

# Difusión de ondas acústicas por una esfera hueca con pared de muy poco espesor, inmersa en agua y llena de aire



Rafael Carbó  
Instituto de Acústica, CSIC, Serrano 144,  
28006 Madrid, Spain,  
e-mail: [iaccf31@ia.cetef.csic.es](mailto:iaccf31@ia.cetef.csic.es)

PACS : 43.30 G

## Resumen

En este trabajo se investiga la difusión de ondas acústicas por una esfera hueca, de tamaño grande ( $ka \gg 1$ ), sumergida en agua y con aire en su interior, en el caso en que el espesor de la pared de la esfera sea muy delgado (espesor de la pared  $< 2.5\%$  del radio exterior). Se ha calculado la amplitud y la fase de la onda difundida en el fluido externo, en función de la frecuencia para un gran margen de frecuencias ( $ka=0 \div 134$ ). El eco o respuesta temporal de la esfera se ha obtenido mediante la transformada inversa de Fourier de la función de forma. Cuando la duración del impulso incidente es muy corta ( $\ll a/c$ ), el conjunto del eco difundido por la esfera muestra los tiempos de llegada de las series de impulsos que difunde la esfera, y sugiere que tipo de onda superficial viajando alrededor de la esfera origina cada parte del eco. Una onda reflejada y dos ondas superficiales han sido detectadas. Conocido el camino seguido por cada onda se ha deducido la velocidad y atenuación de estas ondas superficiales.

## Abstract

Theoretical and computational scattering acoustic waves from a large hollow sphere ( $ka \gg 1$ ) submerged into the water and with air inside are investigated in the case that the shell is very thin (thickness of the wall  $< 2.5\%$  of the outer radius). The amplitude and phase of the scattered wave in the external fluid is calculated as function of frequency for a very large frequency band ( $ka=0 \div 134$ ). The

time echo response of the sphere is obtained by inverse FFT transformation of the form function. The time response when the duration of the incident pulse is very short ( $\ll a/c$ ), shows the arrival time of each pulse series, and suggest from what type of surface wave moving around the shell is originate of each part of the echo. Reflected wave and two surface waves traveling around the sphere surface has been detected. The path of each wave is given and the sound velocity and attenuation of the surface waves is deduced.

## Introducción

La difusión de una onda acústica por una esfera sólida es un tema muy estudiado y el tratamiento teórico se puede encontrar extensamente abordado en el trabajo de Faran<sup>1</sup> para el caso de una esfera sólida elástica, y para una esfera sólida elástica hueca en el de Hickling<sup>2</sup> o el de Godman<sup>3</sup>. Nosotros consideramos que el fluido que rodea la esfera es el agua con densidad  $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$  y velocidad de propagación del sonido  $c=1410 \text{ m/s}$ , la esfera está hueca y su interior está lleno de aire. La onda plana incidente tiene un número de onda  $k=\omega/c$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular. El material de la esfera se considera sólido homogéneo e isotrópico, soportando ondas de compresión y de cizalladura con velocidades  $c_l$  y  $c_t$ , cuyos números de onda son  $k_l = \omega/c_l$  y  $k_t = \omega/c_t$ . La densidad del material es  $\rho_l$ . El radio exterior de la esfera es  $a$ , el radio interior es  $b$  y  $d=a-b$  es el espesor de la pared de la esfera.

La forma general de la presión de la onda difundida por una esfera, en condiciones de estado estacionario y de campo lejano, cuando sobre la esfera incide una onda plana se obtiene estableciendo las condiciones de continuidad de la presión (tensión en el sólido) y la velocidad en las superficies límite de la esfera tanto exterior como interior. Normalmente dicha presión difundida viene dada por la expresión:

$$P_s = \frac{P_0 a}{2r} f_{\infty} e^{-i(kr - \omega t)}$$

donde la función  $f_{\infty}$  conocida como función de forma depende de los siguientes parámetros  $k_1 a$ ,  $k_1 b$ ,  $k_2 a$ ,  $k_2 b$ ,  $\rho/\rho_1$ , y del ángulo de difusión  $\theta$ .

### Función de forma

Partiendo de la ecuación completa de la función de forma que da Hickling<sup>2</sup> para una esfera hueca llena de aire,

$$f_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \sin \eta_n e^{-i\eta_n} P_n(\cos(\theta_n))$$

donde  $P_n$  son los polinomios de Legendre, y los coeficientes  $\eta_n$  están determinados por las condiciones de contorno de la presión y velocidad en las superficies interior y exterior de la esfera, siendo:

$$\tan \eta_n = \frac{-[j_n(ka)(\rho/\rho_1)F_n - (ka)f'_n(ka)]}{n_n(ka)(\rho/\rho_n)F_n - (ka)n'_n(ka)}$$

