



VI Congreso Iberoamericano de Acústica - FIA 2008
Buenos Aires, 5, 6 y 7 de noviembre de 2008

FIA2008-A018

Band-gap acústicos en tubos de sección modulada con periodicidades múltiples

Bernardo J. Gómez^(a,b),
Carlos E. Repetto^(a,b),
Carlos R. Stia^(a,b),
Reinaldo J. Welti^(b).

(a) Instituto de Física Rosario, CONICET. 27 de Febrero 210 bis, 2000 Rosario, Argentina.

(b) Laboratorio de Vibraciones y Ondas, Departamento de Física y Química de la Escuela de Formación Básica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario. Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina. E-mail: welti@fceia.unr.edu.ar

Abstract

In this work, by using a simple version of the impedance method, the acoustic band-gap of a one-dimensional and locally periodic system is studied. This system consists of a duct with modulated section. In the case of small modulation length values compared to the wavelength, it is found that the system reduces to a serial formation of Helmholtz oscillators. In this case, the classic phonon dispersion law corresponding to a monoatomic lattice is obtained. On the contrary, if the wavelength assumes values comparable to the length of the modulation, the typical band structure of semiconductors is obtained. Transmission coefficients are also calculated for a system with two or more repeated structures. It is shown that very selective bands are obtained at specific frequencies after a convenient choice of the periods of repetition.

Resumen

En este trabajo se estudia, utilizando una simple y efectiva versión del método de las impedancias, el *band gap* acústico de un sistema unidimensional localmente periódico constituido por un tubo de sección modulada. Si la longitud de la modulación es pequeña en relación a la longitud de onda, se encuentra que el sistema se comporta como una formación de osciladores Helmholtz conectados en serie y se obtiene la clásica relación de dispersión de fonones de una red monoatómica. Si, en cambio, la longitud de onda es comparable o mayor que la longitud de modulación, se encuentra la estructura de banda característica de los semiconductores. Se calculan también los coeficientes de transmisión de una estructura con dos o más períodos de repetición y se muestra que una elección adecuada de los mismos permite obtener bandas pasantes muy selectivas en rangos de frecuencia previamente seleccionados.

1 Introducción

En este trabajo se estudian teórica y experimentalmente los modos normales de vibración y el coeficiente de transmisión acústico de guías de ondas ensambladas periódicamente. En los últimos años se ha acrecentado el interés en el estudio de la propagación de ondas clásicas en un medio ordenado periódicamente. Uno de los objetivos de estas investigaciones ha sido el diseño y la construcción de materiales compuestos –denominados formaciones *band gap* fotónicos o acústicos– que permiten controlar los coeficientes de transmisión de las ondas propagantes. Numerosas aplicaciones se han desarrollado inicialmente para el caso electromagnético [1-4] y, posteriormente, para el caso de ondas acústicas [5-7].

El efecto *band gap* acústico se produce básicamente en un sistema perfectamente periódico en el que se alternan dos materiales con impedancias acústicas significativamente diferentes. La superposición coherente de las ondas dispersadas en los puntos donde la impedancia varía abruptamente lleva a intervalos de frecuencia en los cuales el sonido no se propaga. Este fenómeno se conoce como *band gap* acústico o sónico. Algunas de las aplicaciones de los sistemas que presentan estas propiedades necesitan de la construcción de materiales compuestos con bandas de transmisión prohibidas en las tres dimensiones espaciales. En la práctica, estos materiales son difíciles de construir. Por este motivo, no es de extrañar que la mayoría de los trabajos publicados hasta el presente se hayan focalizado en sistemas periódicos en una y dos dimensiones.

En este trabajo se estudia el caso de una guía de onda periódica unidimensional. Este sistema ha recibido últimamente una considerable atención tanto desde el punto de vista teórico como experimental [8-10]. En particular, se presenta aquí un procedimiento simple que permite calcular el coeficiente de transmisión acústico de la estructura y también las autofrecuencias del sistema cuando éste está cerrado en sus dos extremos. Este procedimiento se basa en el cálculo de la función impedancia a lo largo de la guía de onda periódica y de una adecuada selección de las condiciones de contorno en los extremos del sistema. Además, se establecerá la conexión entre el espectro de frecuencias de los modos normales del sistema finito con el coeficiente de transmisión cuando éste se inserta en un ducto de dimensión infinita en la que se propaga una onda.

