

# Caracterización de capas impermeables a partir de medidas de aislamiento

J. Alba Fernandez<sup>1</sup>, J. Ramis Soriano<sup>1</sup>, J. Llinares Galiana<sup>2</sup>  
Departamento de Física Aplicada\*  
Universidad Politécnica de Valencia  
<sup>1</sup>Escuela Politécnica Superior de Gandía  
Carretera Nazaret-Oliva S/N Grao de Gandía  
46730 (Valencia)  
Teléfono (96) 284.93.14 - (96) 284.93.00  
Fax : (96) 284.93.09  
E-mail :jesalba@fis.upv.es  
<sup>2</sup>E.T.S. Arquitectura,  
Camino de Vera s/n, 46022 (Valencia)

PACS: 43.55.n

## Resumen

En este trabajo se describen algoritmos desarrollados para caracterizar placas impermeables. Estos algoritmos están basados en la minimización del error cuadrático y nos permiten determinar la masa por unidad de área, la rigidez a flexión y factor de pérdidas de la placa impermeable a partir de los resultados de medidas de aislamiento.

La utilidad del método se justifica si se tiene en cuenta que las empresas no suelen disponer de datos sobre capas impermeables, pero si que pueden acceder a resultados de medidas de aislamiento de capas impermeables y, mediante el método que se propone, pueden utilizar esos datos para obtener los valores de las características mecánicas de la capa, con las condiciones de montaje propias del laboratorio. Esos valores pueden, a continuación, ser utilizados en algoritmos de simulación de particiones multicapa, obteniendo predicciones que contienen de forma implícita la condición de montaje de cada capa impermeable.

## Abstract

### The characterization of impermeable layers from measurements of insulation

In this paper we present algorithms developed for the characterisation of impermeable plates. The algorithms

are based on the minimalization of the quadratic error and, enable us to determine mass per unit of area, the rigidity to flexion, and the loss factor using the results of measurements of insulation. The usefulness of this methods resides principally in the fact that while few companies have easy access to detailed data on impermeable layers, many do have available to them the results of measurements of insulation in such layers. By means the method proposed here, they can use this data to calculate the values of the mechanical characteristics of the layer, employing only the equipment already available in their own laboratories, These values can subsequently be used in algorithms simulating multilayer partitions, making it possible to formulate implicit predictions concerning the assembly conditions characteristics of each impermeable layer.

## Introducción. Coeficiente de transmisión de una placa delgada

Consideremos una placa delgada, de espesor  $h_1$  que suponemos infinita y elástica, de forma que separa dos regiones del espacio, I y II, de forma que no existe conexión alguna entre ambas [1,2]. Supondremos que en la región I se encuentra el foco emisor y se pretende evaluar la porción de energía que se transmite a través de la superficie de separación. En la figura 1 se muestra la configuración descrita.

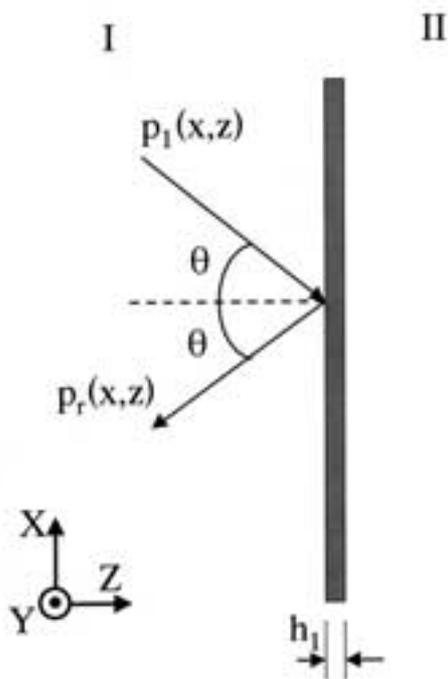


Figura 1. Placa delgada e impermeable separando dos espacios.

