

Algoritmos en diferencias finitas para el estudio del tubo de Kundt.

Jesús Alba Fernández; Jaime Ramis Soriano; Antonio Uris Martínez
Departamento de Física Aplicada
Escuela Universitaria de Gandía
Universidad Politécnica de Valencia
Carretera Nazaret-Oliva S/N
Grao de Gandía 46730 (Valencia)
Teléfono (96) 284.93.14 - (96) 284.93.00
Fax : (96) 284.93.09
E-mail :jesalba@fis.upv.es

PACS: 43.58.e

Resumen

En este trabajo se presentan algoritmos obtenidos a partir del método de las diferencias finitas que permiten el modelado completo del tubo variando la impedancia del extremo. El método permite la obtención de la presión normalizada en cualquier punto del tubo sin la necesidad explícita de medir en dichos puntos, lo que modifica las condiciones de medida, y sin la necesidad del filtrado en frecuencia.

Para la comprobación del método se ha medido la respuesta en frecuencia en un tubo abierto y se ha comparado con la obtenida con el algoritmo implementado, ya que éste sería el caso más desfavorable según el método elegido.

Summary

In this paper a finite difference method algorithm to model completely the kundt tube is presented. This method permits to obtain the normalized sound pressure in any tube point without a sound pressure measure.

To confirm this method the frequency response in an end open tube has been measured and it has been compared with the frequency response calculated with the finite difference method.

Introducción

Uno de los elementos más utilizados en la Acústica es el tubo de Kundt, el cual sirve como soporte para distintas experiencias, desde la observación de ondas estacionarias hasta la medida de coeficientes de absorción [1,2]. Sin embargo, el mero hecho de medir en el tubo ya modifica las características de la medida. La posición con una sonda que recorra el tubo es bastante imprecisa cuando se estudian longitudes de onda cortas. Además, la emisión de tonos puros es difícil. Por tanto, existen ciertos elementos que pueden modificar las condiciones de lo que se quiere obtener.

En este trabajo se presentan algoritmos, que se han implementado en diferencias finitas por la rapidez del cálculo y la representación de resultados [3,4], que intentan eliminar en parte los errores que se puedan producir en la medida. Para la comprobación del método se ha medido la respuesta en frecuencia en un tubo abierto y se ha comparado con la obtenida con el algoritmo numérico, ya que éste sería nuestro caso más desfavorable.

El método de las diferencias finitas aplicado a tubos de Kundt

Supongamos un tubo de una longitud L y un diámetro D de tal forma que se propagan ondas planas, tal y como muestra la figura 1. Se consideran a su vez las paredes del tubo rígidas.

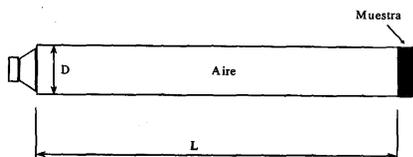


Figura 1. Tubo con impedancia de carga para su medición.

Dicho tubo se cargará en su extremo con una impedancia específica Z.

Se asume una dependencia temporal de la forma $e^{j\omega t}$, donde π es la frecuencia angular. La ecuación de ondas de Helmholtz describe la presión en el tubo [1]:

$$[\nabla^2 + k_0^2] p(z) = 0 \quad z > 0$$

donde $k_0 = \frac{\pi}{c_0}$ es el número de onda en el aire y $p(z)$ la presión en el tubo.

En el caso a estudio, donde se supone se cumple la condición de onda plana, se puede realizar un mallaado longitudinal, puesto que cualquier punto del frente de ondas tendrá las mismas características. Para dicho caso, la ecuación de onda anterior se puede expresar como:

$$\frac{\partial^2 p(z)}{\partial z^2} + k_0^2 p(z) = 0 \quad z > 0$$

Después de elegir el mallaado, se procede a sustituir las derivadas parciales por cocientes de diferencias entre valores de la función en cada nodo, pasando así a obtener una ecuación algebraica. La aproximación de las derivadas parciales se basa en la definición de derivada. Denominando h al paso del mallaado, este cumple que:

$$z_{i+1} = z_i + h$$

Partiendo ahora de la definición de derivada parcial y aproximando el límite de definición de la derivada por el cociente incremental se tienen las siguientes relaciones [5]:

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} \approx \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 p(z)}{\partial z^2} \approx \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{h^2}$$

Estas aproximaciones de las derivadas parciales respecto de z se puede demostrar que su error de truncamiento es pro-

porcional a h^2 . Utilizando estas relaciones, la ecuación de ondas se transforma en:

$$\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{h^2} + k_0^2 p_i \approx 0 \quad i = 2,3,\dots,N$$

siendo N el número de nodos elegido en el tubo. La ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$p_{i+1} + (-2 + h^2 k_0^2) p_i + p_{i-1} \approx 0 \quad i = 2,3,\dots,N$$

Las condiciones de contorno genéricas para el montaje de la figura 1, tomando una presión normalizada en $z = 0$, son [6]:

$$p_i = 1$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\partial u}{\partial t}$$

siendo ρ_0 la densidad del medio (aire) y u la velocidad de las partículas en el medio.

Para la impedancia específica de carga, Z, situada al final del tubo se puede obtener la siguiente relación, partiendo de la ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{Z} \frac{\partial p}{\partial t}$$

suponiendo que Z no varía con el tiempo. La ecuación anterior, para el caso de una variación armónica, se puede escribir como:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\rho_0}{Z} j\pi p$$

Pasando esta condición al esquema de diferencias finitas:

$$\frac{p_N + p_{i+1}}{h} = - \frac{\rho_0}{Z} j\pi p_N \Rightarrow -p_{N-1} + \left[\frac{h\rho_0}{Z} j\pi + 1 \right] p_N = 0$$

Con esta condición de contorno, la resolución de la ecuación de onda se puede escribir de forma matricial siguiente:

$$MP = B$$

siendo :

$$M = \begin{bmatrix} \Delta & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \Delta & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \Delta & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \Delta & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_N \end{bmatrix}$$

$$P^T = (p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad \dots \quad p_N)$$

$$B = (1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

$$\text{donde } \Delta = 2 - h^2 k_0^2, \text{ y } a_N = - \frac{h\rho_0}{Z} j\pi + 1.$$

Resolviendo este sistema se obtiene la solución aproximada de las presiones en los nodos marcados [3,4]. Se puede demostrar que el algoritmo es estable y convergente [5]. Además, el hecho de que la matriz sea triagonal hace posible el uso de algoritmos que aceleran la convergencia.

Impedancia específica de radiación

Para la comprobación del método numérico desarrollado, se va a utilizar la medida de la presión en puntos de un tubo abierto, con el fin de comparar las medidas experimentales obtenidas en el tubo abierto con los resultados que da el programa. Por ello es conveniente repasar el concepto de impedancia específica de radiación, ya que la impedancia de carga de este tubo, es la impedancia específica de radiación, cuya expresión general es [1]:

$$Z_R = R_R + jX_R = \rho_0 c (R_1(2ka) + jX_1(2ka))$$

siendo :

$$R_1(2ka) = \frac{(2ka)^2}{2^2 1! 2!} - \frac{(2ka)^4}{2^4 2! 3!} + \dots$$

$$X_1(2ka) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2ka}{3} - \frac{(2ka)^3}{3^2 5} - \frac{(2ka)^5}{3^2 5^2 7} - \dots \right)$$

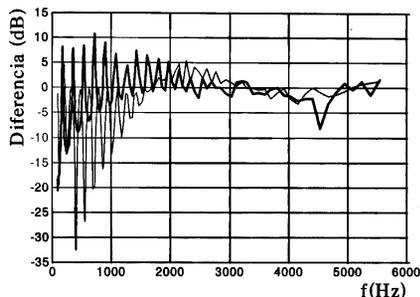


Figura 2. Tubo de 9 cm de diámetro y 2 m de longitud. La curva más marcada es la medida experimental. Se han comparado los niveles de presión en el extremo con el nivel a 91 cm de la fuente, para asegurar la condición de onda plana.