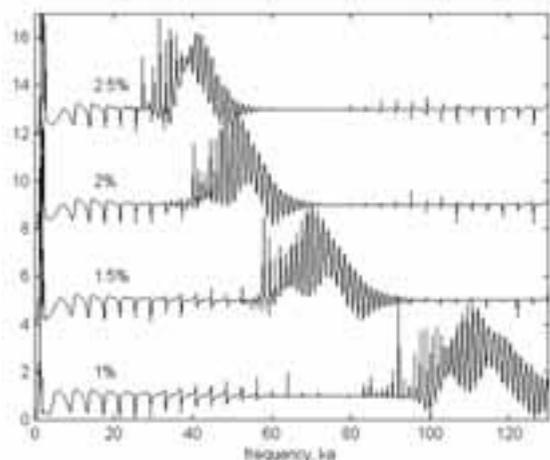


Fig.1.a) Función de forma de una esfera de **acero** hueca llena de aire inmersa en agua con espesor de pared 1%, 1.5%, 2% y 2.5% en función de  $ka$ .

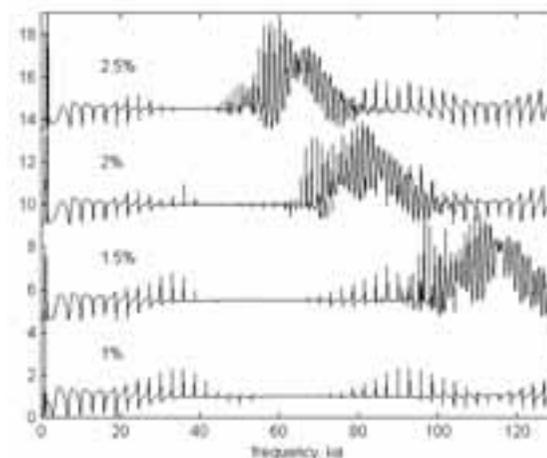


Fig.1.b) Función de forma de una esfera de **cobre** hueca llena de aire inmersa en agua con espesor de pared 1%, 1.5%, 2% y 2.5% en función de  $ka$ .

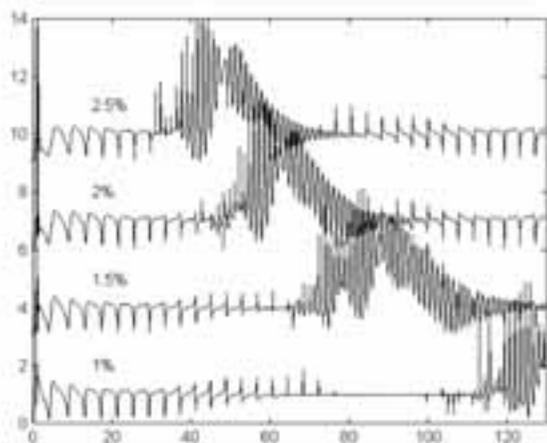


Fig.1.c) Función de forma de una esfera de **aluminio** hueca llena de aire inmersa en agua con espesor de pared 1%, 1.5%, 2% y 2.5%, en función de  $ka$ .

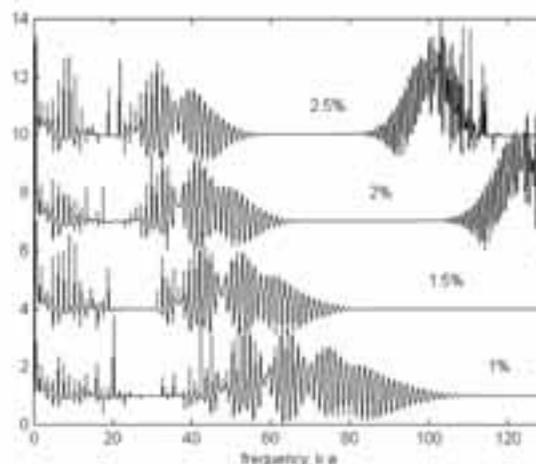


Fig.1.d) Función de forma de una esfera de **plástico** hueca llena de aire inmersa en agua con espesor de pared 1%, 1.5%, 2% y 2.5%, en función de  $ka$ .

y  $j_n$  y  $n_n$  son las funciones esféricas de Bessel de primer y tercer grado.

Se ha calculado la variación con la frecuencia de dicha función de forma, cuando el espesor de la pared de la esfera es menor del 2.5% del radio externo de la esfera. El intervalo de variación de la frecuencia considerada va desde  $ka=0.089$  hasta  $ka=133.68$  en saltos de  $ka=0.089$ .

En la figura 1 se muestra la función de forma en retrodifusión ( $\theta=180^\circ$ ) para una esfera con espesor de pared de 1%, 1.5%, 2% y 2.5%, representada en función de la frecuencia hasta  $ka=133$ , para los siguientes materiales (a) acero, (b) cobre, (c) aluminio y (d) plástico. Los valores que se han considerado para las características físicas de estos materiales en densidad y velocidad de propagación del sonido

Tabla 1. Constantes elásticas del material

Material	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	Velocidad ondas longitudinales (m/s)	Velocidad ondas transversales (m/s)
Acero	7700	5950	3240
Cobre	8945	4760	2287
Aluminio	2700	6300	3173
Plastico	1180	2440	1088

para las ondas longitudinales y transversales, se dan en la tabla 1.

