VI Congreso Iberoamericano de Acústica - FIA 2008
Buenos Aires, 5, 6 y 7 de noviembre de 2008

FIA2008-A003

Resolución de circuitos por analogía mecánica

Juan C.Giménez de Paz

Licenciado en ciencias físicas, FCEN UBA, docente universitario y asesor acústico.
San Antonio de Padua, Argentina. gimenezdepaz@sinectis.com.ar .

Abstract

The resolution of electrical circuits and its acoustic homologous from a physical point of view is presented in this paper. Based on the structural analogy with a mechanical system in equilibrium, it is possible to associate a Lagrangian depending on generalized forces in a viscous medium, with friction coefficients and with a set of holonomic constraint functions. By means of Hamilton's Principle applied to this Lagrangian associated with a circuit, an equation in function of a set of independent variables can be obtained, which turns out to be the condition for the resolution of a typical problem of linear programming. This minimized expression represents in turn, the power dissipation. From all the possible values that could take a set of speed and pressure, the Principle picks out one and only one (the true values) with the condition of producing the least power dissipation. All acoustic devices or systems that could be represented by an electric circuit, may be solved by this method with the physical meaning described here.

Resumen

Se presenta la resolución de circuitos eléctricos y sus homólogos acústicos desde un punto de vista físico. Es posible asociar una lagrangiana a partir de la analogía estructural con un sistema mecánico en equilibrio, sujeto a fuerzas generalizadas en un medio viscoso, con coeficientes de fricción y a ligaduras holónomas. Mediante el Principio Integral de Hamilton aplicado a esa lagrangiana asociada a un circuito, se obtiene una ecuación que depende de un conjunto de variables independientes, que resulta ser la condición para la resolución de un problema típico de programación lineal. Esta expresión minimizada representa a su vez, la disipación de potencia, con lo que se establece que de todos los valores posibles que pudieran tomar el conjunto de velocidad y presión, se obtiene uno único con la condición de producir la menor disipación de potencia. Todos los dispositivos acústicos o los sistemas que puedan ser representados por un circuito eléctrico, pueden ser solucionados por este método, con el sentido físico aquí descripto.

1 Introducción

El desarrollo de la mecánica clásica de partículas o del medio continuo, puede hacerse a partir del Principio de Mínima Acción junto con la ecuación de Hamilton-Jacobi. Este tratamiento permite además, la resolución de circuitos acústicos y eléctricos debido a la analogía estructural (derivan de los mismos los principios variacionales).

La definición de uno de ellos entonces, equivale a la de sus homólogos. Los eléctricos son los más difundidos y desarrollados por lo que es frecuente que los mecánicos y acústicos se resuelvan mediante el uso de uno eléctrico equivalente. Se extiende este mecanismo para aquellos sistemas acústicos que puedan ser representados por un circuito.

En este trabajo se presenta la resolución de circuitos en base a principios físicos: Conservación de la carga (Primera Ley de Kirchhoff[1]) y mínima disipación de potencia. Se demuestra que esta última condición es equivalente al planteo típico de las llamadas ecuaciones de malla (Segunda Ley de Kirchhoff[2]).

El desarrollo se presenta en la forma de un teorema. El autor entiende que se trata de una contribución original y que tiene en todo caso el mérito de dar una visión física del significado de la solución de uno de estos problemas.

Al referirse a "circuito" se tiene en mente, a uno eléctrico y por lo tanto, se hace mención a sus componentes. Puede sin embargo, pensarse en otro tipo de circuito adoptando los elementos equivalentes. En cualquier caso, se emplea formalmente, el concepto de variable generalizada.

2 Condiciones físicas

Para un circuito eléctrico resistivo de r ramas, m mallas, n+1 nodos y g generadores de tensión $E_j(t)$, es posible asociar una lagrangiana a partir de la analogía estructural con un sistema mecánico en equilibrio, sujeto a fuerzas generalizadas[3], en un medio viscoso con coeficiente de fricción R_j para cada una de las coordenadas generalizadas $q_j(t)$ sujeta a ligaduras holónomas.