2 Teoría

El sistema que se estudia en este trabajo consiste de un tubo de sección circular cuyo diámetro está modulado periódicamente, como se muestra en la figura 1. Se analizarán, por un lado, los modos normales de vibración de esta estructura cuando está cerrada en ambos extremos (figura 1a), y por otro lado, el coeficiente de transmisión de la misma, para ondas propagantes, cuando el sistema está abierto en ambos extremos (figura 1b). En este último caso la estructura se comporta como un filtro acústico.

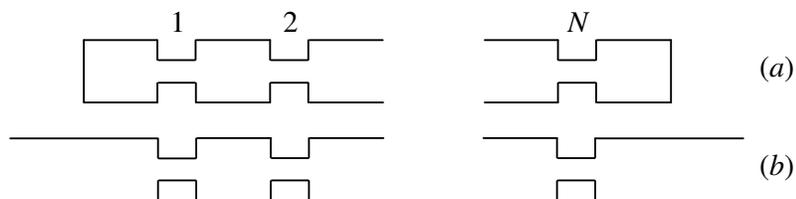


Figura 1. Sistema con N contracciones: (a) con extremos cerrados para estudiar modos normales y (b) abierto en los extremos, actuando como filtro.

2.1 Tubo con una única contracción en su diámetro

Antes de analizar un sistema con un número N cualquiera de contracciones, se considera un sistema más simple formado por dos tubos (que se llamarán “cámaras” en lo que sigue), de radio a , y longitud L , conectados por un tubo (denominado “ducto” de ahora en más) de pequeña longitud l y radio b ($b < a$), como se muestra en la figura 2. Las cámaras están cerradas en su otro extremo. La solución analítica de este problema requiere resolver la ecuación de ondas en cada una de las secciones y empalmarlas con las condiciones de contorno adecuadas [11]: la continuidad de la presión y del flujo de volumen en los puntos de cambio abrupto de sección.

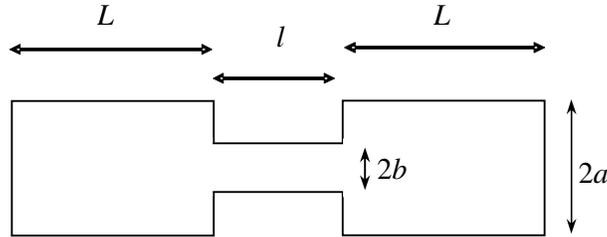


Figura 2. Dos cámaras unidas por un ducto.

Si la longitud del ducto es muy pequeña (comparada con L y con la longitud de onda), la solución analítica es relativamente simple [12]. Se encuentra que las frecuencias de los modos normales son las soluciones de las ecuaciones:

$$\text{sen } kL = 0 \quad (1)$$

y

$$\cot kL = \frac{\beta kL}{2}, \quad (2)$$

donde $k = 2\pi f / c$ es el número de onda y β es un parámetro adimensional que viene dado por:

$$\beta = \frac{S_b l}{S_a L}, \quad (3)$$

donde $S_b = \pi b^2$ y $S_a = \pi a^2$ son, respectivamente, las secciones del ducto y de la cámara [12]. Las soluciones de la ecuación (1) son los autovalores

$$k_n L = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

que coinciden con los autovalores de un tubo de longitud L cerrado en ambos extremos.

Si $\text{sen } kL \neq 0$, la ecuación que determina los autovalores viene dada por (2). Las soluciones k'_m , con $m = 0, 1, 2, \dots$, pueden obtenerse a partir de esta ecuación, en forma numérica o gráfica. Se utiliza esta notación para diferenciarlo del que se obtiene a partir de la ecuación (4).

En la Tabla 1 se muestran los autovalores y las correspondientes autofrecuencias para un sistema como el que se muestra en la figura 2 con las siguientes dimensiones: $a = 0,05$ m, $b = 0,02$ m, $L_a = 0,084$ m, $L_b = 0,01$ m. Se supone también que $\rho = 1,23$ Kg/m³ y $c = 340$ m/s.

Tabla 1. Autovalores y autofrecuencias de un sistema similar al que se muestra en la figura 2.