En todas las curvas de la figura 1 aparecen claramente visibles unas resonancias que interfieren en forma de crestas y valles con un fondo no resonante. Para nuestro propósito

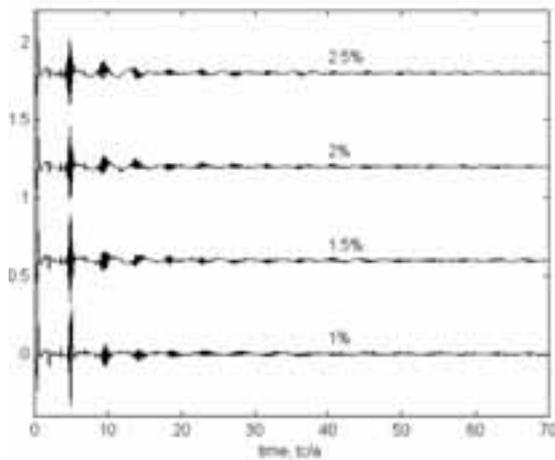


Fig.2.a) Respuesta impulsiva de una esfera de **acero** hueca llena de aire inmersa en agua con espesor de pared 1%, 1.5%, 2% y 2.5%, en función de  $ka$ .

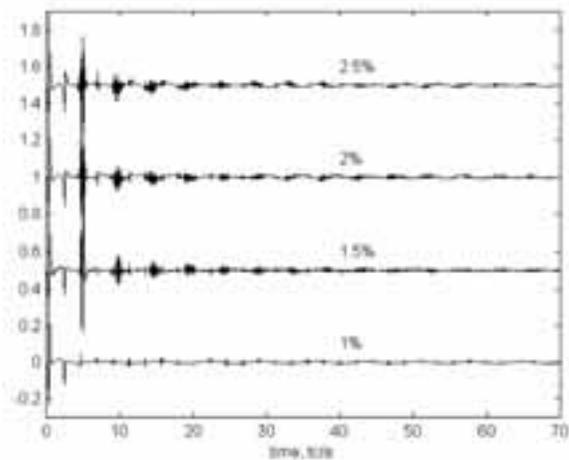


Fig.2.b) Respuesta impulsiva de una esfera de **cobre** hueca llena de aire inmersa en agua con espesor de pared 1%, 1.5%, 2% y 2.5%, en función de  $ka$ .

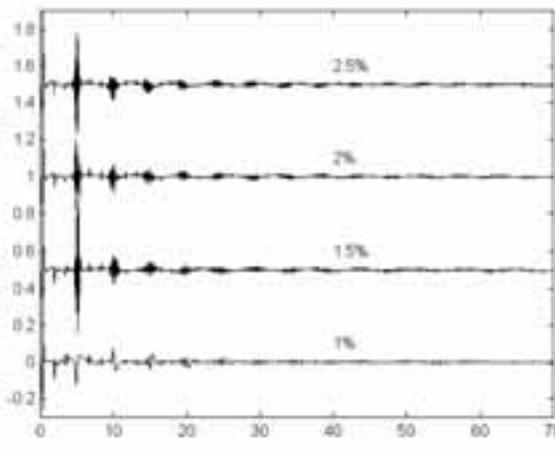


Fig.2.c) Respuesta impulsiva de una esfera de **aluminio** hueca llena de aire inmersa en agua con espesor de pared 1%, 1.5%, 2% y 2.5%, en función de  $ka$ .

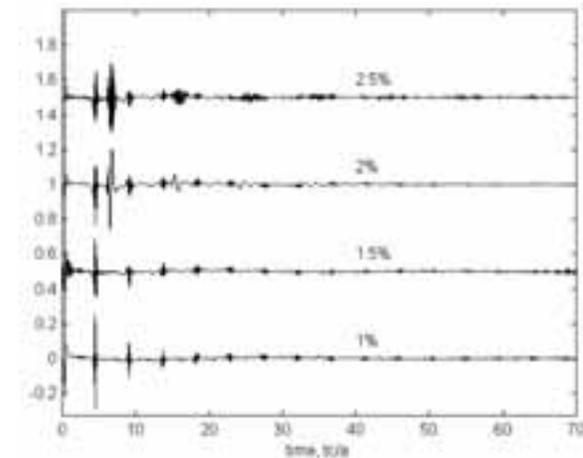


Fig.2.d) Respuesta impulsiva de una esfera de **plástico** hueca llena de aire inmersa en agua con espesor de pared 1%, 1.5%, 2% y 2.5%, en función de  $ka$ .

es muy interesante sustraer de cada función de forma este fondo no resonante. La sustracción coherente se realiza de la siguiente forma:

Mediante la FFT inversa de la función de forma se obtiene la respuesta impulsiva de la esfera (fig. 2). Esta respuesta impulsiva está formada por una sucesión periódica de impulsos. El primero de los impulsos corresponde a la reflexión geométrica en la superficie externa de la esfera. A continuación eliminamos este primer impulso y luego por transformada de Fourier obtenemos la función de forma sin el fondo no resonante, como se muestra en la figura 3.