Esta lagrangiana se muestra que es[4]

$$L(q,\dot{q},t) \quad = \quad \sum_j E_j(t)\, q(t)\,. \tag{1}$$

La función de disipación

$$F\left(R,\dot{q},t\right) \quad = \quad 1/2 \sum_j R_j \dot{q}_j^2(t)\,, \tag{2}$$

en la que las coordenadas generalizadas $q(t)$ [5] son, según la interpretación eléctrica, los valores instantáneos de corriente de rama. Estas coordenadas son holónomas esclerónomas, por lo que existen relaciones del tipo

---

[1] La analogía con un circuito acústico indica que la suma de las velocidades de volumen en cualquier punto e instante, deben anularse.

[2] En el mismo sentido, las caídas de presión en un circuito cerrado deben anularse en cualquier instante.

[3] La unidad de la fuerza generalizada Q_j puede ser cualquiera, pero su producto con la variable generalizada q_j debe tener unidades de trabajo: $[Q_j \times q_j]$ = J. Para circuitos, $[Q_j]$ = Wb y $[{}^{\partial Q}/_{\partial t}]$ = V.

[4] Por simplicidad de notación, a las derivadas temporales se las denotará con un punto superior. Así son equivalentes, $\partial q(t)/\partial t \equiv \dot{q}(t)$.

$$f(q_1, q_2, \ldots q_n) = 0 . \tag{3}$$

Desde el punto de vista mecánico se puede encontrar para cada una de las coordenadas q, la ecuación de Lagrange correspondiente, esto es[6],

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = 0 . \tag{4}$$

Con las ecuaciones (1) y (2) en la (4), resulta

$$E_j - R_j \dot{q}_j = 0 .$$

Con esta igualdad, la ecuación (1) puede reescribirse

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_j R_j \dot{q}_j q_j . \tag{5}$$

Se puede aplicar ahora el Principio de Hamilton para la integral que define la acción A, dada por.

$$A = \int L(q, \dot{q}, t) dt \tag{6}$$

De acuerdo con este Principio, el movimiento real del sistema en el espacio de configuración, se obtiene cuando la acción es mínima. Con la lagrangiana (5) en la integral (6) se obtiene explícitamente,

$$\sum_j R_j \int \dot{q}_j q_j \, dt = \sum_j R_j \int q_j \, dq_j ,$$

En particular para A mínimo, la primitiva (potencia) es

$$P(R, q) = \frac{1}{2} \sum_j R_j q_j^2 + C = \text{mínimo}$$

en la que C es una constante, por lo que es equivalente a exigir que se cumpla,

$$P(R, q)) = \sum_j R_j q_j^2 = \text{mínimo} \tag{7}$$

[5] Por simplicidad de notación, se eliminará de aquí en más la variable tiempo: i_j por $i_j(t)$ y E_j por $E_j(t)$.

[6] A la ecuación de Lagrange, los matemáticos la denominan "Ecuación de Euler", referida a una variable arbitraria x y constituye la condición necesaria y suficiente para que la expresión (6) tenga mínimo o máximo.

La ecuación (7) dice que el sistema tomará los valores de coordenadas q_j en el estado de equilibrio, tales que $P(R,q)$ debe ser mínima. Para su interpretación según el punto de vista de un circuito y hacer posible su aplicación al objeto de este trabajo, se explicitarán las condiciones dadas por las ecuaciones (3). Se tiene como condición física, que debe cumplirse la conservación de la carga en todos los puntos del circuito, en particular en los n+1 nodos (Primera Ley de Kirchhoff), por lo que existirán n ecuaciones independiente del tipo (3), que son lineales.

$$\begin{cases} f_1(q_1,q_2,\ldots,q_r) & = & 0 \\ f_2(q_1,q_2,\ldots,q_r) & = & 0 \\ \ldots & & \\ f_n(q_1,q_2,\ldots,q_r) & = & 0 \end{cases} \tag{3'}$$

Estas n ecuaciones permiten obtener conjuntos de valores (q_1, q_2, … q_r) válidas por la sola condición impuesta por la conservación de la carga. Se demostrará que la condición dada por la ecuación (7) selecciona de esos conjuntos, uno único que representa la solución del problema de r valores q_j del circuito. En la demostración se debe tener en cuenta que se adoptan las fuentes de corriente I_s equivalentes de las fuentes $\dot{E}_s$. Además, y de acuerdo con conceptos conocidos, se tomarán las q_j como valores eficaces de corriente y se supondrá que existe un solo resistor por rama, lo que no quita generalidad al problema.