$k_0 L$	0,99	f_0'	672 Hz
$k_1 L$	π	f_1'	1996 Hz
$k_1 L$	3,54	f_1'	2314 Hz
$k_2 L$	2π	f_2'	3986 Hz
$k_2 L$	6,51	f_2'	4203 Hz

2.2 Tubo con N contracciones en su diámetro

Hay muchas técnicas para calcular los modos de oscilación de una estructura periódica finita y el coeficiente de transmisión cuando dicha estructura se intercala en un tubo en el que se tienen ondas propagantes. En este trabajo se va a utilizar un procedimiento al que se lo denominará *método de las impedancias*. Como este método no se basa en el cálculo de las ondas de Bloch [8], puede aplicarse también para estudiar sistemas aleatorios o aperiódicos. Se mostrará como funciona el método aplicándolo al sistema simple estudiado en la sección anterior.

En la figura 3, $Z_a = \rho c / S_a$ y $Z_b = \rho c / S_b$, son las impedancias acústicas de los tubos de radios a y b , con S_a y S_b sus respectivas secciones, mientras que ρ y c son la densidad del aire y la velocidad del sonido.

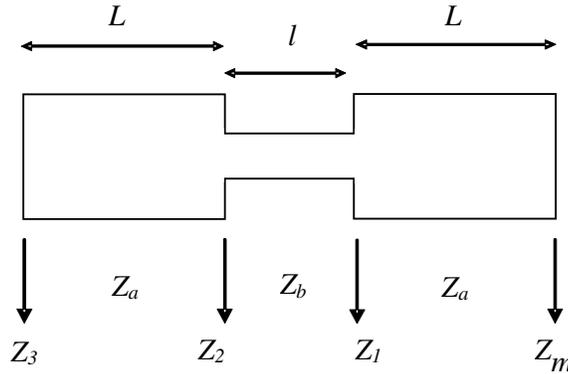


Figura 3. Impedancias del sistema con una única contracción.

Si Z_m es la impedancia en el extremo derecho del sistema, entonces la función impedancia en el extremo izquierdo de la primera cámara de radio a viene dada por [11]:

$$Z_1 = Z_a \frac{Z_m + iZ_a \tan kL}{Z_a + iZ_m \tan kL}. \quad (7)$$

Si el extremo derecho está cerrado, entonces, $Z_m = \infty$, por lo tanto:

$$Z_1 = -iZ_a \cot kL. \quad (8)$$

Esta impedancia, en el extremo derecho del tubo del medio, se transforma en su extremo izquierdo en la impedancia Z_2 que viene dada por:

$$Z_2 = Z_b \frac{Z_1 + iZ_b \tan kl}{Z_b + iZ_1 \tan kl}. \quad (9)$$

Para el caso $kl \ll 1$ y $Z_b \gg Z_a$, podemos aproximar a Z_2 por la expresión

$$Z_2 = Z_1 + iZ_b kl. \quad (10)$$

Finalmente, la impedancia Z_3 en el extremo izquierdo del sistema, viene dado por:

$$Z_3 = Z_a \frac{Z_2 + iZ_a \tan kL}{Z_a + iZ_2 \tan kL}. \quad (11)$$

Como este extremo está cerrado, las frecuencias propias o autofrecuencias del sistema son aquellas para las cuales $Z_3 = \infty$ o, en general, si el sistema tiene pérdidas (en cuyo caso k tiene una pequeña componente imaginaria), cuando el módulo $|Z_3|$ tiene un máximo. El análisis de la ecuaciones (9), (10) y (11) confirma que Z_3 es muy grande (infinito si no hay pérdidas) si se cumplen las ecuaciones:

$$\text{sen } kL = 0 \quad (12)$$

y

$$\cot kL = \frac{Z_b}{2Z_a} kl. \quad (13)$$

Estas ecuaciones, que determinan los autovalores del sistema, son idénticas a las ecuaciones (1) y (2) que se han obtenido resolviendo la ecuación de ondas.