Sea una onda de presión de tipo armónico (dependencia temporal de la forma  $e^{-j\omega t}$  donde  $\omega$  es la frecuencia angular) que incide formando un ángulo  $\theta$  respecto a la dirección normal. Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del sistema, en cada una de las regiones del espacio, son las siguientes [1,2]:

• Zona I: Propagación del sonido en el aire, descrita por la ecuación escalar de Helmholtz:

$$[\nabla^2 + k_0^2] p_I(x,z) = 0 \quad z < 0$$

donde  $k_0 = \omega/c_0$ , es el número de onda acústico. La presión total en la zona I es:

$$p_I(x,z) = p_{in}(x,z) + p_r(x,z)$$

• Ecuación de movimiento de la placa:

$$[D_1 \nabla^4 - \rho_1 h_1 \omega^2] w_1(x) = p_I(x,0) - p_{II}(x, h_1)$$

donde  $w_1(x)$  es el desplazamiento en la dirección normal de la placa,  $\rho_1$  es la densidad del material de la placa,  $h_1$  es el espesor de la placa,  $D_1$  es la rigidez a flexión de la placa y  $p_{II}(x,z)$  es la presión en la zona II. El factor de pérdidas,  $h$ , se introduce a través del módulo de rigidez de la placa [1,2]:

$$D_1' = D_1(1 - j\eta)$$

• Zona II: Propagación del sonido en el aire:

$$[\nabla^2 + k_0^2] p_{II}(x,z) = 0 \quad z > h_1$$

En la configuración descrita las condiciones de contorno son las siguientes [1,2]:

$$\left. \frac{\partial p_I}{\partial z} \right|_{z=0} = \rho_0 \omega^2 w_1(x)$$

$$\left. \frac{\partial p_{II}}{\partial z} \right|_{z=h_1} = \rho_0 \omega^2 w_1(x)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales descrito por las ecuaciones anteriores se puede resolver mediante la transformada de Fourier espacial en la variable  $x$ . Las soluciones son de la forma [1,2]:

$$w_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_1(s) e^{-jsx} ds$$

$$p_I(x,z) = p_{in}(x,z) + p_r(x,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{in}(s) e^{asz} + p_r(s) e^{-az}) \cdot e^{-jsx} ds$$

$$p_{II}(x,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p_t(s) e^{asz} \cdot e^{-jsx} ds$$

$$a = \sqrt{k_0^2 - s^2}$$

La utilización de la transformada de Fourier permite que las ecuaciones diferenciales se transformen en relaciones algebraicas [1,2]:

$$a(p_{in} - p_r) = \rho_0 \omega^2 w$$

$$(D_1 s^4 - \rho_1 h_1 \omega^2) w_1 = p_{in} + p_r - p_t e^{ah_1}$$

$$a p_t e^{ah_1} = \rho_0 \omega^2 w$$

Si en las ecuaciones anteriores tomamos como incógnitas las variables  $p_r$ ,  $w_1$  y  $p_t$ , el sistema de ecuaciones, en notación matricial puede escribirse en la forma [1]:

$$\begin{pmatrix} a & \rho_0 \omega^2 & 0 \\ -1 & D_1 s^4 - \rho_1 h_1 \omega^2 & e^{ah_1} \\ 0 & \rho_0 \omega^2 & -ae^{ah_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_r \\ w_1 \\ p_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a p_{in} \\ p_{in} \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones son las siguientes:

$$p_r = p_{in} \frac{a(D_1 s^4 - \rho_1 h_1 \omega^2)}{a(D_1 s^4 - \rho_1 h_1 \omega^2) + 2\rho_0 \omega^2}$$

$$w_1 = p_{in} \frac{2a}{a(D_1 s^4 - \rho_1 h_1 \omega^2) + 2\rho_o \omega^2}$$

$$p_t = p_{in} \frac{2\rho_o \omega^2 e^{ah_1}}{a(D_1 s^4 - \rho_1 h_1 \omega^2) + 2\rho_o \omega^2}$$

De la relación anterior es posible obtener el coeficiente de transmisión en las condiciones de las hipótesis de trabajo:

$$\tau(\theta) = \left| \frac{p_t}{p_{in}} \right|^2 = \left| \frac{2\rho_o \omega^2 e^{ah_1}}{a(D_1 s^4 - \rho_1 h_1 \omega^2) + 2\rho_o \omega^2} \right|^2$$

Si en la región I se verifican las condiciones de campo difuso [3]:

$$\tau_d = \frac{\int_0^{\theta_{lim}} \tau(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^{\theta_{lim}} \cos \theta \sin \theta d\theta}$$

donde  $\theta_{lim}$  representa el ángulo límite a partir del cual se considera que la contribución del campo sonoro es despreciable.