3 Teorema

Dado un circuito resistivo de m mallas y n+1 nodos con g generadores de corriente, la potencia disipada en la forma de la expresión (7), genera las m-g ecuaciones de la Segunda Ley de Kirchhoff, las que junto con las n de nodos según la Primera Ley de Kirchhoff, permiten obtener en forma unívoca, al conjunto completo de los valores de todas las variables del circuito.

3.1 Demostración

Un circuito de n+1 nodos, g generadores y m mallas necesita de $m-g+n = r$ ecuaciones para obtener las r incógnitas que son sus corrientes de rama q_j y que, junto con otras tantas ecuaciones dadas por la Ley de Ohm, se obtienen todas las diferencias de potencial en cada rama, es decir, las 2r incógnitas del problema.

Las n ecuaciones de nodo independientes (Primera Ley de Kirchhoff) con r incógnitas, se pueden plantear como relaciones lineales entre las q y las I_s de las fuentes correspondientes a cada uno de los nodos.

De las r variables q_k, habrá $r-n > 0$ independientes, en función de las cuales pueden escribirse las restantes n, esto es

$$q_k = \sum_{u=n+1}^{r} c_{ku}\, q_u + \sum_{s=1}^{g} d_{ks}\, I_s\ , \tag{8}$$

en la que los c_{ku} y d_{ks} pueden tomar sólo los valores 0, 1, -1. Además, $1 \leq k \leq n$.

Con la ecuación (8) en la (7) se puede escribir en dos grupos según que la coordenada generalizada pertenezca o no al conjunto de r-n tomadas como independientes. Así,

$$
\begin{aligned}
P(R,q) &= \sum_{k=1}^{n} R_k\, q_k^2 + \sum_{j=n+1}^{r} R_j q_j^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{n} R_k \left[\left(\sum_{u=n+1}^{r} c_{ku} q_u \right)^2 + \left(\sum_{s=1}^{g} d_{ks}\, I_s \right)^2 + 2 \sum_{u=n+1}^{r} c_{ku} q_u \sum_{s=1}^{g} d_{ks} I_s \right] + \sum_{j=n+1}^{r} R_j q_j^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{n} R_k \left[\left(\sum_{u=n+1}^{r} c_{ku} q_u \right)^2 + \left(\sum_{s=1}^{g} d_{ks}\, I_s \right)^2 + 2 \sum_{u=n+1}^{r} \left(c_{ku} \sum_{s=1}^{g} d_{ks} I_s \right) q_u \right] + \sum_{j=n+1}^{r} R_j q_j^2
\end{aligned}
$$

Al haber *r-n* variables independientes, existen otras tantas derivadas parciales de la expresión anterior que igualadas a cero, dan la condición necesaria de mínimo para $P(R,q)$. Esto se cumple por supuesto para la condición $P(R,q)$ = extremo, pero es obvio que la condición para máximo se debe descartar. Si q_w es una de esas variables, se tendrá

$$\frac{\partial P(R,q)}{\partial q_w} = 0\,,$$

por lo que

$$\sum_{k=1}^{n} R_k \left[2 \left(\sum_{u=n+1}^{r} c_{ku} q_u \right) c_{kw} + 2 c_{kw} \sum_{s=1}^{g} d_{ks} I_s \right] + 2 R_w q_w = 0\,.$$

Finalmente,

$$R_w q_w + \sum_{k=1}^{n} c_{kw} R_k \left[\sum_{u=n+1}^{r} c_{ku} q_u + \sum_{s=1}^{g} d_{ks} I_s \right] = 0\,. \tag{9}$$

Como ya se dijo, son necesarias *r* ecuaciones para obtener las *r* incógnitas del problema. De acuerdo con lo hecho, se tienen *n* ecuaciones dadas por la ecuación (8) y *r-n* por la ecuación (9), por lo que el número total es $n + (r - n) = r$, lo que da la cantidad necesaria y suficiente.