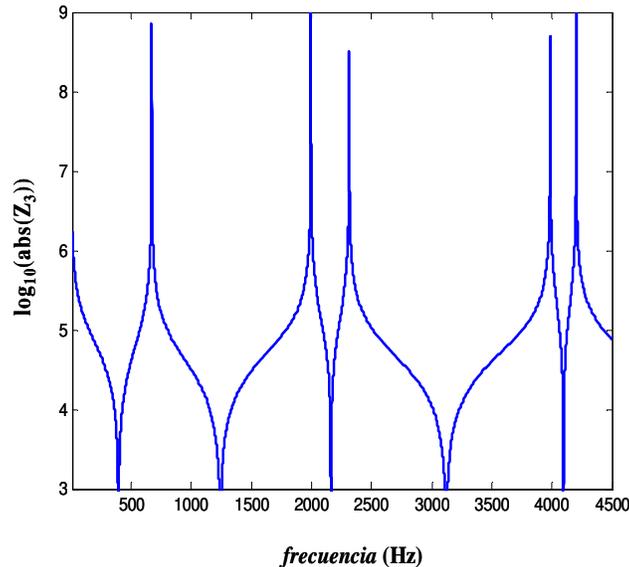


Figura 4. Impedancia (en unidades arbitrarias) de un sistema como el de figura 3 en función de la frecuencia. Para este cálculo se utilizaron:

$$a = 0,05\text{m}, b = 0,02\text{m}, L_a = 0,084\text{m}, L_b = 0,015\text{m}, \rho = 1,23\text{kg/m}^3, c = 340\text{m/s}$$

Si el tubo tiene muchas contracciones, no resulta fácil determinar analíticamente las frecuencias para las cuales la impedancia sobre la superficie de la izquierda que cierra el sistema es infinita o muy grande. En estos casos es más conveniente graficar esta impedancia en función de la frecuencia. Las frecuencias para las cuales esta gráfica tiene un máximo son las autofrecuencias del sistema.

En la figura 4 se muestra una gráfica de $\log_{10}|Z_3|$ en función de la frecuencia para un sistema como el que se muestra en la figura 3, que tiene las mismas dimensiones que el que se utilizó para calcular los autovalores y autofrecuencias de la Tabla 1. Observemos que los máximos de la impedancia del extremo izquierdo del sistema se producen en las autofrecuencias que se calculan teóricamente y que se muestran en la Tabla 1.

Este método puede extenderse para calcular las frecuencias naturales de vibración de un tubo cerrado con un número N arbitrario de contracciones en su sección como se muestra en la figura 5.

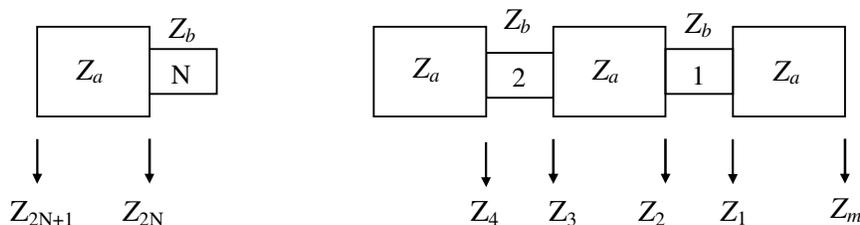


Figura 5. Extensión del método anterior a N contracciones.

En particular, en la figura 6, se muestran las “curvas de resonancia” de un sistema compuesto por 3, 4, 5 y 6 contracciones, en orden descendente. Se observa que las autofrecuencias del sistema se distribuyen en grupos que están separados por intervalos de frecuencia relativamente grandes (son las llamadas bandas prohibidas). El grupo de modos que tienen las frecuencias más bajas coincide con el número N de contracciones, mientras que los modos de frecuencias superiores se agrupan en conjuntos de $N+1$ modos. El grupo de más baja frecuencia se encuentra en el entorno de 200 a 1000Hz; el segundo grupo de modos se encuentra en el intervalo que va de 2000 a 2500 Hz, mientras que el tercer grupo se encuentra en el intervalo que va de 3900 a 4300 Hz. El intervalo de frecuencias que va de 1000 a 2000 Hz donde no se encuentra ningún modo es una de las “bandas prohibidas” de este sistema.