Aparecen en dicha figura a lo largo de todo el rango de  $ka$  estudiado, para los cuatro espesores y los cuatro materiales analizados, tres distintos grupos de picos regularmente espaciados:

- (1) En el rango de frecuencias más bajo hay uno o varios picos muy juntos con el nivel más alto. La frecuencia a la que aparecen estos picos crece con el espesor y crece con el módulo de Young del material (ver tabla 2). Este comportamiento indica que dichos picos corresponden al tipo Junger<sup>4</sup>  $j=1$  de vibración de la esfera

Tabla 2. Primer pico ( $ka$ ) en la función de forma.

	1%	1.5%	2%	2.5%
Acero	1.239	1.408	1.542	2.041
Cobre	0.971	1.109	1.207	1.283
Aluminio	0.802	0.980	1.069	1.159
Plástico	0.249	0.312	0.356	0.401

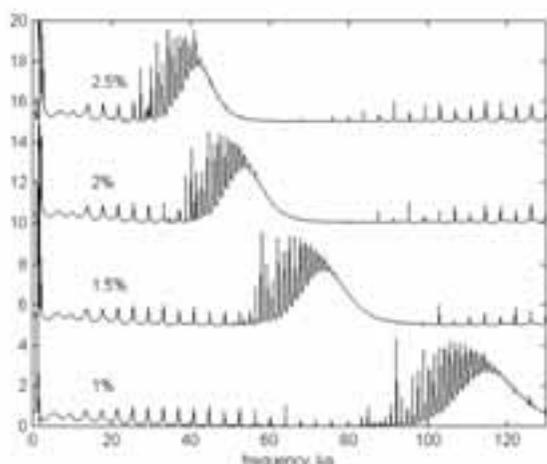


Fig.3.a) Función de forma de una esfera de **acero** hueca llena de aire inmersa en agua con espesor de pared 1%, 1.5%, 2% y 2.5%, en función de  $ka$ , y sin la parte no resonante.

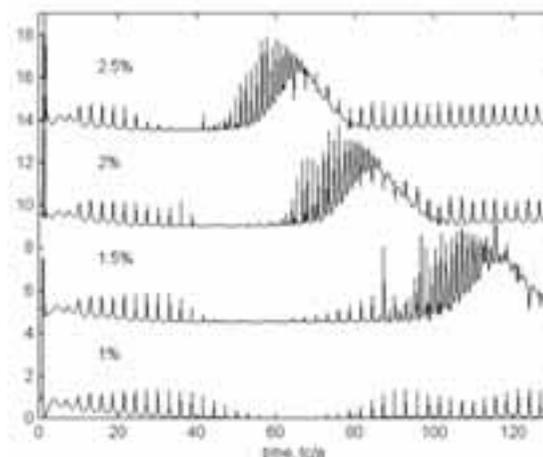


Fig.3.b) Función de forma de una esfera de **cobre** hueca llena de aire inmersa en agua con espesor de pared 1%, 1.5%, 2% y 2.5%, en función de  $ka$ , y sin la parte no resonante.

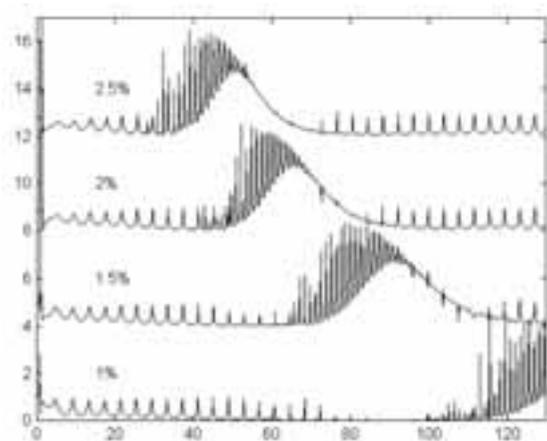


Fig.3.c) Función de forma de una esfera de **aluminio** hueca llena de aire inmersa en agua con espesor de pared 1%, 1.5%, 2% y 2.5%, en función de  $ka$ , y sin la parte no resonante.

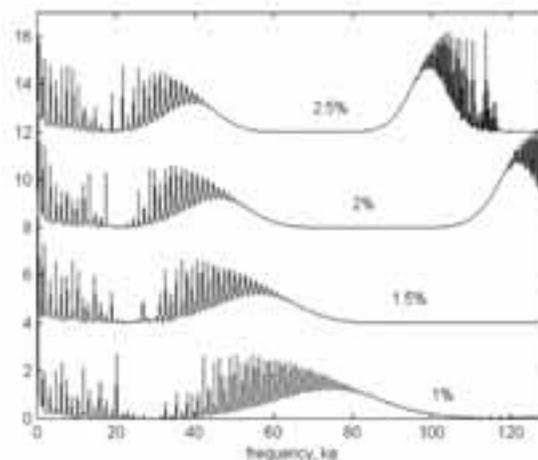


Fig.3.d) Función de forma de una esfera de **plástico** hueca llena de aire inmersa en agua con espesor de pared 1%, 1.5%, 2% y 2.5%, en función de  $ka$ , y sin la parte no resonante.