En el caso de ondas incidentes planas, el valor de la variable  $s$  de la transformada de Fourier espacial toma el valor siguiente [1,2]:

$$s = k_o \sin \theta$$

y el valor del parámetro  $a$ :

$$a = jk_o \cos \theta$$

por lo que la expresión de la presión transmitida se puede expresar de la siguiente forma:

$$p_t = p_{in} \frac{2\rho_o \omega^2 e^{j\frac{\omega}{c} \cos \theta h_1}}{j\frac{\omega}{c} \cos \theta \left[ D_1 (1 - j\eta) \left( \frac{\omega}{c} \sin \theta \right)^4 - \rho_1 h_1 \omega^2 \right] + 2\rho_o \omega^2}$$

Por tanto:

$$\tau(\theta) = \frac{(2\rho_o)^2}{\left( \frac{\omega^3 \cos \theta D_1 \sin^4 \theta \eta + 2\rho_o}{c^5} \right)^2 + \frac{\omega^2 \cos^2 \theta (D_1 \omega^2 \sin^4 \theta - \rho_1 h_1 c^4)^2}{c^{10}}}$$

Esta ecuación puede utilizarse en la del coeficiente de transmisión en campo difuso, que depende, como vemos, de la frecuencia y de los parámetros característicos de la capa:

$$\tau_d = \frac{\int_0^{\theta_{lim}} \frac{(2\rho_o)^2 \cos \theta \sin \theta d\theta}{\left( \frac{\omega^3 \cos \theta D_1 \sin^4 \theta \eta + 2\rho_o}{c^5} \right)^2 + \frac{\omega^2 \cos^2 \theta (D_1 \omega^2 \sin^4 \theta - \rho_1 h_1 c^4)^2}{c^{10}}}}{\frac{\sin^2 \theta_{lim}}{2}}$$

## Función de error y su minimización

Consideremos la función del error cuadrática,  $\epsilon$ , definida de la siguiente forma:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^N (\tau_{d,i} - \tau_{d,i})^2$$

donde  $\tau_{d,i}$  representa el valor del coeficiente de transmisión medido a la frecuencia  $i$ -ésima y  $\tau_{d,i}$  es la estimación del valor anterior realizada mediante la ecuación obtenida para el coeficiente de transmisión en campo difuso. Para la minimización de la función de error es necesario realizar las siguientes derivadas parciales e igualarlas a cero [4]:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial D_1} = 2 \sum_{i=1}^N (\tau_{d,i} - \tau_{d,i}) \frac{\partial \tau_{d,i}}{\partial D_1} = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial m_1} = 2 \sum_{i=1}^N (\tau_{d,i} - \tau_{d,i}) \frac{\partial \tau_{d,i}}{\partial m_1} = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} = 2 \sum_{i=1}^N (\tau_{d,i} - \tau_{d,i}) \frac{\partial \tau_{d,i}}{\partial \eta} = 0$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema de ecuaciones no lineal cuya resolución permite obtener el valor de  $D_1$ ,  $m_1$  y  $\eta$  que minimizan el error cometido. La complejidad del sistema, sugiere la aplicación de método iterativo de resolución de sistemas no lineales.

## Resultados obtenidos

Los métodos iterativos utilizados en la obtención de soluciones se describen en las referencias. Los mejores resultados se han obtenido mediante el método de Broyden y el método de Newton, aunque para el segundo ha sido necesario obtener el Jacobiano de las funciones no lineales definidas anteriormente e invertirlo, con lo que el coste computacional se eleva considerablemente. Para comprobar la validez del método, las medidas de aislamiento utilizadas en las pruebas se han tomado de distintos laboratorios y referencias.

En las figuras de la 2 a la 7 se presentan los resultados comparando las estimaciones a partir de este método con los resultados de las medidas experimentales, para los siguientes casos: un muro de ladrillo de 10 cm de espesor (Figura 2), placa de yeso de 12 mm de grosor (Figura 3), vidrio de 8 mm (Figura 4), capa de acero galvanizado de 0.5 mm de grosor (Figura 5), madera contrachapada de 6 mm de grosor (Figura 6) y capa de yeso de 1 cm (Figura 7)

