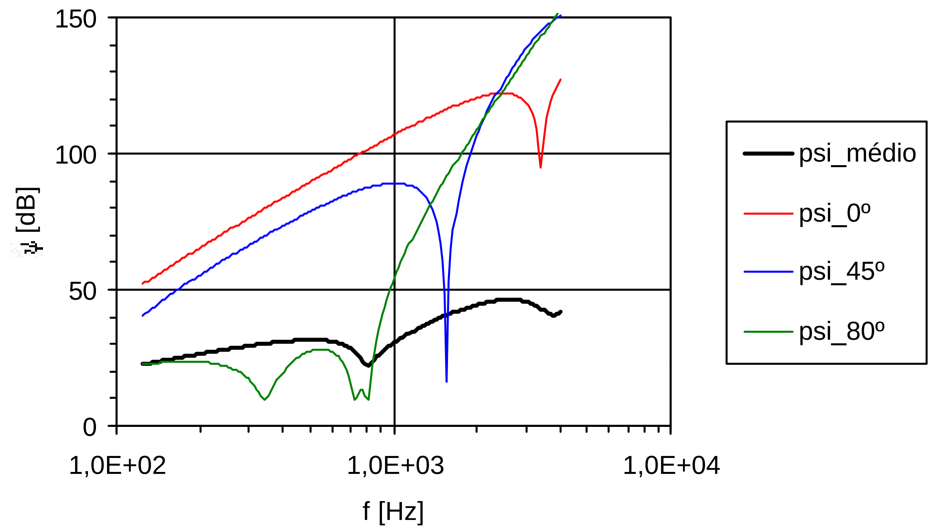

Fig. 2 – Perdas de transmissão acústica direccionais ($\psi_{0º}$, $\psi_{45º}$, $\psi_{80º}$) e média hemisférica $\overline{\Psi}_{2\pi}$ (campo acústico reverberante), de uma parede dupla, em função da frequência f, do som (monocromático). A parede é formada por duas paredes simples com parâmetros (m = 48 kg/m^2, R ≡ r/(ρ_0c) = 1, f_c = 780 Hz), distanciadas de d = 5 cm.

Para ruído branco com $\dot{E}_i$ = 80 dB-W [0.1 mW] de potência acústica (área de referência A_w = 1 m^2), f_1 = 125 Hz e f_2 = 4 KHz, representam-se na Fig. 3 as densidades espectrais de potência dos sons incidente e transmitido, para as incidências θ = 0º, 45º. Para incidência normal, a perda policromática média de transmissão acústica da parede é $\overline{\Psi}_{0º,125-4000}$ ≈ 68.9 dB, e a potência do som transmitido é apenas de $\dot{E}_{t_{0º125-4000}}$ ≈ 11.11 dB-W [12.91 pW, p ≡ 10^{-12}]. Para ruído branco com as mesmas características do anterior mas, em vez de direccional, reverberante, a perda média de transmissão acústica e a potência do som transmitido passam a ser, respectivamente, $\overline{\Psi}_{2\pi,125-4000}$ $\approx$ 33.2 dB e $\dot{E}_{t_{2\pi,125-4000}}$ $\approx$ 46.78 dB-W [47.64 nW, n $\equiv 10^{-9}$].

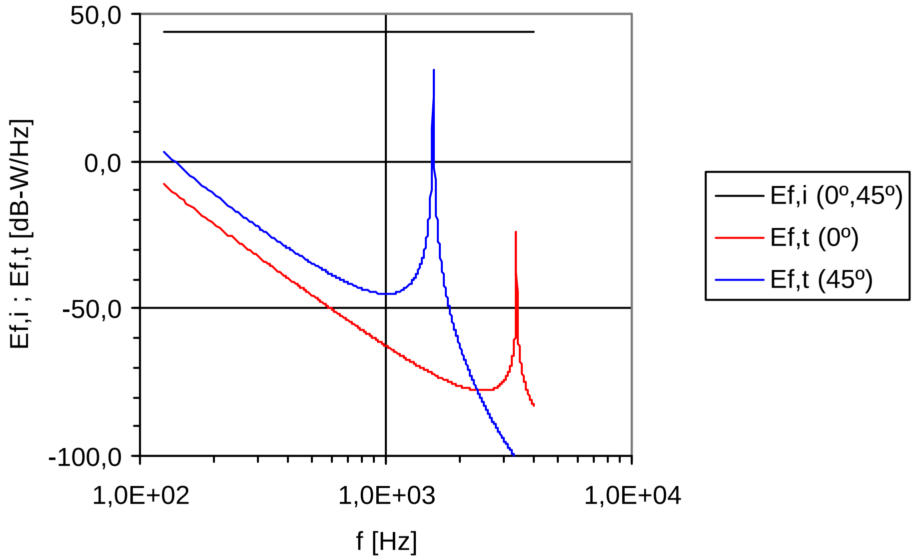

Fig. 3 – Densidades espectrais de potência dos sons policromáticos direccionais incidente (Ef,i $\equiv \dot{E}_{f,i}$) e transmitido (Ef,t $\equiv \dot{E}_{f,t}$) na/pela mesma parede dupla da Fig. 2.

(Unidade de potência acústica: P [dB-W] = 10·$\log_{10}$ (P [pW]), p $\equiv 10^{-12}$, 0 dB-W = 1 pW.)

BIBLIOGRAFIA

Beranek, L. L. 1960. Noise reduction. Ed. McGraw-Hill.
Beranek, L. L. 1971. Noise and vibration control. Ed. McGraw-Hill.
Beranek, L. L. 1993. Acustics. Ed. McGraw-Hill.
Chapra, S. C. e Canale, R. P. 1989. Numerical methods for engineers. Ed. McGraw-Hill Int. (Appl. Math. Series).
London, A. 1949. Transmission of reverberant sound through single walls. J. Research Nat. Bur. of Stand. 42, 605.
London, A. 1950. Transmission of reverberant sound through double walls. J. Acustical Soc. of Am. 22 (2): 270-279.
Lord, H. W. 1980. Noise reduction for engineers. Ed. McGraw-Hill.
Mateus, D. M. R. e Tadeu, A. J. B. 1999. Comportamento acústico de edifícios. Lab. de Construções, Dep. Engª. Civil, Fac. Ciências e Tec., Universidade de Coimbra.
Silva, P. M. 1978. Acústica de edifícios. IT-E 8. Laboratório Nacional de Engenharia Civil.