



VI Congreso Iberoamericano de Acústica - FIA 2008
Buenos Aires, 5, 6 y 7 de noviembre de 2008

FIA2008- A059

Método de elementos de contorno aplicado a radiação acústica

Emerson de Sousa Costa^(a),
Ester Naves Machado Borges^(b),
Márcio Matias Afonso^(b).

(a) Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG, Brasil. E-mail: emersondesousa@yahoo.com.br

(b) Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Brasil. E-mail: ester@des.cefetmg.br, marciomatias@des.cefetmg.br

Abstract

The computer simulation of highly complex problems is of paramount importance to the development of complex mathematical models. Some of these problems are related to the radiation sources of acoustic noise, whose modeling is of fundamental importance to understand the propagation of acoustic waves and, consequently, develop mechanisms for reducing noise acoustic. The propagation of acoustic waves involves different phenomena such as radiation, absorption, transmission and reflection. The formulation of analytical linear equation of the sound wave is produced by the equation of the quantity of Conservation Movement, equation of state and continuity. From these equations, is the cornerstone of Helmholtz equation that describes the problem of radiation acoustics. That work is obtained the solution of differential equation for a cylinder of Helmholtz infinite beating in a way free and homogeneous. The analytical solution is implemented and results are compared with those of literature. The numerical formulation to this problem is obtained using the Boundary Element Method (BEM). It has great power to solve problems of infinite field, for differential methods, reducing the size of the problem, thus simplifying the input data to be worked and thus reducing the computational time used.

Resumo

A simulação computacional de problemas altamente complexos é de suma importância para o desenvolvimento de modelos matemáticos complexos. Alguns desses problemas estão relacionados com a radiação acústica de fontes sonora, cuja modelagem é de fundamental importância para compreender a propagação das ondas acústicas e, conseqüentemente, desenvolver mecanismos para redução de ruídos acústicos. A propagação de ondas acústicas envolve fenômenos diferentes como radiação, absorção, transmissão e reflexão. A formulação analítica da Equação linear da onda acústica é obtida através da equação de Conservação da Quantidade de Movimento, equação de Estado e de Continuidade. A partir dessas equações, encontra-se a equação diferencial de Helmholtz que descreve o problema da radiação acústica. Nesse trabalho é obtida a solução da equação diferencial de Helmholtz para um cilindro infinito pulsante em um meio livre e homogêneo. A solução analítica é implementada e os resultados obtidos são comparados com os da literatura. A formulação numérica para este problema é obtida usando o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Este método apresenta grande poder para solução de problemas de domínio infinito, em relação aos métodos diferenciais, reduzindo a dimensão do problema, simplificando assim os dados de entrada a serem trabalhados e conseqüentemente reduzindo o tempo computacional utilizado.

1 Introdução

A geração de ruído é um fato inerente a diversas atividades humanas, sejam elas produtivas, de transporte ou de lazer. Durante anos, conviver com o ruído, ou “barulho” foi um fato comum para a população de grandes centros urbanos.

A propagação sonora ao ar livre é normalmente estudada em termos de três componentes: a fonte sonora, a trajetória de transmissão e o receptor. Primeiramente, a fonte emite uma certa potência sonora, gerando um nível sonoro que pode ser medido nas proximidades da fonte. A partir daí, o nível sonoro é atenuado à medida que o som se propaga, entre a fonte e o receptor, ao longo de determinada trajetória.

A modelagem da radiação acústica é de fundamental importância para se compreender a propagação das ondas acústicas e, conseqüentemente, desenvolver mecanismos para atenuação de ruídos acústicos. Para estimativas de níveis de pressão sonora, é preciso conhecer os níveis de potência sonora das fontes em questão. É este o caso, por exemplo, quando se deseja determinar o nível de pressão sonora gerado pelo maquinário de um ambiente industrial e o nível de pressão sonora devido ao tráfego de uma rodovia, entre outros.

A distribuição de pressão em fluido sujeita a uma fonte de vibração é dada pela equação de Helmholtz. A dedução desta equação começa pelas equações que governam os fluidos, considerando algumas restrições.

Neste trabalho é apresentada a solução analítica da equação de onda para um cilindro infinito que está vibrando (expandindo e contraindo) uniformemente na direção radial com amplitude constante. Essa solução encontrada é então comparada com a literatura. Uma formulação numérica para este problema também é apresentada, através da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno.

