

EVALUACIÓN TEÓRICA DEL MÓDULO ELÁSTICO EFECTIVO DE MATERIALES FIBROSOS RÍGIDOS EN REGÍMENES DE FLUJO DISTINTOS AL DE POISEUILLE

PACS: 43.55.Ev

Picard Lopez M. A.(1); Solana Quirós P.E. (1); Arizo Serrulla J.V. (2)
Universidad Politécnica (1) Departamento de Física Aplicada. (2) Departamento de Transportes
Camino de Vera s/n, edificio D5 Bajo
46022 Valencia. España
Tel: 963 877 524
Fax: 963 879 529
E-mail: mapicard@fis.upv.es ; psolana@fis.upv.es ; jarizos@tra.upv.es

ABSTRACT

In the study of the porous means some habitual hypothesis is to suppose in Poiseuille flow regimes, a value of the effective elastic module equals to the static atmospheric pressure, and in high frequencies is the product of the same one for the adiabatic coefficient of the perfect gases. In this work and by thermodynamic and acoustic analysis of existing effective modules it can correct these initial hypothesis to adjust this parameter to the theoretical and experimental situations and a frequency dependent parameter can be obtained, for any flow regime.

RESUMEN

En la modelización fenomenológica de los medios porosos rígidos el módulo elástico efectivo del fluido equivalente es uno de los parámetros habitualmente empleados, que junto a la densidad efectiva de los mismos permiten su caracterización. Una hipótesis habitual en este proceso, es para el supuesto de bajas frecuencias o regímenes de flujo cercanos al de Poiseuille, la de asignar a este parámetro un valor coincidente con la presión atmosférica sin perturbar. Y en altas frecuencias suponer que el módulo elástico es igual al producto de la misma por el coeficiente adiabático de los gases perfectos. Esta hipótesis simplifica excesivamente en supuestos habituales en el rango de frecuencias propio de los estudios de absorción. En este trabajo y mediante el análisis termodinámico y acústico de los módulos efectivos empleados habitualmente se puede corregir esta hipótesis inicial para ajustar este parámetro a las situaciones experimentales habituales en la medida de propiedades acústicas de estos materiales. En un gran número de las frecuencias estudiadas, las condiciones de régimen no son isotermas ni adiabáticas. Para ellas se obtiene un parámetro dependiente de la frecuencia que permite un cálculo más preciso del módulo de compresibilidad.

INTRODUCCIÓN

Los materiales porosos están constituido por un medio soporte o estructura, y un medio fluido que en aplicaciones acústicas es aire, confinado en sus poros. En la medida que la estructura es mucho más rígida (módulo elástico mayor) que el aire confinado se consideran estos materiales como rígidos y en estos casos el medio responsable de la propagación de la onda

es el fluido que hay en su interior. Esta propiedad es la que permite considerar al medio poroso como un fluido equivalente. Si la estructura fuera muy elástica vibraría notablemente al igual que las partículas de aire confinado, y entonces deberíamos emplear modelos teóricos que permitan contemplar el grado de acoplamiento acústico entre aire y estructura que es fundamental para entender el mecanismo de absorción del material, y la propagación de la onda en la estructura y en el aire confinado. En muchos de los materiales porosos disponibles comercialmente, como las lanas de vidrio, lanas de roca, su estructura tiene una elevada rigidez por lo que se les denomina materiales de acoplamiento débil entre aire y estructura, y por ello se dice de ellos que se comportan a efectos exteriores como un fluido o permiten una modelización fenomenológica. Por ello al igual que el aire, mediante la densidad del medio fluido equivalente o bien su densidad efectiva y el módulo elástico efectivo del mismo se puede tener una información adecuada que permite caracterizarlos y obtener parámetros de gran interés como son la impedancia acústica específica ó de pared y el coeficiente de absorción acústica. El objeto de este trabajo es el de obtener un modelo teórico básico de evaluación del módulo elástico efectivo de materiales comerciales, que es una información habitualmente inexistente en los catálogos comerciales.