Por otro lado, si se plantean todas las ecuaciones de Kirchhoff se tendrían: *n* ecuaciones de nodos (las empleadas) y *m-g* de malla, lo que también suma *r* ecuaciones independientes como se da en los planteos clásicos del problema. De aquí resulta que debe ser *r-n* = *m-g*, de lo que se deduce que la $P(R,q)$ da origen a tantas ecuaciones como las que resultan de plantear el problema por mallas.

4 Unicidad

Puede también explicitarse más la relación que existe entre ambos planteos a partir de las relaciones entre los elementos de ambos sistemas de ecuaciones y ver la absoluta equivalencia entre esos planteos.

En efecto, dado que las *r-n* coordenadas generalizadas q_w son independientes (visto como vector $\underline{Q}$), pueden considerarse como una base (del espacio de configuración) E^{r-n} y cualquier conjunto de valores y_z independientes de otro vector $\underline{Y}$ de dimensión *r-n*, también constituye una base y puede obtenerse a partir de $\underline{Q}$ mediante la matriz de paso $\underline{\underline{T}}$ [7, 8],

$$y_z = T_{zw} q_w \tag{10}$$

Cualquier vector $\underline{J}$ puede obtenerse de $\underline{Q}$ y de $\underline{Y}$, mediante las transformaciones lineales

$$\begin{aligned} j_p &= N_{pw} q_w \\ j_q &= M_{qz} y_z \end{aligned} \tag{11}$$

Las matrices $\underline{\underline{N}}$ y $\underline{\underline{M}}$ son la misma transformación en las dos bases diferentes, $\underline{Q}$ y $\underline{Y}$.

Las 2 matrices $\underline{\underline{M}}$ y $\underline{\underline{N}}$ de dimensión (*r-n*) x (*r-n*) se vinculan a través de la matriz de paso $\underline{\underline{T}}$, [9]

$$M_{qz} = T_{qp} N_{pw} T_{wz}^{(-1)}, \tag{12}$$

dado que siendo matriz cuadrada de paso de una base a otra, $\underline{\underline{T}}$ tiene su inversa (matriz regular con su determinante no nulo), como condición necesaria y suficiente para que se comporte como tal.

Desde el punto de vista del teorema anterior, del conjunto infinito de vectores equivalentes, por ser cada uno una base del espacio de configuración E^{r-n}, sólo uno de ellos satisface la resolución de un circuito, debido a la condición de ser el que disipa menor potencia entre todos ellos. Esta última condición es la que selecciona el vector solución del problema.

Todos los demás conjuntos equivalentes vistos como bases de un espacio E^{r-n}, no satisfacen esa resolución por no cumplir la condición de dar origen a la mínima disipación de potencia. Se puede ver que existen un conjunto infinito de vectores que contienen un conjunto de (r-n) elementos independientes que podrían satisfacer. Visto como el conjunto de corrientes eléctricas de un circuito, del conjunto de $\{i_w\}$ que satisface las condiciones dadas para representar a las que realmente se establecen en un circuito determinado, siempre puede hallarse otro conjunto de igual cantidad de variables (corrientes) y_z, independientes, pero que no satisfacen la condición de mínima disipación de potencia y por lo tanto, no constituyen una solución real del problema.

5 Ejemplo

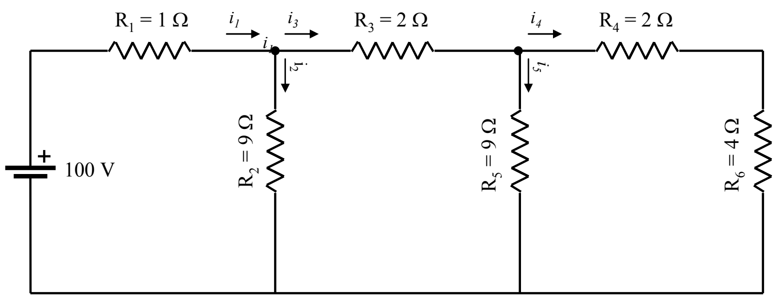
Se muestra el método operativo resultante del teorema demostrado, aplicado a un circuito eléctrico simple (figura 1), con una fuente de 100 V y un conjunto de 6 resistencias. Son 5 incógnitas (las 5 corrientes i_k) por lo que se necesitan otras tantas ecuaciones. Sólo como ejemplo acústico de los muchos posibles con impedancia acústica real, es el de un tubo abierto con un tapón de largo *t* de material absorbente (densidad ρ_o y resistencia al flujo por unidad de espesor Ξ), para frecuencias bajas[10].