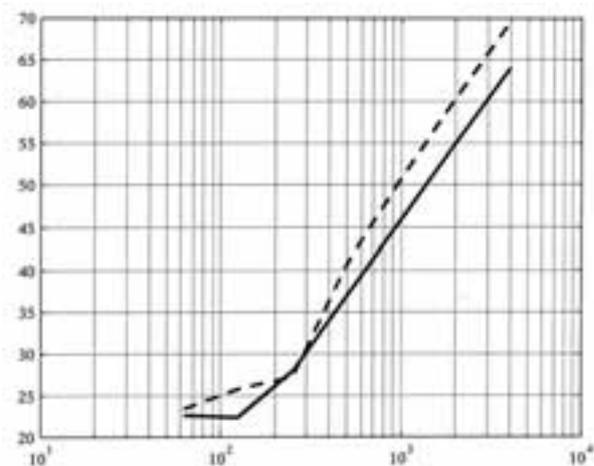


Figura 2. Tabicón de 10 cm: Estimación (línea discontinua), Laboratorio (Línea continúa)  
 $D_1=8,75 \cdot 10^5 \text{ Nm}$ ,  $m_1=82 \text{ kg/m}^2$ ,  $\eta=0.11$

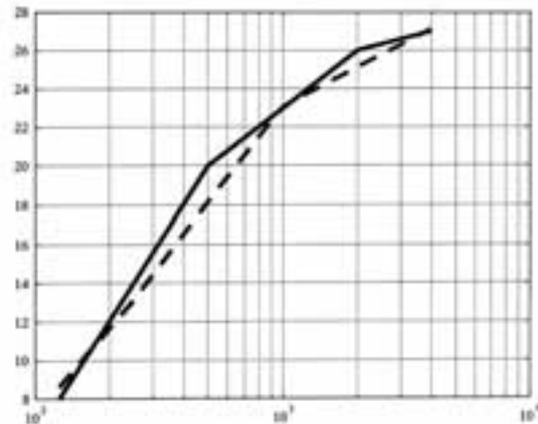


Figura 5. Acero galvanizado de 0,5 mm: Estimación (línea discontinua), Recuero [5] (Línea continúa)  
 $D_1=222,2 \text{ Nm}$ ,  $m_1=5 \text{ kg/m}^2$ ,  $\eta=0.1011$

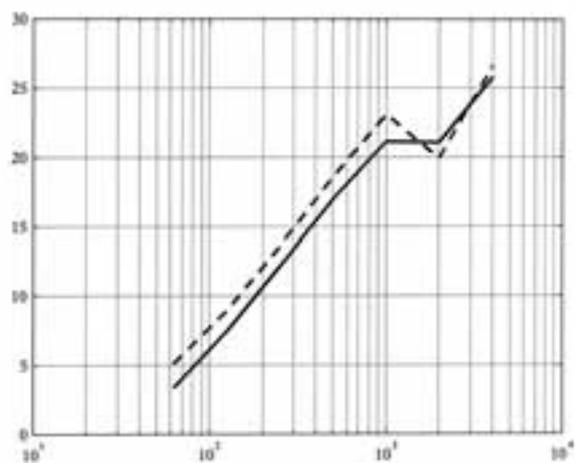


Figura 3. Placa de yeso del 12: Estimación (línea discontinua), Laboratorio (Línea continúa)  
 $D_1=374 \text{ Nm}$ ,  $m_1=5,3 \text{ kg/m}^2$ ,  $\eta=0.045$

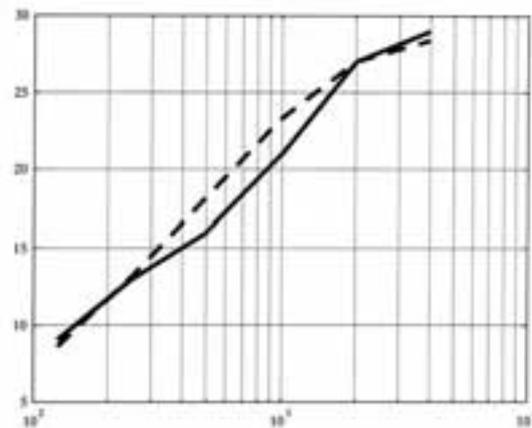


Figura 6. Madera contrachapada de 6 mm: Estimación (línea discontinua), Recuero [5] (Línea continúa)  
 $D_1=150 \text{ Nm}$ ,  $m_1=5 \text{ kg/m}^2$ ,  $\eta=0.31$