MÓDULO ELÁSTICO EFECTIVO EN MUESTRAS POROSAS

Hay un gráfico muy ilustrativo en la bibliografía [1] que indica las características de este parámetro del fluido equivalente. Se puede observar en la representación módulo-fase indicada estas magnitudes son función directamente proporcional a la frecuencia e inversamente proporcional a la resistencia de flujo, que a su vez es también una función de la frecuencia como se pudo comprobar en un trabajo anterior [2]. Por otra parte se observa que la fase es casi despreciable, y el módulo oscila entre el valor de una atmósfera sin perturbación de onda y un valor próximo a 1.4 veces esta presión. Por ello en materiales de alta resistencia de flujo nos movemos cerca del origen y para materiales de muy baja resistencia de flujo nos movemos en el extremo de la gráfica. Estas situaciones límite se traducen termodinámicamente en el primer caso en supuestos de comportamiento isoterma y el extremo superior como adiabático. Por ello con todas las características anteriores el propio Beranek da valores de primera aproximación para el módulo elástico efectivo de P_0 para comportamientos isotermos y de (γP_0) , en supuestos adiabáticos. Esta simplificación resulta en muchos casos excesiva y máxime cuando una buena parte de materiales útiles para la absorción acústica son de densidades intermedias y bajas con lo que ante el paso de una onda acústica no se van a comportar ni de forma isoterma ni adiabática en el rango de frecuencias de habitual. Por ello resulta de interés el estudio que aquí se hace en regímenes de flujo distintos del de Poiseuille o de Helmholtz. De hecho numerosos autores [3], [4], [5], desarrollan expresiones para el módulo elástico efectivo complejo que son dependientes siempre de la frecuencia, aunque también hay que indicar que en sus modelos teóricos tienen en cuenta las características estructurales del medio, y pueden denominarse aproximaciones microscópicas. La cuestión que se plantea aquí es en qué forma se puede evaluar el módulo elástico. Si se repasa la documentación anterior y la de otros autores hay tres formas básicas de acometer el problema, termodinámica [3], acústica [1] y microscópicamente [4], [5]. Habida cuenta que para el estudio acústico debemos haber caracterizado la muestra mediante su impedancia característica y su constante de propagación compleja, en este trabajo se ha tratado de evaluar el módulo elástico mediante una hipótesis termodinámica diferente, y tratar de obtener resultados que sean compatibles con los de otros modelos más precisos como son los microscópicos. Partiendo de la definición de módulo elástico efectivo en función de la del aire confinado en los poros [1]:

$$K = \frac{K_p}{h} = -v_m \frac{dp}{dv} \quad (1)$$

Donde p y v_m son respectivamente presión y volumen de la muestra, y K es el módulo elástico del medio. Si en lugar de considerar un comportamiento isoterma o adiabático se supone un comportamiento politrópico, con constante politrópica c , la relación que liga a la presión y el volumen del gas equivalente resulta:

$$p = p_0 \left(\frac{v_0}{v} \right)^c \quad (2)$$

Por ello sustituyendo la ec. (2) y derivando en la ec. (1) se obtiene un valor del módulo elástico K :

$$K = c p \quad (3)$$

Que observamos depende de la presión y del coeficiente politrópico. Resulta inmediato en este planteamiento el ajustar los casos límite anteriores isoterma y adiabática, simplemente haciendo que el coeficiente politrópico sea igual a la unidad o al cociente de calores específicos a presión y volumen constantes c_p/c_v respectivamente. Pero si estamos evaluando el valor del módulo elástico para el caso en que una onda plana armónica se propague en el fluido equivalente, tanto K como p y por ello también c serán funciones complejas. Aunque en todos los casos y tal como se indicó anteriormente tengan una parte imaginaria y fase de valor muy pequeño comparados con la parte real y módulo. La cuestión ahora sería la de evaluar de forma precisa cómo varía c con la frecuencia [4]. Dada la relación directa que presenta la ec. (3) todo dependerá del modelo elegido para evaluar el módulo elástico, pues con ello también podremos despejar el coeficiente politrópico, empleando con cuidado los obtenidos por diferentes fuentes bibliográficas, pues el módulo elástico puede aparecer de forma explícita o bien en función del módulo de compresibilidad del gas (su inversa) dentro de los poros, estando ambos relacionados mediante la porosidad h ec. (2).