- (2) Como un aspecto general de todas las curvas de la figura 3 también se aprecia una sucesión de resonancias regularmente espaciadas y comparativamente mas separadas entre si. La separación entre resonancias ( $\Delta_S ka$ ) vemos que depende del material pero es independiente del espesor de la pared de la esfera. Para la esfera de acero esta separación es  $\Delta_S ka=3.88$ , para la esfera de cobre  $\Delta_S ka=2.85$ , para la esfera de aluminio  $\Delta_S ka=3.92$ , y para la esfera de plástico  $\Delta_S ka=1.44$ . Corresponden estas resonancias a una velocidad de propagación alta, usando la formula<sup>5</sup>  $c_s^g / c = (\Delta_S ka)_n$  para el valor de la onda esférica superficial con velocidad de grupo  $c_s^g$  en la resonancia de orden n. El hecho de que la separación  $\Delta_S ka$  sea uniforme en todo el rango de frecuencias indica que esta onda no es dispersiva, esto junto con la alta velocidad que muestra, nos indica que se trata del modo mas bajo de la onda simétrica de Lamb,  $S_0$ .
- (3) Superpuestas en lo que Huberall<sup>6</sup> denomina una amplia “colina” se encuentran los picos de otras resonancias mas estrechamente espaciados. La frecuencia central de la “colina” ( $k_0 a$ ) decrece con el espesor y varía con el material, tal y como se muestra en la tabla 3. En el caso de la esfera de cobre con espesor del 1% la “colina” aparecería a frecuencia superior al rango estudiado. En el caso de la esfera de plástico con espesores gruesos aparecen dentro de nuestro margen de frecuencias otro modo superior de la “colina”.

Tabla 3. Frecuencia central de la “colina” ( $k_0 a$ )

	1%	1.5%	2%	2.5%
Acero	~ 113	~ 74	~ 53	~ 40
Cobre	> 130	~ 115	~ 85	~ 65
Aluminio	~ 132	~ 93	~ 65	~ 52
Plastico	~ 76	~ 60	~ 50	~ 38

La separación entre resonancias ( $\Delta_A ka$ ) es ligeramente dependiente del material e independiente del espesor de la esfera. Para la esfera de acero es  $\Delta_A ka=1.39$ , para la esfera de cobre  $\Delta_A ka=1.25$ , para la esfera de aluminio  $\Delta_A ka=1.25$ , y para la esfera de plástico  $\Delta_A ka=1.35$ . Esto indica una velocidad de la onda baja con dispersión muy pequeña, por lo tanto se trata supuestamente del modo mas bajo de la onda antisimétrica de Lamb  $A_0$ .

## Respuesta impulsiva

Como un aspecto general de todas las curvas de la figura 2 se puede observar que la respuesta impulsiva está consti-

tuida por un primer impulso debido a la reflexión de la onda en la cara exterior de la esfera ( $H_R$ ) seguida de dos series periódicas de impulsos<sup>7</sup>. La primera de las series de impulsos debida a las ondas simétricas de Lamb ( $H_S$ ) están regularmente espaciados en el tiempo:  $\Delta_S(tc/a)=1.602$  para la esfera de acero,  $\Delta_S(tc/a)=2.148$  para la esfera de cobre,  $\Delta_S(tc/a)=1.586$  para la esfera de aluminio, y  $\Delta_S(tc/a)=4.363$  para la esfera de plástico. La segunda serie de impulsos debida a las ondas antisimétricas de Lamb ( $H_A$ ) están espaciadas en el tiempo  $\Delta_A(tc/a)=4.415$  para la esfera de acero,  $\Delta_A(tc/a)=4.564$  para la esfera de cobre,  $\Delta_A(tc/a)=4.559$  para la esfera de aluminio, y  $\Delta_A(tc/a)=4.649$  para la esfera de plástico. Durante este intervalo de tiempo las ondas de Lamb simétricas y antisimétricas viajan alrededor de la esfera con velocidad  $c_s^g/c=2\pi/\Delta_S(tc/a)$ .

La respuesta impulsiva  $H$  de una esfera hueca llena de aire y con espesor de pared delgada puede aproximarse con la suma de tres términos:

$$H = H_R + H_S + H_A,$$

donde:

$$H_R = R \delta(t)$$

$$H_S = P_S \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta(t - (2\pi n a / c_s^g))}{(n2\pi a)^{\gamma_S}}$$

$$y \quad H_A = G(t) \otimes \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta(t - (2\pi n a / c_A^g))}{(n2\pi a)^{\gamma_A}}$$

Los impulsos producidos por las ondas simétricas de Lamb son deltas de Dirac lo mismo que el impulso reflejado  $H_R$ . Por el contrario los impulsos correspondientes a las ondas antisimétricas son una función  $G(t)$  transformada inversa de Fourier de la función  $g(ka)$  que determina la “colina” bajo las resonancias antisimétricas en la función de forma. Esta función puede expresarse en la forma:

$$g(ka) = P_A e^{jka} / \left[ (ka) \Delta(ka_0) + j((ka)^2 - (ka_0)^2) \right]$$

Recordemos que la frecuencia central de la “colina” depende del material y del espesor de la pared de la esfera.