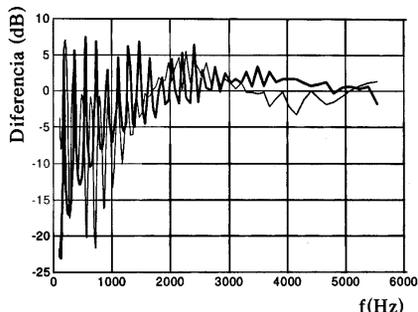


Figura 3. Tubo de 5,5 cm de diámetro y 2 m de longitud. La curva más marcada es la medida experimental. Se han comparado los niveles de presión en el extremo con el nivel a 91 cm de la fuente, para asegurar la condición de onda plana.

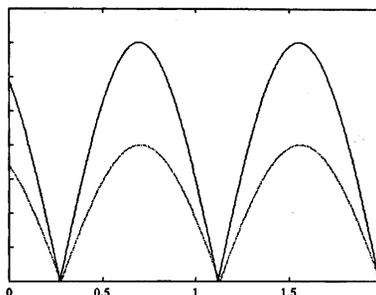


Figura 4. Dependencia de la radiación con el diámetro a 100 Hz: línea continua para 9 cm y discontinua para 5,5 cm. 2 m de longitud.

Medidas y resultados

Algunas de las medidas experimentales, así como su comparación con los resultados obtenidos por el método de las diferencias finitas se pueden observar en las gráficas 2 y 3. De la misma manera se muestran distintas comparaciones en función del diámetro del tubo en las gráficas 4 y 5. En las figuras 2 y 3 se representan curvas comparativas entre un nivel de presión intermedio y el nivel del extremo, para distintos diámetros. Las medidas se han realizado en cámara anecoica. En las figuras 4 y 5 se representa la presión normalizada dentro del tubo con el fin de comparar la presión en el extremo abierto.

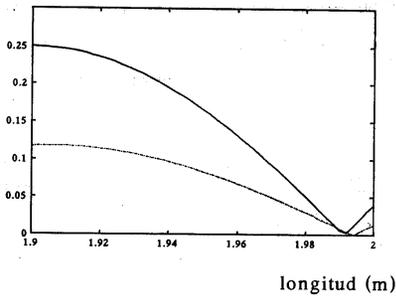


Figura 5. Dependencia de la radiación con el diámetro a 500 Hz: línea continua para 9 cm y discontinua para 5,5 cm. 2 m de longitud (detalle del extremo del tubo).

Referencias

- [1] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, J. V. Sanders, "Fundamentals of Acoustics", John Wiley & Sons, Third Edition, 1982
- [2] P. A. Nelson & S. J. Elliot, "Active control of sound", Academic Press, 1995
- [3] Press, W.H., Teukolsky, S. A., Vetterling W. T., Flannery, B. P. "Numerical Recipes in C", Second Edition, Cambridge University Press, 1992
- [4] R. Dautray, J.-L. Lions, "Analyse mathématique et calcul

Conclusiones

El método de las diferencias finitas ha permitido obtener a priori una solución aproximada al problema propuesto, siempre dentro de las limitaciones que la parte experimental pudiese tener, como pueden ser los transductores de medida, el ruido de fondo, el filtrado de la señal, etc. Los resultados se obtienen rápidamente y utilizando tonos puros y fuentes ideales, lo cual habilita a los algoritmos obtenidos a servir para la didáctica en los tubos de Kundt.

numérique por les sciences et les techniques, Volume 1, Modèles physiques", Masson, 1987

[5] Bihhadi A., Gervais Y., "A Finite Method For Acoustic Wave Propagation in a Duct with Mean Flow and Temperature gradients", Acta Acústica, October 1994, pag. 343-357.

[6] T.E. Vigran, L. Kelders, W. Lauriks, P. Leclaire "Prediction and Measurements of the Influence of Boundary Conditions in a Standing Wave Tube", Acta Acústica, 1997, Vol. 83, pag. 419-423