[7] Como seguramente en las $y_z = y_z(i_w)$ aparecerán las I_s como términos independientes, deberán redefinirse las $y''_z = y_z + \Sigma I_s$ que correspondan continuar con transformaciones lineales.

[8] Por simplicidad de notación, se adopta desde aquí la "Convención de Einstein" por la cual, los índices mudos (repetidos) representan sumatoria respecto de ellos.

[9] Los $T_{wz}^{(-1)}$ son los elementos de la matriz $\underline{\underline{T}}^{-1}$, inversa de $\underline{\underline{T}}$, tal que $\underline{\underline{T}}^{-1}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$.

[10] Tal que sea $E = \rho_0 f / \Xi << 1$ y $\lambda << t$. Ver referencia 2, página 68.



Circuito resistivo del planteo original para ejemplo.

Posee cinco incógnitas: Las cinco corrientes de rama i_k.

Si bien puede plantearse directamente el tratamiento, se busca el planteo de un circuito con una fuente equivalente de corriente con su resistencia en paralelo.

La fuente de corriente tiene un valor $I = V/R_1$ y la resistencia en paralelo, un valor R_1.

Figura 1. Circuito eléctrico resistivo al que se aplica el método de cálculo

La resolución clásica requiere dos ecuaciones de nodos (Primera ley de Kirchhoff) y las tres de malla (Segunda ley de Kirchhoff). En el presente planteo, se requieren sólo las dos ecuaciones de nodos, interpretadas como las ecuaciones de ligadura y la condición de mínima de la potencia disipada.