En la figura 4 mostramos la variación de la amplitud de las ondas simétricas  $H_S$  y de las ondas antisimétricas  $H_A$  a lo largo del tiempo, es decir con el número de vueltas alrededor de la esfera. Esta atenuación con la distancia viene determinada por los exponentes  $\gamma_S$  y  $\gamma_A$ . En la tabla 4 se presentan los valores de la velocidad, la amplitud y el coefi-

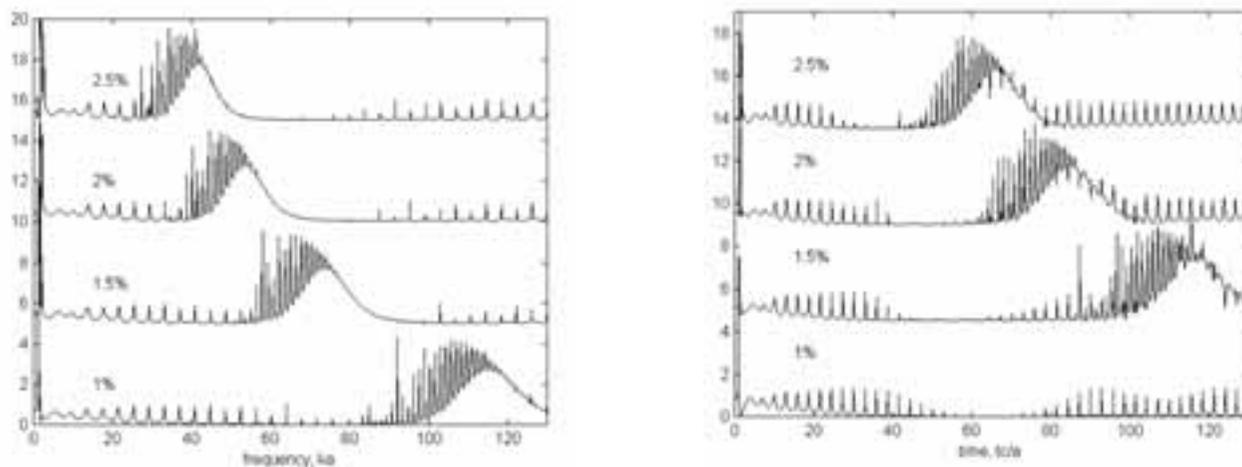


Fig.4. Series de impulsos correspondientes a ondas de Lamb a) antisimétricas y b) simétricas, que rodean una esfera hueca de acero llena de aire, inmersa en agua y con espesor de pared del 1.5%, representado en función de  $tc/a$ .

Tabla 4.

	$P_A$	$c_A^g/c$	$\gamma_A$	$P_S$	$c_S^g/c$	$\gamma_A$
Acero	0.0060	1.399	1.87	0.012	3.932	0.87
Cobre	0.0068	1.311	1.95	0.035	2.863	0.66
Aluminio	0.0061	1.279	2.00	0.025	3.932	0.51
Plastico	0.0092	1.361	1.65	0.010	1.424	0.43

ciente de atenuación de las ondas de Lamb simétricas y antisimétricas para los cuatro materiales.

A modo de resumen esquemático se muestra en la figura 5 el proceso seguido para obtener la velocidad y atenuación de los dos tipos de ondas superficiales.

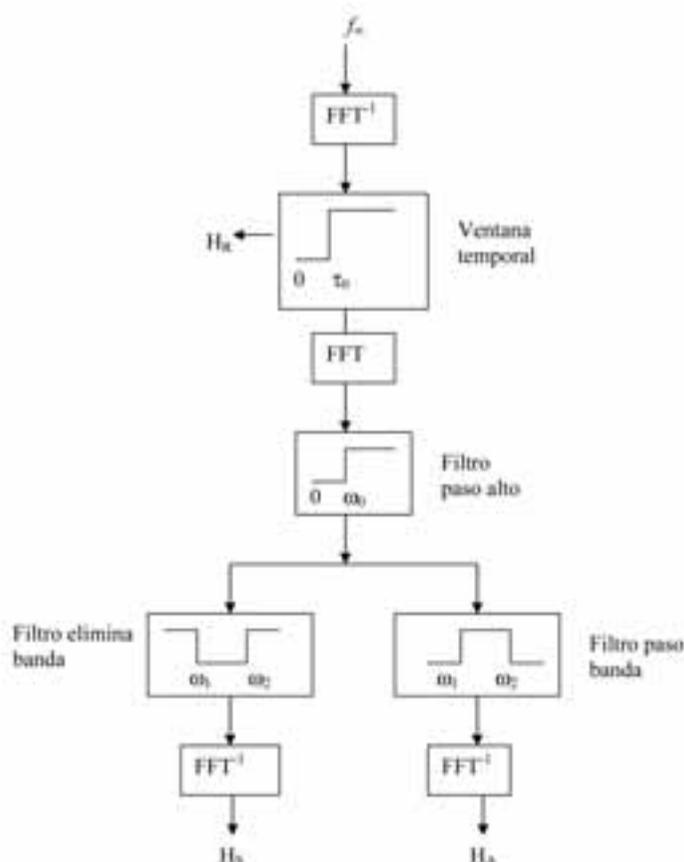


Fig. 5 Esquema de proceso seguido para obtener  $H_S$  y  $H_A$ .