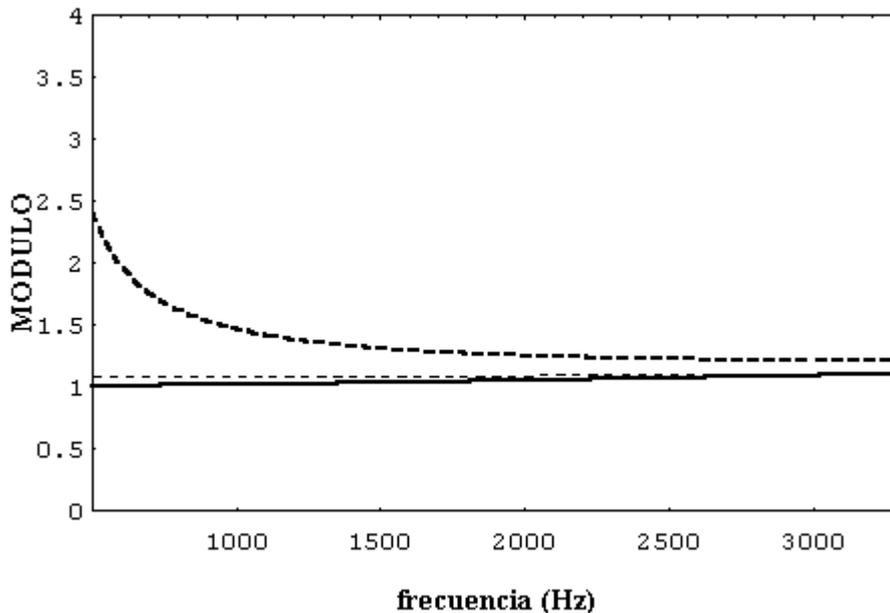


Fig. 1.- Módulo del coeficiente politrópico para materiales porosos de densidad 175 kg/m^3

Si se elige un modelo termodinámico como el de Lambert [3], el módulo elástico dentro de los poros:

$$\tilde{K}_p = \frac{[(w_T/w) + jg]}{[(w_T/w) + j]} P_0 \quad (4)$$

donde $w_T = \frac{4uh}{r_0 Pr a_p^2}$ es la inversa de la constante de tiempo térmica, u es el número de

Kozeny, $g = c_p/c_v$, h es la viscosidad del fluido, $Pr = c_p h/J$ es el número de Prandtl y a_p es el radio medio del poro. El valor del número de Kozeny está comprendido entre 2 y 8 para los materiales fibrosos.

Por otra parte el valor del número de Prandtl para el aire a 18° C es 0.84 y $P_0 = 1.132 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

Nos lleva a un coeficiente complejo $\tilde{c}(w)$:

$$\tilde{c}(w) = \frac{1}{h} \frac{[(w_T/w) + jg]}{[(w_T/w) + j]} \quad (5)$$

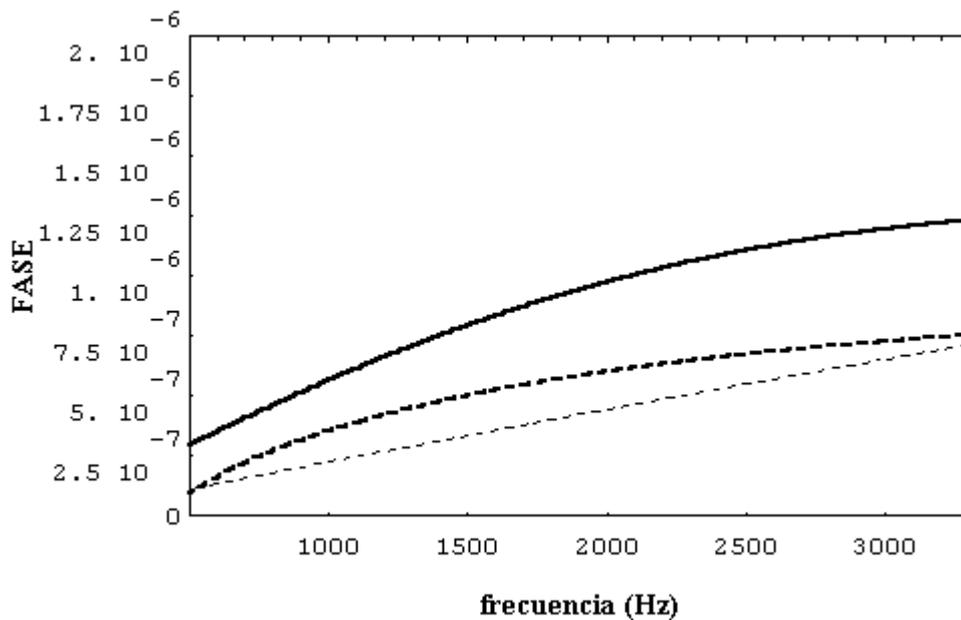


Fig. 2.- Fase del coeficiente politrópico para materiales porosos de densidad 175 kg/m³

Procediendo de forma acústica pueden emplearse varios procedimientos pero seleccionaremos el que está basado en la analogía eléctrica, necesitando conocer la impedancia característica \tilde{Z}_c y la constante de propagación \tilde{g} complejas del medio:

$$\tilde{c}(w) = \pm jw \frac{[\tilde{Z}_c]}{[\tilde{g}]} \frac{1}{P_0} \quad (6)$$

donde ambos parámetros pueden ser calculados mediante aproximación empírica [6] [7] o mediante métodos experimentales cuando las muestras lo permitan [8].

Si procedemos mediante una aproximación microscópica [5], que se adapta bien a los medios fibrosos empleados en anteriores trabajos [9], llegaríamos a un coeficiente politrópico:

$$\check{c}(w) = \frac{g}{g - (g - 1) \left[1 + \frac{8h}{jL^2 B^2 w r_0} \left(1 + jr_0 \frac{w B^2 L^2}{16h} \right)^{1/2} \right]^{-1}} \quad (7)$$

donde B^2 es el número de Prandtl, y Λ' es un parámetro con ecuación de dimensiones de longitud, y que tiende en medios de alta porosidad al radio del poro medio equivalente.