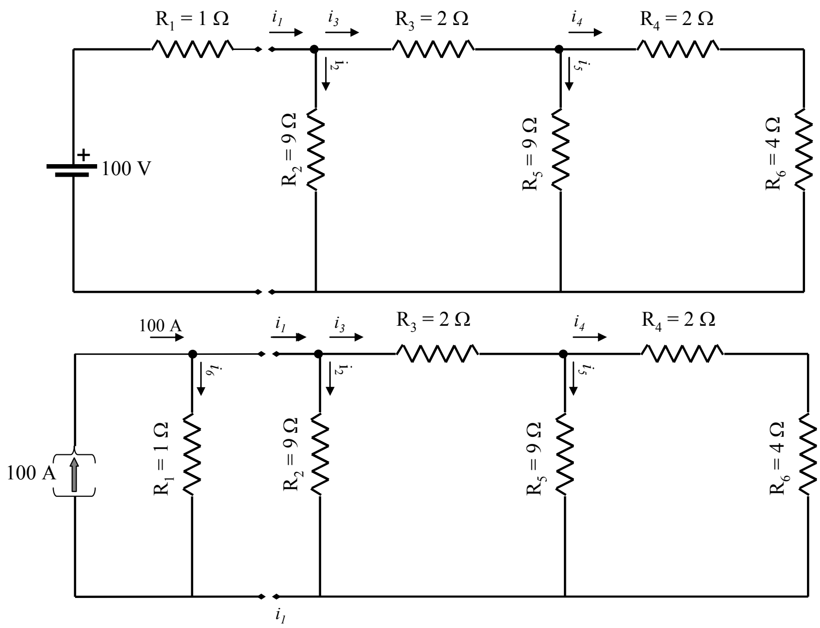


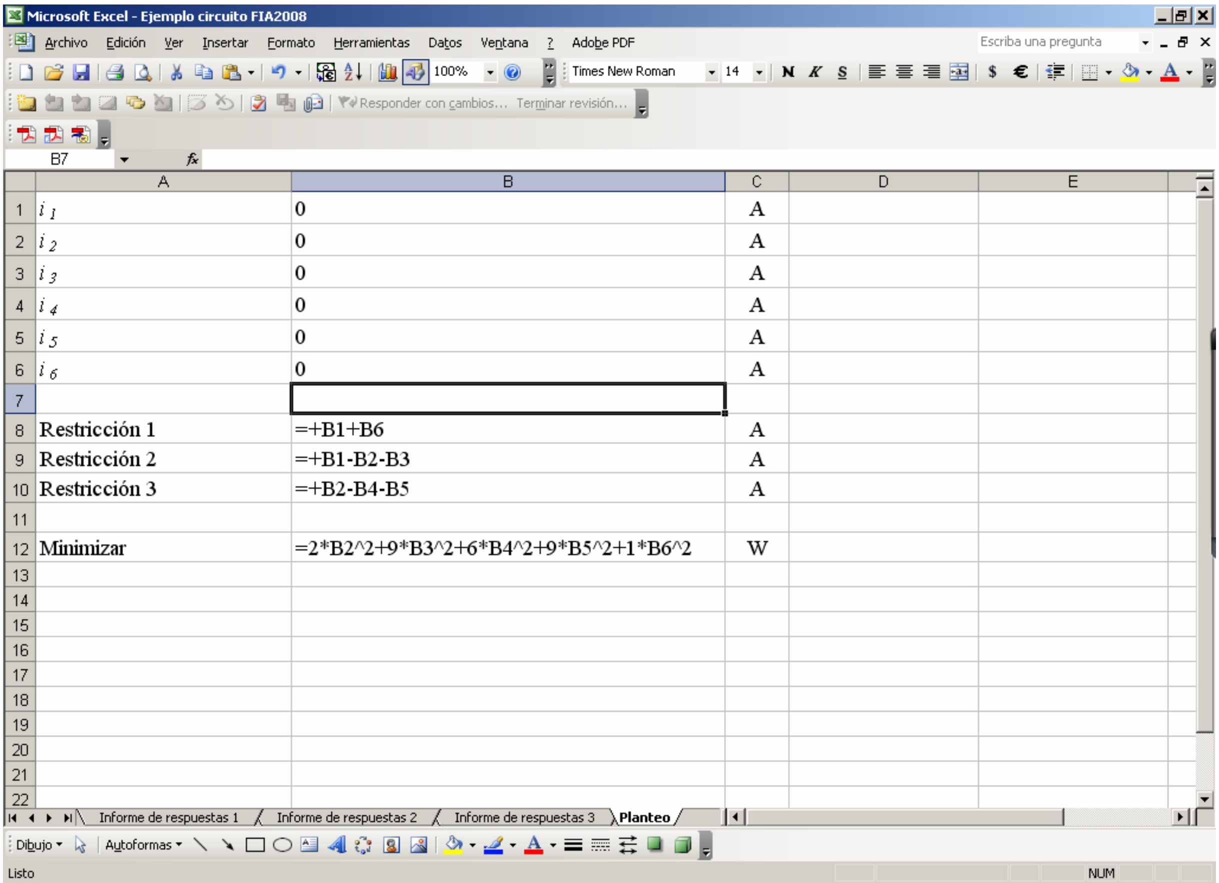
Figura 2. Fuente de tensión y de corriente equivalentes.

A fin de no imponer una condición inicial, se modifica el circuito de la figura 1, en otro con una fuente de corriente equivalente como se muestra en la figura 2, de acuerdo con el Teorema de Helmholtz (o Helmholtz-Norton).

Desde el punto de vista operativo, se trata de un problema de optimización de una expresión, sujeta a tres condiciones de restricción lineales (una por nodo). La expresión a minimizar contiene las cinco resistencias del circuito (R_4 y R_6 unificadas) y las cinco corrientes de rama marcadas, más la única fuente de corriente.

$$\sum_{k=1}^{5} R_k \times i_k^2 + R_1 \times I^2$$
$$\begin{cases} i_1 + i_6 = 100 \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_2 - i_4 - i_5 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Estos problemas se pueden resolver entre otras alternativas, mediante el uso de Matlab o una planilla de Excel, aplicando el recurso "Solver". En la figura 3 se muestra el planteo del ejemplo utilizando una planilla Excel, con los datos ingresados (dados mediante sus expresiones). La columna C sólo se incluye para indicar las unidades. En la figura 4, la ventana con la información necesaria para la solución del problema (minimización de la línea 12).