## Conclusiones

La función de forma de una esfera hueca llena de aire y con una pared muy delgada puede descomponerse en tres partes diferenciadas y la respuesta temporal puede aproximarse con la suma de tres términos que corresponden al impulso reflejado y dos series de impulsos producidos por ondas que viajan alrededor de la esfera con diferente velocidad y atenuación. Han sido identificadas como ondas de Lamb simétricas y antisimétricas. La velocidad con que viajan las ondas simétricas alrededor de la esfera varía poco cuando cambia el material de la esfera, por el contrario la velocidad con que viajan las ondas antisimétricas depende fuertemente del material. La amplitud de las ondas simétricas está más de 10 dB por debajo de la amplitud de las ondas antisimétricas. Las pérdidas con la distancia recorrida por las ondas alrededor de la esfera es mayor en el caso de las ondas antisimétricas.

## Referencias

1. J.J. Faran, "Sound scattering by solid cylinders and spheres". Jour. Acoust. Soc. Am. 23 405-418 (1951).
2. R. Hickling, "Analysis of echoes from a hollow metallic sphere in water". Jour. Acoust. Soc. Am. 36 (6) 1124-1137 (1964).

3. R. Goodman, "Reflection and transmission of sound by elastic spherical shell". Jour. Acoust. Soc. Am. 34 (3) 338-344 (1962)

4. M.C. Junger, "Normal modes of submerged plates and shells", in Fluid-Solid Interaction. Ed. J.E. Greenspon (Proc. ASME colloquium New York 1967), p. 95.

5. M. Talmant, H. Uberall, R. Miller, M. Werby, J. Dickey, "Lamb waves and fluid-borne waves on water-loaded, air-filled thin spherical shells". Jour. Acoust. Soc. Am. 86 (1) 278-289 (1989).

6. H. Uberall, A.C. Ahyl, P.K. Raju, I.K. Bjørnø, L. Bjørnø. "Circunferencial wave phase velocities for empty, fluid immersed spherical metal shells". Jour. Acoust. Soc. Am. 112 (6) 2713-2720 (2002).

7. R. Carbo and A. C. Molero, "Field scattering from a large sphere. Experimental study and geometrical approximation" 5th European Conference on Underwater Acoustic, Vol. 2, 923-928. Lyon (2000).

## Ingeniería y Arquitectura La Salle Universidad Ramon Llull Barcelona

### Queremos incorporar una persona al Departamento de Acústica con perfil de profesor universitario e investigador

#### Se requiere:

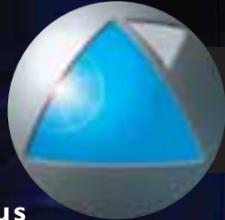
- Titulación superior especializado en Acústica con el doctorado finalizado o en proceso, preferiblemente.
- Aptitudes para la enseñanza.
- Persona motivada por la investigación.
- Conocimiento de equipamiento, transductores y *softwares*, del campo de la acústica en general (acústica de salas, acústica ambiental, electroacústica... etc).

#### Se ofrece:

- Incorporación en plantilla dentro del Departamento de la Universidad
- Retribución según valía y experiencia

Si estás interesado envía CV a la atención de Ivana Rossell a [ivana@salle.url.edu](mailto:ivana@salle.url.edu)

# La línea más completa en software de Predicción Acústica



**Soluciones a sus necesidades en acústica ambiental, industrial y arquitectónica, acordes con la normativa vigente**

**Ponemos a su alcance las herramientas más avanzadas en el campo de la modelización acústica:**

**Predicción y control del ruido ambiental en pequeñas y grandes ciudades producido por:**

- ◆ Tráfico
- ◆ Industria
- ◆ Ferrocarril
- ◆ Aeropuertos
- ◆ Mapas de población expuesta al ruido
- ◆ Optimización de medidas preventivas y/o correctoras

