

Análisis tiempo-frecuencia adaptado a las características espectrales de la señal

Salvador Cerdá Jordá y José Romero Faus
Laboratorio de Acústica Facultad Ciencias Físicas de la Universidad de Valencia.

Abstract

We introduce in this work, an analysis method that is adapted to the spectral characteristics of the signals. First spectral characteristics are determined and in second place is accomplished an adjusted minimal window transform (AMWT), result of an "interpolation" between the wavelet transform (WT) analysis and the Short-Time Fourier transform (STFT). This interpolation was made according to signal characteristics. When there are not well defined frequencies, the AMWT coincide with the WT.

1. Introducción

La introducción de la transformada de wavelet y los análisis de multiresolución a finales de los 80, supuso un aumento del interés en el procesado y análisis de la señal. El desarrollo de la WT se puede pensar como un intento de mejorar el análisis realizado mediante STFT. Aunque existen ejemplos que muestran los problemas del STFT y las cualidades de la WT [1], también existen señales para las cuales ambos, STFT y WT, plantean problemas de resolución [2]. Intentos de mejorar la WT son los "wavelet packets" [3], el denominado M-band wavelet analysis [2], los "Matching Pursuit" de Mallat y Zhang [4] y el denominado "Basis pursuit" de Chen-Donoho [5]. Nosotros introducimos en este trabajo, un método de análisis que se adapta a las características espectrales de las señales. Para ello se realiza una transformada de ajuste del tamaño de ventana (TAMV), resultado de una "interpolación" entre el análisis de WT y el STFT.

II El parámetro de calidad ξ

La transformada continua de wavelet de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ [1], se define como

$$CWT_{\varphi}(a,b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t-b/a) dt \quad (1)$$

donde para la función φ satisface:

$$\int_{\mathbb{R}} |F(\varphi(\omega))|^2 |\omega|^{-1} dt = C\varphi < \infty \quad (2)$$

(1) se interpreta para los parámetros a y b dados, como la contribución que la señal contiene en la siguiente región del plano t - ω :

$$[b + a t^* - a\Delta_{\varphi}, b + a t^* + a\Delta_{\varphi}] \times [\omega^* a^{-1} - a^{-1} \Delta_{F(\varphi)}, \omega^* a^{-1} + a^{-1} \Delta_{F(\varphi)}] \quad (3)$$

Donde t^* , Δ_{φ} , ω^* y $a\Delta_{F(\varphi)}$ son los centros y radios de las ventanas en tiempo y frecuencia respectivamente. Para la transformada de wavelet se satisface que la relación existente entre la frecuencia media de análisis ω^* y el ancho de banda correspondiente es una constante $\omega^*/2\Delta_{F(\varphi)} = Q$. A este tipo de análisis se le denomina análisis Q-constante [6]. Podemos introducir un parámetro que depende exclusivamente de las características de la función wavelet madre:

$$\xi = 2 \Delta_{\varphi} \omega^* \quad (4)$$

A este parámetro lo vamos a denominar parámetro de calidad. El nombre de parámetro de calidad no debe confundirse con el parámetro del mismo nombre que se utiliza en [7]. Por definición ξ depende del tamaño de la ventana temporal de análisis y del centro correspondiente en frecuencias. Si comparamos el parámetro de calidad de dos wavelets para una misma frecuencia, aquella que tenga un parámetro de calidad más grande tendrá una ventana temporal más grande y por tanto la localización en frecuencias será superior. En la Tabla 1, mostramos el valor del parámetro de calidad para algunas funciones de Daubechies. En la Tabla 2 presentamos el parámetro de calidad para algunas funciones Coiflet.

Orden	Parámetro
4	0.65
6	0.70
8	0.80
10	0.90
12	1.01
14	1.12
16	1.22
18	1.33
20	1.43

Tabla 1. Parámetro calidad funciones Daubechies

Orden	Parámetro
6	0.61
12	0.63
18	0.68

Tabla 2. Parámetro de Calidad funciones Coiflet.

III La transformada general TAMV.