	A	B	C
1	i_1	0	A
2	i_2	0	A
3	i_3	0	A
4	i_4	0	A
5	i_5	0	A
6	i_6	0	A
7			
8	Restricción 1	=+B1+B6	A
9	Restricción 2	=+B1-B2-B3	A
10	Restricción 3	=+B2-B4-B5	A
11			
12	Minimizar	=2*B2^2+9*B3^2+6*B4^2+9*B5^2+1*B6^2	W

Figura 3. Presentación de los datos para resolución del problema en planilla Excel, para resolver con el recurso "Solver".

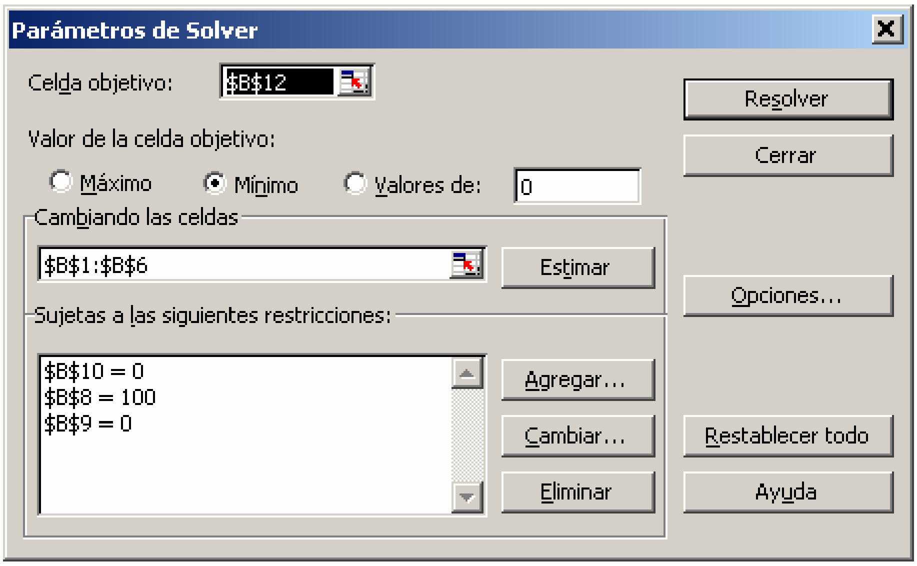


Figura 4. Ventana con los elementos necesarios para la resolución del problema mediante uso del recurso "Solver"