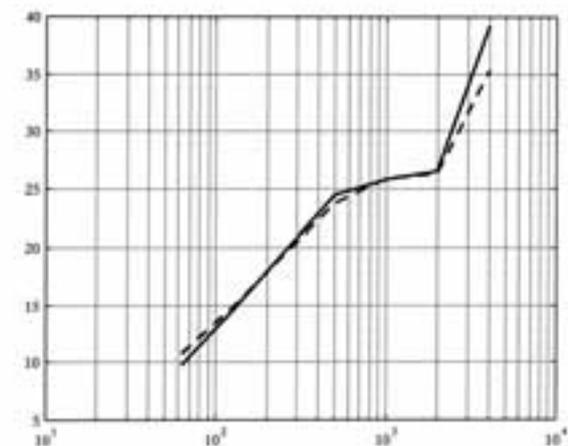


Figura 4. Vidrio de 8 mm: Estimación (línea discontinua), Laboratorio (Línea continúa)  
 $D_1=2,38 \cdot 10^8 \text{ Nm}$ ,  $m_1=12 \text{ kg/m}^2$ ,  $\eta=0.054$

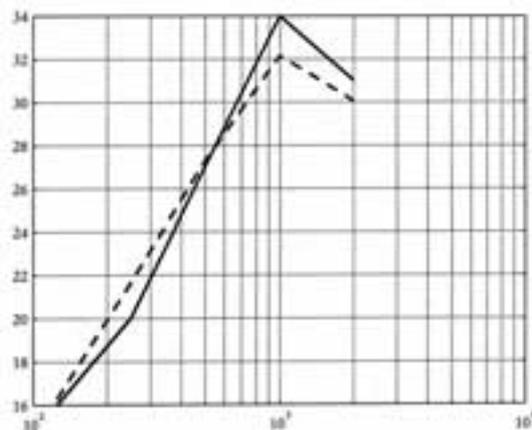


Figura 7. Yeso (una capa de 1cm enlucido): Estimación (línea discontinua), Laboratorio (Línea continúa)  
 $D_1=1010 \text{ Nm}$ ,  $m_1=15,3 \text{ kg/m}^2$ ,  $\eta=0.0003$

Los datos de medidas de aislamiento representados en las gráficas 2 a 4 han sido cedidos por Aislamientos Castilla. Los correspondientes a las gráficas 5 a 7 se han obtenido de la bibliografía [5].

## Conclusiones

El método presentado permite obtener aproximaciones bastante aceptables del aislamiento. En todos los resultados presentados la desviación está por debajo del 5%.

Se ha comprobado que la iteración inicial es condicionante de la obtención de la solución. Esto es lógico al tratarse de un método iterativo, ya que la convergencia está condicionada a un conjunto de valores. Por este motivo, una buena iteración inicial es la que introduzca el valor de masa por unidad de área, que suele ser un dato conocido, y un valor de factor de pérdidas entre 0.01 y 0.0001.

Se ha podido observar que en algunos materiales heterogéneos los resultados tienen un error superior al 5 %, algo lógico si se supone que las características mecánicas del material (rigidez a flexión, módulo de Young, densidad, etc) cambian con el ángulo de la onda incidente y no puede asociarse a un único valor constante.

La utilidad del método se justifica si se tiene en cuenta que

muchos laboratorios disponen de un banco de datos de medidas de aislamiento de capas impermeables y, con el método propuesto, pueden obtener los valores de las características mecánicas de la capa, con las condiciones de montaje propias del laboratorio. Esos valores pueden introducirse después en algoritmos de simulación para la predicción del aislamiento en particiones multicapa, obteniendo resultados que contienen, de forma implícita, información sobre las condiciones de montaje.

## Referencias

- [1] TROCHIDIS A., KALAROUTIS A. (1986) "Sound transmission through double partitions with cavity absorption", *Journal of Sound and Vibration* 107 (2), 321-327
- [2] BRUNEAU M. (1998) "Manuel d'acoustique fondamentale" Editions Hermès
- [3] OOKURA K., SAITO Y. (1978) "Transmission loss of multiple panels containing sound absorbing materials in a random incidence field", *Internoise* 78, 637-642
- [4] CONDE C., WINTER G.(1990) "Métodos y algoritmos del álgebra numérica", Ed. Reverté
- [5] RECUERO M. (1992) "Acústica arquitectónica -soluciones prácticas", Editorial Paraninfo