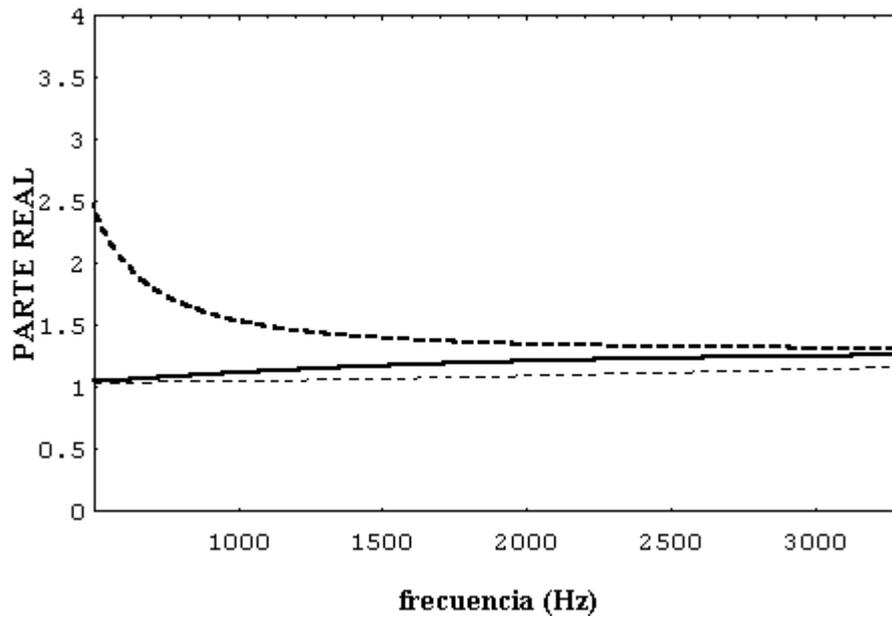


Fig. 3.- Parte real del coeficiente politrópico para materiales porosos de densidad 70 kg/m³

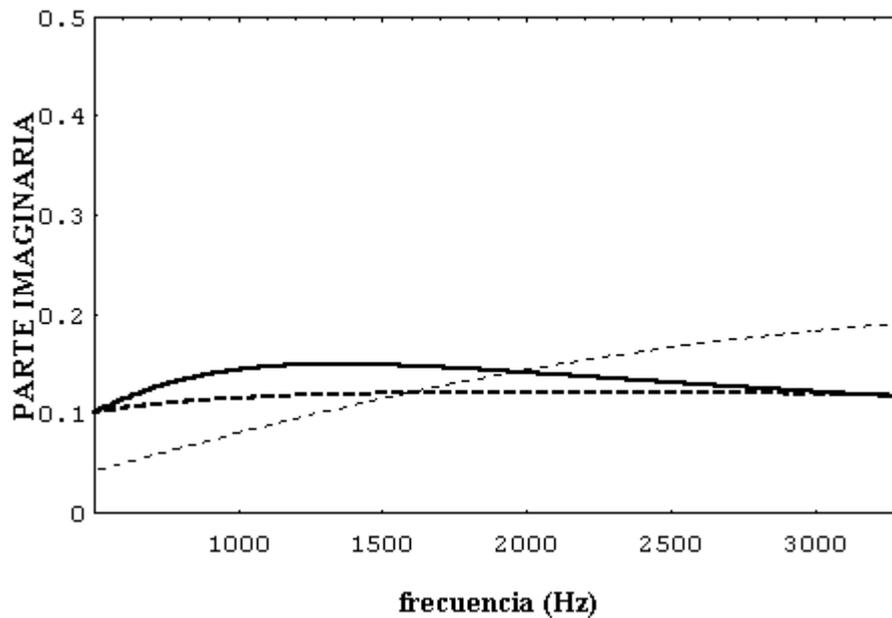


Fig. 4.- Parte imaginaria del coeficiente politrópico para materiales porosos de densidad 70 kg/m³

CONCLUSIONES DEL ESTUDIO

En las figuras anteriores la línea de trazos delgada representa la ec. (5), la de trazos gruesa el resultado de aplicar un modelo empírico como el propuesto por la ec. (6) y finalmente las líneas de trazo continuo representan el supuesto empleado por la aproximación microscópica de la ec. (7).