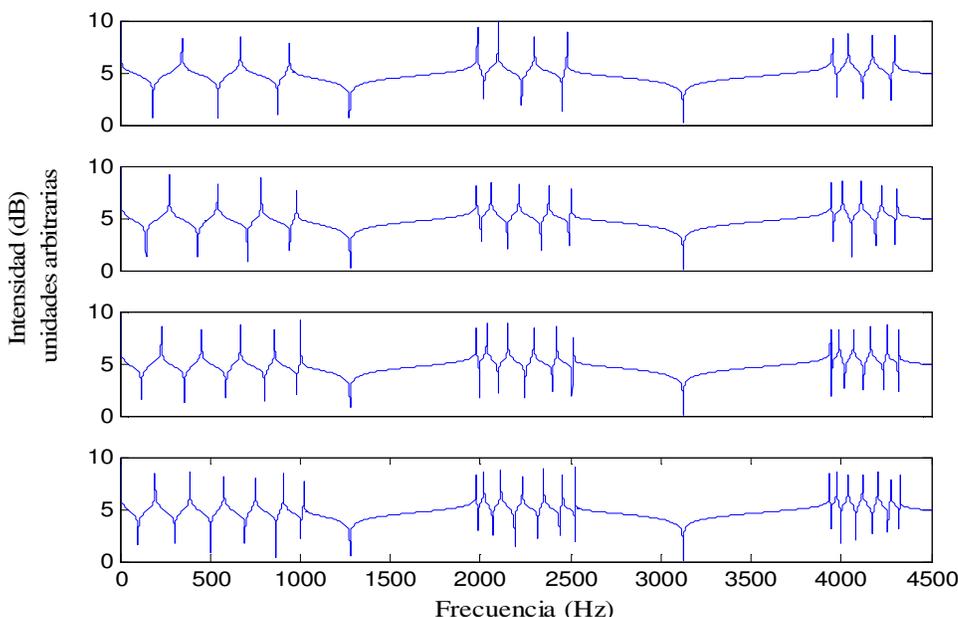


Figura 6. Gráficas de las intensidades (en unidades arbitrarias) en función de la frecuencia para sistemas con 3, 4, 5 y 6 contracciones.

2.3 El coeficiente de transmisión

En esta sección se calculará el coeficiente de transmisión cuando al dispositivo de la figura 3 se le retiran las tapas de sus extremos y se lo inserta en el interior de un tubo de longitud infinita de radio a e impedancia Z_a , como se muestra en la figura 7. A este dispositivo, en lo que sigue, se lo llamará *filtro*.

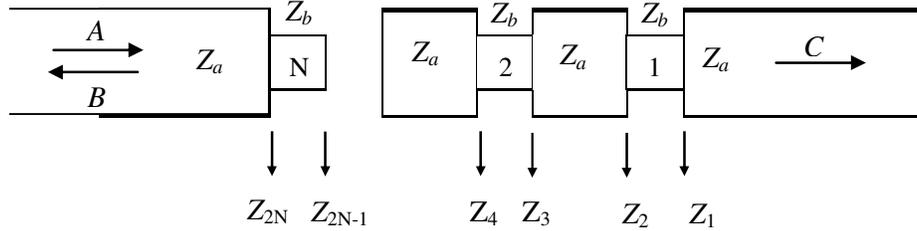


Figura 7. Esquema que ilustra la disposición de las N contracciones para ser utilizada como filtro. A , B y C representan las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente.

La onda de amplitud A que se propaga de izquierda a derecha en el tubo de impedancia Z_a , se encuentra con la impedancia equivalente Z_{2N} , de toda la estructura que se encuentra a la derecha, y se refleja con una amplitud B . La onda que se propaga en el interior del tubo de la derecha, de impedancia Z_a tiene una amplitud C . Para calcular la impedancia Z_{2N} se procede como en las secciones 2.1 y 2.2:

$$Z_1 = Z_a, \quad Z_2 = Z_b \frac{Z_1 + iZ_b \tan kl}{Z_b + iZ_1 \tan kl}, \quad Z_3 = Z_a \frac{Z_2 + iZ_a \tan kL}{Z_a + iZ_2 \tan kL}, \quad (14)$$

y continuando de esta manera, se obtiene:

$$Z_{2N} = Z_b \frac{Z_{2N-1} + iZ_b \tan kl}{Z_b + iZ_{2N-1} \tan kl}. \quad (15)$$

Si I_i , I_r e I_t son las intensidades de las ondas incidente, reflejada y transmitida, se puede mostrar que:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{Z_a - Z_{2N}}{Z_a + Z_{2N}} \right)^2, \quad T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_a Z_{2N}}{Z_a + Z_{2N}} = 1 - R, \quad (16)$$

donde R y T son los coeficientes de reflexión y transmisión, respectivamente.

En la figura 8 se muestra el coeficiente de transmisión T (figura 8, panel inferior) para un sistema que tiene seis contracciones. Se observa que el filtro tiene bandas de frecuencia donde la transmisión es prácticamente nula. Esta banda de frecuencias es la banda prohibida del filtro cuando está tapada en ambos extremos (parte superior de la figura). El filtro solamente transmite en las frecuencias que coinciden con sus autofrecuencias. Este fenómeno es conocido como transmisión resonante.