El TAMV general, es un método de análisis que selecciona el tamaño de la ventana temporal de análisis teniendo en cuenta las características de la señal. Correspondería al denominado GSTFT (general short-time fourier transform) [8], tomando las ventanas de análisis para cada frecuencia según las características de la señal. Para determinar estas características hacemos uso de la información que proporciona la FFT. Sea el intervalo $I(\omega_0, \varepsilon) = [\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon]$, definimos la media local de frecuencias en dicho intervalo:

$$W(\omega_0, \varepsilon) = \left(\int_{I(\omega_0, \varepsilon)} \omega \gamma(\omega) d\omega \right) / \left(\int_{I(\omega_0, \varepsilon)} \gamma(\omega) d\omega \right) \quad (5)$$

donde

$$\gamma(\omega) = F(\omega) F^*(\omega) \quad (6)$$

Análogamente definimos el radio local en frecuencias en el intervalo $I(\omega_0, \varepsilon)$, como:

$$DW(\omega_0, \varepsilon) = \left(\int_{I(\omega_0, \varepsilon)} (\omega - W(\omega_0, \varepsilon))^2 \gamma(\omega) d\omega \right)^{1/2} / \left(\int_{I(\omega_0, \varepsilon)} \gamma(\omega) d\omega \right)^{1/2} \quad (7)$$

Si fijamos ε , denotando $DW(\omega)$ a la función resultante proveniente de (7), podemos asignar a cada frecuencia, información local de la dispersión de la señal en el intervalo $I(\omega, \varepsilon)$. La función $DW(\omega)$, va a ser nuestro punto de partida para establecer el TAMV general. A partir de ella, lo primero que definimos es la dispersión temporal para cada frecuencia:

$$\sigma_t(\omega) = 1/DW(\omega) \quad (8)$$

Nótese que el caso $DW(\omega) = 0$, corresponde a $\gamma(\omega) = \delta(\omega - \omega_1)$, caso que en las aplicaciones numéricas no ocurre por el efecto de "leakage" [9].

Retomando la definición (4) del parámetro de calidad, podemos determinar el parámetro de calidad para el STFT. En este caso es obvio que dicho parámetro es función de la frecuencia. Suponemos que trabajamos con una ventana gaussiana, caracterizada por α [3]. El valor del parámetro de calidad en el STFT viene dado por:

$$\xi_S(\omega) = 2\alpha [1/2 + (1 - e^{-\omega^2 \alpha})^{-1} \omega^2 \alpha^2 e^{-\omega^2 \alpha}]^{1/2} \quad (9)$$

Se observa que $\xi_S(\omega)$, se puede considerar función lineal para frecuencias superiores a los 500 Hz aproximadamente.

El TAMV general realiza una interpolación entre la transformada de wavelet y el STFT, a partir del parámetro de calidad. Esta interpolación se realiza a partir de la dispersión temporal para cada frecuencia (8). Para conseguir esto necesitamos trabajar con la función (8) "normalizada". Es decir transformamos $t(\omega)$ en una función cuyo valor máximo valdrá la unidad. Una vez hecho esto definimos el parámetro de calidad óptimo para la función dada como la interpolación:

$$\xi_G(\omega) = (1 - \sigma_t(\omega)) C_0 + \sigma_t(\omega) \xi_S(\omega) \quad (10)$$

Como vemos, $\sigma_t(\omega)$ nos va a proporcionar un valor del nuevo parámetro de calidad adaptado a las características espectrales de la señal. Si $\sigma_t(\omega) \approx 0$ (equivalente a una dispersión muy grande en el intervalo $I(\omega, \epsilon)$), entonces $\xi_G(\omega)$ es constante (Equivalente a la WT). Si por el contrario nos encontramos con $\sigma_t(\omega) \approx 1$ (estamos en un pico del espectro de la señal), entonces $\xi_G(\omega)$ coincide con el valor del parámetro de calidad para el STFT a dicha frecuencia $\xi_S(\omega)$). A partir de $\xi_G(\omega)$ vamos a definir el TAMV general, determinando el tamaño de la ventana de análisis temporal para cada frecuencia, a partir de la expresión:

$$K(\omega) = (1 - \sigma_t(\omega)) K_0 + \sigma_t(\omega) \xi_S(\omega) x_p^{-2} \quad (11)$$