**Acústica Industrial:**

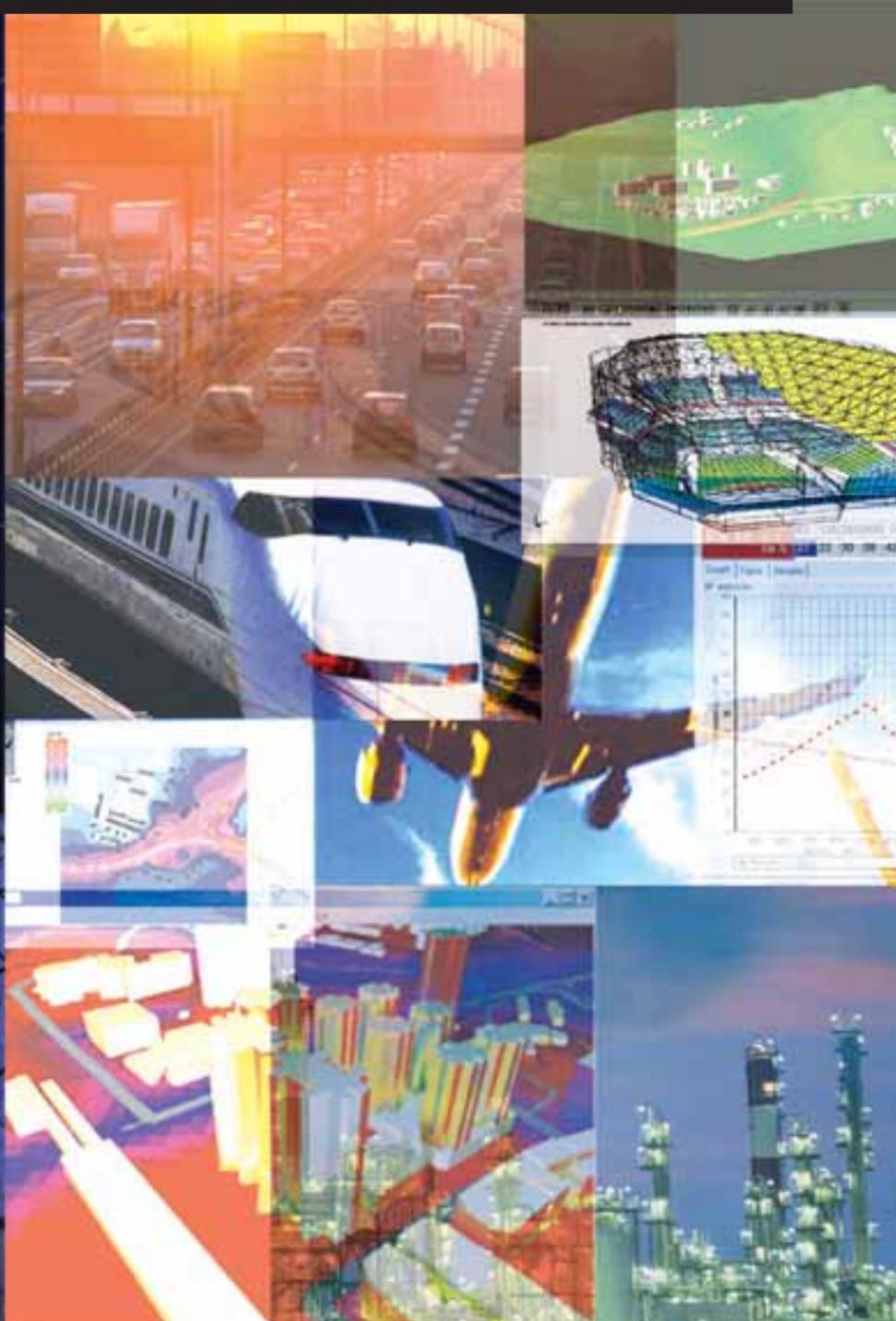
- ◆ Ruido transmitido por máquinas
- ◆ Evaluación de soluciones acústicas en fábricas

**Aislamiento y acondicionamiento acústico de salas:**

- ◆ Cálculo de predicción de aislamiento de materiales
- ◆ Cálculo de tiempos de reverberación, claridad, espaciosidad, etc.
- ◆ Diseño acústico de salas de concierto
- ◆ Auralización de eventos sonoros.

**Modelización avanzada:**

**Creación de paisajes sonoros 3D (sonido binaural).**



GRUPO ALAVA  
INGENIEROS

MADRID. Tel. 91 567 9700  
BARCELONA. Tel. 93 459 4250  
ZARAGOZA. Tel. 976 200 969  
LISBOA. Tel. 21 421 7472

[www.alava-ing.es](http://www.alava-ing.es)  
[alava@alava-ing.es](mailto:alava@alava-ing.es)



E201612

# Acústica ambiental

- Sonómetros
- Analisadores de ruído e vibrações.
- Sistemas de medida de isolamento acústico.
- Sistemas multicanal para acústica avançada.
- Micrófones e transdutores.
- Software de simulação, predição e mapas de ruído.

01dB

G.R.A.S.

HEAD ACOUSTICS

RION



LISBOA  
Tel. 21 421 74 72

MADRID  
Tel. 91 567 97 00

BARCELONA  
Tel. 93 459 42 50

ZARAGOZA  
Tel. 976 20 09 69

[www.mra.pt](http://www.mra.pt)  
e-mail: [mra@mra.pt](mailto:mra@mra.pt)