Históricamente, la transmisión resonante fue encontrada en la dispersión de electrones por átomos de gases nobles y es conocido como el *efecto Ramsauer* [13]. Si en una doble barrera unidimensional los estados ligados cuasiestacionarios son E_1 , E_2 , etc., entonces cuando la energía de los electrones incidentes coincide con una de estas energías, los electrones pasan a través de las barreras sin ninguna atenuación.

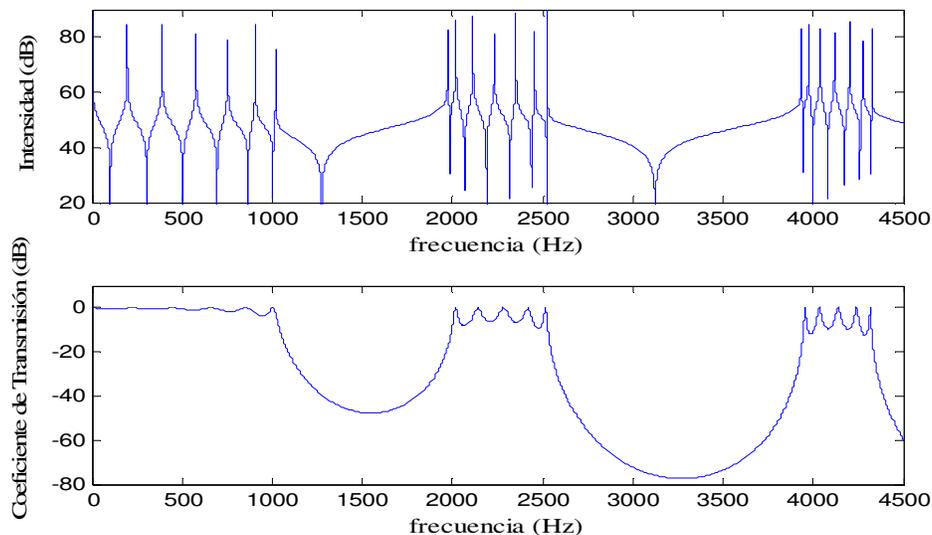


Figura 8. Sistema compuesto por 6 contracciones. (Arriba): intensidad en función de la frecuencia, para determinar las frecuencias propias. (Abajo): coeficiente de transmisión para el sistema utilizado como filtro.

Este efecto es bastante sorprendente debido a que el coeficiente de transmisión para dos barreras viene dado usualmente por el producto de los dos coeficientes de transmisión, uno para cada barrera, con lo que se obtendría un valor total del coeficiente de transmisión muy pequeño. La situación, sin embargo, es análoga al que se produce en el filtro de interferencia tipo Fabry-Perot, en Óptica. Para ciertas longitudes de onda, las ondas reflejadas en las discontinuidades del interior del sistema interfieren destructivamente entre sí, de modo que sólo permanece la onda transmitida.

3 Resultados experimentales

En esta sección se presentan los dispositivos experimentales utilizados tanto para la obtención de los modos acústicos de un sistema equivalente a los estudiados precedentemente, como para el caso cuando este sistema es utilizado como filtro de ondas propagantes.

Para el estudio práctico, se construyó un sistema de cámaras análogo al que se muestra en las figuras 5 y 7. Cada una de las cámaras se construyó con tubos de PVC de longitud $L_a = 0,084\text{ m}$, de diámetro interno $2a = 0,1\text{ m}$ y con una pared de 1 cm, mientras que los ductos fueron hechos de longitud $L_b = 0,01\text{ m}$ y de diámetro interno $2b = 0,04\text{ m}$. Los sistemas (cámara más ductos) se construyeron de manera de permitir un rápido acoplamiento entre los mismos. El micrófono (Horn, 252-EM4530-44) y el parlante (Kobitone, 253-5151) se colocaron en el interior del sistema. Las mediciones se realizaron para distintas posiciones del micrófono y del parlante excitador, debido a que la amplitud de la onda de presión medida depende de las posiciones del parlante y el micrófono. Se eligieron las posiciones de ambos para obtener las máximas respuestas para todos los modos excitados.

Para el caso de ondas propagantes, al sistema de cámaras se les acopló en cada extremo caños de PVC del mismo diámetro y de 1,5 m de largo, colocando en uno de los extremos el parlante y en el otro un cono de pendiente suave construido con lana de acero, de manera de lograr la absorción total de la onda incidente.