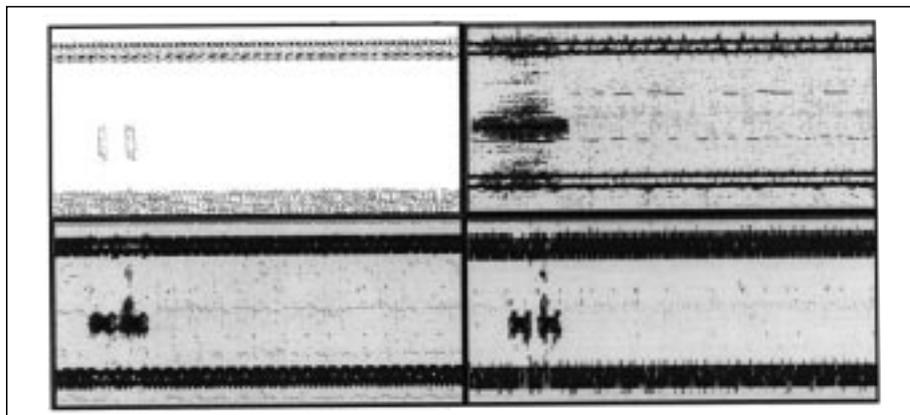
Donde

1. K_0 , número de periodos para la WT de referencia.
2. α , que aparece en $\xi_S(\omega)$, define el tamaño de la ventana de análisis del STFT.
3. ϵ el tamaño del intervalo local de frecuencias que se utiliza para determinar $\sigma_t(\omega)$.

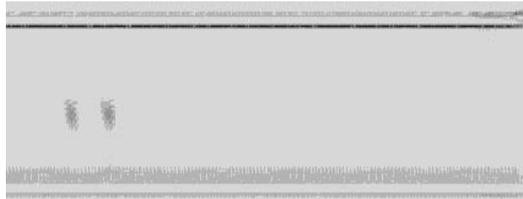
El valor de K_0 se determina considerándolo de tal forma que la precisión en frecuencia sea razonable. La elección de α se realiza teniendo en cuenta que cuando el TAMV se comporte como el STFT será por que se necesita buena precisión en frecuencias. Por último el valor de ϵ se determina mediante la comparación de diversos valores posibles. Hay que pensar que un valor de ϵ demasiado pequeño o demasiado grande, va a impedir o bien determinar lo acusado de los picos o bien confundir picos próximos entre sí. En nuestro trabajo se ha ido seleccionando diversos valores de ϵ hasta obtener un valor que consideramos adecuado ($\alpha=0.0448$).

IV Ejemplo

La señal que analizamos consiste en dos frecuencias altas próximas entre sí, dos frecuencias bajas próximas entre sí y dos pequeños intervalos localizados en el tiempo. Como se observa, las frecuencias altas no se aprecian en la WT (arriba iz.). Podemos comparar estas gráficas con los resultados que se obtienen al analizar esta señal mediante el STFT (arriba der, abajo iz, abajo der).



Para determinar la dispersión temporal (sigma) de cada frecuencia, tenemos presente un umbral mínimo tal que valores obtenidos de $\sigma_t(\omega)$ menores los tomamos como nulos. La razón de este umbral es el tamaño finito de $I(\omega, \varepsilon)$ que proporciona un valor mínimo $\approx 1/\varepsilon$. Por otra parte a la hora de determinar la función $\sigma_t(\omega)$ normalizada, tomamos para el valor mínimo el valor 0 y para el valor máximo el valor de 1. En el ejemplo, se obtiene unos picos que coinciden con las frecuencias puras (picos acusados), del espectro. Para los dos intervalos de 3000 Hz no obtenemos picos en el espectro y por tanto $\sigma_t(\omega) \approx 0$. La siguiente figura muestra el resultado que se obtiene con el TAMV general donde se ha utilizado un valor de $\varepsilon = 88 \text{ Hz}$, $K_0 = 20$ y $\alpha = 0.0448$.



Bibliografía

1. Daubechies I. "Ten Lectures on Wavelets". CBMS-NSF SIAM. Philadelphia (1992).
2. Steffen et al. "Theory of Regular M-band Wavelet Bases". *IEEE Trans Sig. Proc.* 41 pp 3497-3511. 1993
3. Coifman R. Wickerhauser V. "Entropy-Based Algorithms for Best Basis Selection". *IEEE Trans. Infor. Theory.* 38 pp 713-718. 1992.
4. Mallat S. Zhang Z "Matching Pursuits with Time-Frequency Dictionaries". *IEEE Trans. Sig. Proc.* 41 pp 3397-3415. 1993
5. Chen S. "Basis Pursuit". (1995). Tesis doctoral. <http://standford.stat.edu>
6. Rioul O. y Vetterli M. "Wavelets and Signal Processing". *IEEE Sis. Proc. Mag.* October. (1991). pp 14-38.
7. Papandreou et al. "The Hiperbolic Class of Quadratic Time-Frequency Representations". *IEEE trans. Sig. Proc.* 41 pp 3425-3444..
8. Anderson J. "A Wavelet Magnitude Analysis Theorem". *IEEE Trans.Sig. Process.* 41 pp 3541- 3543. 1993.
9. Trampe J. "Principles of Experimental Frequency Analysis". Elsevier Applied Science 1990.