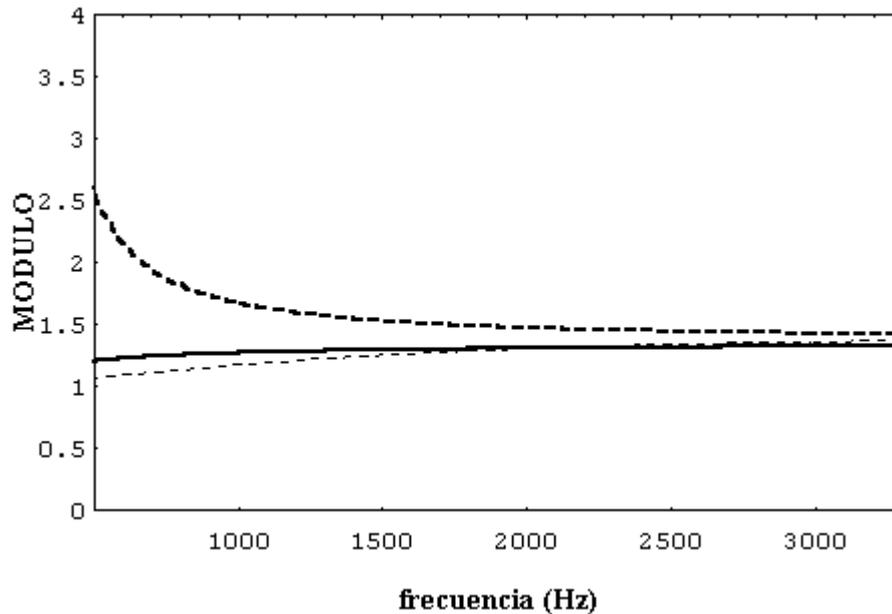


Fig. 5.- Módulo del coeficiente politrópico para materiales porosos de densidad 30 kg/m^3

Observando los resultados cabe indicar que las aproximaciones empíricas tanto en el módulo como en la parte real de la función \tilde{c} representada presentan problemas en bajas frecuencias para los distintos supuestos y un valor en exceso para altas frecuencias. La resistencia de flujo de las muestras se comprueba que incide en los resultados pues en bajas densidades como se aprecia en la figura 5 se aproxima en el rango de frecuencias estudiado al valor adelantado por Beranek g . En las figuras 1 y 2 de muestras de elevada densidad el valor del coeficiente se acerca al valor estático 1. Sin embargo en todos los casos estudiados estos dos supuestos se comprueba que son bastante imprecisos en frecuencia y para las muestras de densidades intermedias como las representadas en las figuras 3 y 4 de densidades intermedias todavía más. Por todo ello si se desea hacer una aproximación y simplificar el problema planteado, dados los resultados obtenidos, se puede aconsejar el desprecio de la parte imaginaria pues representa aproximadamente un 10 % de la parte real, o de la fase del coeficiente estudiado, en tales casos el módulo elástico se puede considerar una magnitud real variable en frecuencia con un valor indicado por las ecuaciones (3), (5) y (7) esto es $c(\omega)P_0$, donde este coeficiente será el módulo del valor complejo representado en la ec. (5) o en la ec. (7). De hecho se puede comprobar que tienen resultados análogos para el módulo del coeficiente en todos los supuestos analizados, no así en las fases.

REFERENCIAS

- [1] L. L. Beranek, *Noise and Vibration Control* (McGraw-Hill 1971).
- [2] M.A. Picard, P. Solana and J.F. Urchueguía, *J.of Sound and Vibration* **216**, 495-505 (1998).
- [3] R. F. Lambert and J. S. Tesar, *J. Acoust. Soc. Am.* **76**, 1231-1237 (1984).

-
- [4] K. Attenborough, *J. Acoust. Soc. Am.* **73** (3), 785-793 (1983).
 - [5] J. F. Allard, *Propagation of Sound in Porous Media Modelling. Sound Absorbing Materials.* (Elsevier Science Publishers, 1993).
 - [6] M. E. Delany and E. N. Bazley, *Applied Acoustics* **3**, 105-116 (1970).
 - [7] Y. Miki, *J. Acoust. Soc. Jpn* **E 11, 1**, 19-24 (1990).
 - [8] Smith C.D., Parrot T.L J. *Acoust. Soc. Am* **74**(5) 1577-1582 (1983).
 - [9] M.A. Picard, P. Solana, J.V. Arizo, *Proceedings INTERNOISE 2000.*