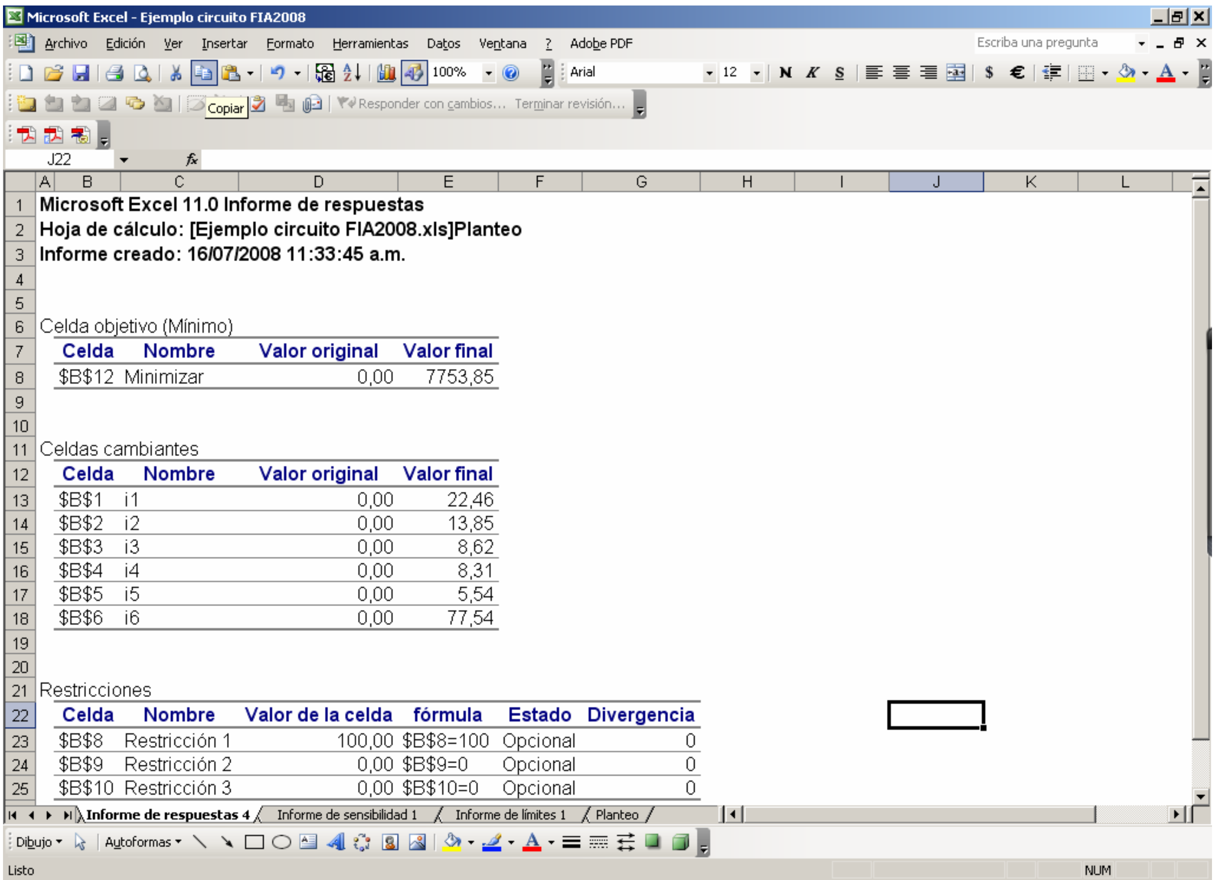


Figura 5. Presentación de los resultados obtenidos ("Informe de respuestas")

En la figura 5 se muestra la salida brindada por "Solver" ("Informe de respuestas") que corresponden a los datos de la figura 3. Los valores de corriente i_1 a i_5 son los de las ramas del circuito que carga a la fuente. El que corresponde a i_6, es el que genera los 77,54 V en los bornes de la fuente de tensión original.

Si se adoptaran otros valores consistentes con la Primera ley de Kirchhoff, la potencia disipada resultaría mayor que para los valores de corrientes reales obtenidas en el ejemplo, como se verificaría efectuando el cálculo respectivo.

6 Conclusiones

Los circuitos eléctricos, mecánicos y acústicos derivan de los mismos principios variacionales, de manera que la resolución de uno de ellos implica la resolución de sus homólogos.

Aplicando el Principio de Hamilton se demuestra mediante un teorema, que la mínima disipación de energía en un circuito, compatible con la Primera Ley de Kirchhoff, es equivalente al conjunto de ecuaciones de la Segunda Ley de Kirchhoff, lo que en conjunto representan la solución del problema.

Desde el punto de vista operativo, esta resolución consiste en la optimización de una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones, problema al que se adaptan programas y hojas de cálculo de uso común.

Esta presentación brinda una interpretación física de lo que representa que las variables tomen un determinado y único conjunto de valores.

Bibliografía

Las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la mecánica clásica pueden encontrarse en la bibliografía de esa rama de la física, pudiendo citarse por su difusión,

1. H.Goldstein (1996) “MECANICA CLASICA” Reverté, Barcelona, España. 793 páginas (Traducción de la 2ª edición en inglés de 1980).

El Principio de Hamilton aplicado a sistemas oscilantes, se cita en

2. F.P.Mechel-editor (2002), “FORMULAS OF ACOUSTICS” Springer, N.York, USA. 1175 páginas. Apartado B.11, “Hamilton’s Principle”.

El Principio de Hamilton aplicado a sistemas continuos, se cita en

3. T.D.Rossing-editor (2007) “SPRINGER HANDBOOK OF ACOUSTICS” Springer, N.York, USA. 1182 páginas. Apartado 3.4 “Variational Formulations”

El Principio de Hamilton y la ecuación de ondas, en

4. Colectivo (1992) “MODERN METHODS IN ANALYTICAL ACOUSTICS” Springer- Verlag, London, UK. 738 páginas. H.Heckl, “Mean Energy and Momentum Effects in Waves”, capítulo 9 de la obra.