Ambas configuraciones, tanto para las ondas estacionarias como para las propagantes, fueron excitadas mediante una señal de ruido blanco generada desde una PC. El sistema de

detección constó de un micrófono de alta sensibilidad conectado a un grabador digital Mini-Disc Sony modelo MZ-R30.

Luego, la señal sonora registrada fue procesada mediante un algoritmo programado en el entorno de Octave con el que básicamente se realiza la transformada de Fourier de la señal. En el estudio se tuvo en cuenta que el sistema parlante–micrófono tiene un espectro en frecuencia donde se realizan algunos intervalos de frecuencia respecto de otros.

En la figura 9 se muestran los resultados obtenidos para 3, 4, 5 y 6 contracciones. Pueden verse claramente los *gaps* de frecuencias prohibidas. Es posible observar también la estructura de picos tal como se describió en la sección 2.2 y se muestra en la figura 6.

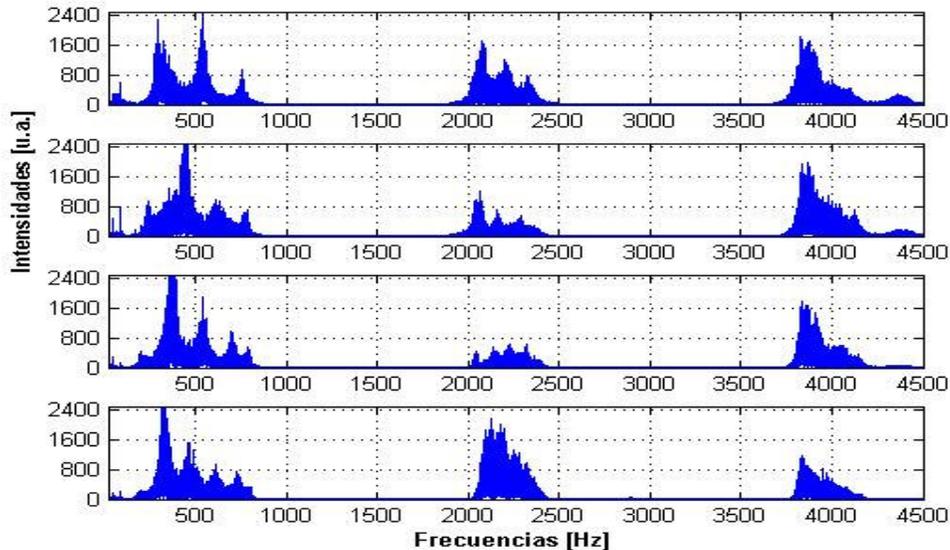


Figura 9. Gráficas de las intensidades (en unidades arbitrarias) en función de la frecuencia para sistemas con 3, 4, 5 y 6 contracciones.

En la figura 10, se observa la respuesta del sistema para ondas propagantes análogo al de la figura 7 de la sección 2.3, mostrando el comportamiento del sistema actuando como filtro para determinadas frecuencias.

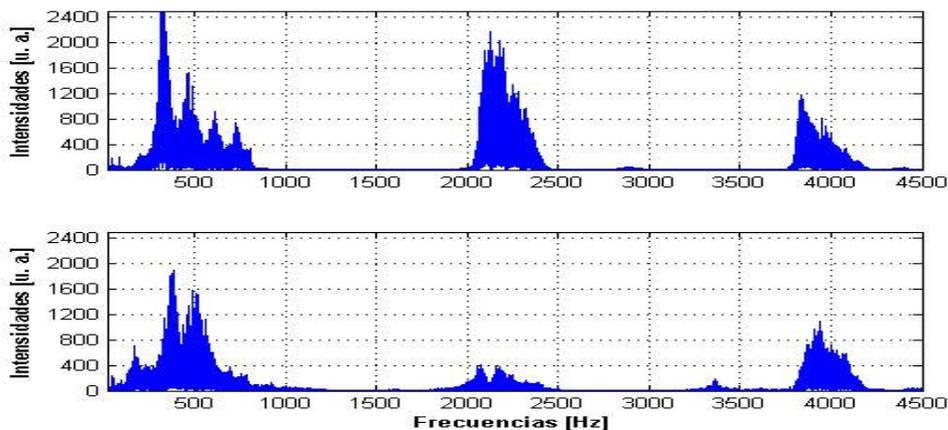


Figura 10. Sistema compuesto por 6 contracciones. (Arriba): intensidad en función de la frecuencia, para determinar las frecuencias propias. (Abajo): coeficiente de transmisión para el sistema utilizado como filtro.

4 Conclusiones

En este trabajo se estudian teórica y experimentalmente los modos normales de vibración y el coeficiente de transmisión acústico de guías de ondas ensambladas periódicamente. El rasgo característico que presentan los sistemas totalmente periódicos es la estructura de bandas: el medio es transparente en algunos rangos de frecuencias y opaco en otros. En este trabajo se muestra que aún con un número finito N de repetición (medio localmente periódico), el sistema exhibe evidencia de una estructura de bandas, con intervalos de relativamente alta y baja transmisión. En la figura 6 se muestra que este comportamiento se hace presente incluso para $N = 3$, sobre todo en lo que se refiere a la existencia de una banda prohibida de transmisión. Tanto desde el punto de vista teórico como del experimental, se encuentra que la primera banda de transmisión prohibida se extiende desde aproximadamente 1000 Hz hasta 2000 Hz, para todos los valores de N mayores que 2. Es interesante notar también la correspondencia entre la distribución de los modos normales y la variación del coeficiente de transmisión con la frecuencia, en analogía a la transmisión resonante en la dispersión de electrones conocido como el *efecto Ramsauer*. Los resultados aquí presentados muestran también que una guía de onda modulada periódicamente en su diámetro es uno de los sistemas más simples que permiten profundizar tanto teórica como experimentalmente en el conocimiento de los *band gap* acústicos.

Referencias

1. Cregan, R. F.; Mangan, B. J.; Knight, J. C.; Birks, T. A.; Russell, P. S.; Roberts, P. J.; Allan, D. C. (1999). "Single-mode photonic band gap guidance of light in air". *Science* **285**, 1537–1539.
2. Chen, J. C.; Haus, H. A.; Fan, S.; Villeneuve, P. R.; Joannopoulos, J. D. (1996). "Optical filters from photonic band gap air bridges". *J. Lightwave Technol.* **14**, 2575–2580.
3. Lin, S. Y.; Chow, E.; Hietala, V.; Villeneuve, P. R.; Joannopoulos, J. D. (1998). "Experimental demonstration of guiding and bending of electromagnetic waves in a photonic crystal". *Science* **282**, 274–276.
4. Yablonovitch, E. (1987). "Inhibited spontaneous emission in solid state physics and electronics". *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059–2062.
5. Kushwaha, M. S.; Halevi, P.; Dobrzynski, L.; Djafari-Rouhani, B. (1993). "Acoustic band structure of periodic elastic composites". *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2022–2025.
6. Ye, Z.; Hoskinson, E. (2000). "Band gaps and localization in acoustic propagation in water with air cylinders". *Appl. Phys. Lett.* **77**, 4428–4430.
7. Diez, A.; Kakarantzas, G.; Birks, T. A.; Russell, P. St. J. (2000). "Photonic stop bands in optical fibre periodic microstructures". *Appl. Phys. Lett.* **76**, 3481–3483.
8. Bradley, C. E. (1994). "Time harmonic acoustic Bloch wave propagation in periodic waveguides. I. Theory". *J. Acoust. Soc. Am.* **96**, 1844–1853.
9. Bradley, C. E. (1994). "Time harmonic acoustic Bloch wave propagation in periodic waveguides. II. Experiment". *J. Acoust. Soc. Am.* **96**, 1854–1862.
10. Langley, R. S. (1996). "The frequency band-averaged wave transmission coefficient of a periodic structure". *J. Acoust. Soc. Am.* **100**, 304–311.
11. Kinsler, L. E.; Frey, A. R.; Coppens, A. B.; Sanders, J. V. (1982). "Fundamentals of Acoustics". John Wiley & Sons, Inc (NY).
12. Gómez, B.J.; Repetto, C.E.; Stia, C.R.; Welti, R. (2008). "Efectos de la inserción de elementos de parámetros concentrados sobre los modos normales de oscilación de un medio finito continuo". *Revista Brasileira de Ensino de Física*, en prensa.
13. Mott, N. F. and Massey, H. S. W. (1965). "The Theory of Atomic Collisions". Oxford University Press, London.