O Método dos Elementos de Contorno é uma ferramenta poderosa na solução de problemas de valores de contorno. Sua utilização se torna necessária quando os problemas analisados alcançam um nível de complexidade que dificulta a obtenção da solução analítica.

Atualmente, o Método dos Elementos de Contorno é um dos métodos mais avançados e utilizados especialmente quando se trata de problemas considerando meios infinitos e semi-infinitos. Uma das grandes vantagens desse método é que ele permite a redução da dimensão do problema, reduzindo o número de equações utilizadas, permitindo a solução apenas no contorno, sem necessidade de se analisar todo o seu domínio.

2 Equação Governante

Para encontrar a equação que governa o fenômeno da radiação acústica, são utilizadas as equações de estado, de continuidade e de movimento. Para meios fluidos, a equação de estado relaciona grandezas físicas que descrevem o comportamento termodinâmico do fluido

$$P - P_0 = \beta \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \quad (1)$$

onde P é a pressão instantânea em um ponto, P_0 é a pressão de equilíbrio no fluido, β é o módulo adiabático (coeficiente de expansão térmica do fluido), ρ é a densidade instantânea em um ponto e ρ_0 é a densidade de equilíbrio do fluido.

Em termos da pressão acústica p e da condensação s , a Equação (1) pode ser expressa como

$$p \approx \beta s \quad (2)$$

onde $p = P - P_0$ é a pressão acústica e $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ é condensação em um ponto.

A restrição essencial é que a condensação s deve ser muito pequena, $|s| \ll 1$, Kinsler et al., (1982).

Para relacionar o movimento do fluido com sua compressão ou expansão, precisamos de uma função que relacione a velocidade \vec{u} da partícula do fluido com sua densidade instantânea ρ .

Considera-se um elemento infinitesimal de volume de fluido, fixo no espaço. A equação de continuidade relaciona a taxa de crescimento de massa nesse elemento de volume com o fluxo de massa através da superfície fechada que envolve esse volume. Uma vez que o fluxo deve ser igual à taxa de crescimento, obtem-se a equação de continuidade.

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3)$$

A equação de movimento relaciona a pressão acústica p com a velocidade \vec{u} instantânea de partícula, para um fluido adiabático e não viscoso, isto é, os efeitos da viscosidade¹ do fluido são desprezados. Dessa maneira encontra-se a equação de Euler (equação de força) para fenômenos acústicos de pequena amplitude.

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad (4)$$

A partir das equações acima, obtem-se a equação de onda linearizada, expressa em termos do potencial de velocidade de onda acústica:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (5)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano, $\vec{u} = \nabla \phi$ é a velocidade da partícula expressa como o gradiente de uma função escalar ϕ , denominada potencial de velocidade e $c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$ é a velocidade de propagação da onda acústica no meio.

A partir da equação de onda linearizada, encontra-se a Equação de Helmholtz independente do tempo para um meio sem perdas, expressa em termos de potencial de velocidade de onda acústica:

¹ Grau de adesão entre as moléculas de fluido.

$$\nabla^2 \phi_f(\vec{r}) + k^2 \phi_f(\vec{r}) = 0 \quad (6)$$

onde ϕ_f representa a parte espacial do potencial de velocidade, ω representa a frequência angular da vibração e $k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ é denominado número de onda.

3 Solução Analítica

Utilizando-se o método de separação de variáveis, obtém-se a parte espacial da solução da Equação de Helmholtz, dada pela Equação (6):

$$\phi(r, \psi, z) = -\frac{V_0}{k} \frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(ka)}, \quad r \geq a \quad (7)$$

onde $H_0^{(2)}(u)$ e $H_1^{(2)}(u)$ são as funções de Hankel do 2ª espécie e ordem 0 e 1, respectivamente, também conhecidas como funções de Bessel do 3ª espécie, k é o número de onda, a é o raio do cilindro, r é a direção radial do potencial de velocidade.

A solução, dada pela Equação (7) é aplicada para o caso especial de radiação uniforme, isto é, a superfície do cilindro está vibrando uniformemente na direção radial com uma amplitude de V_0 metros por segundo, numa frequência de f hertz. Este caso é também conhecido como modo monopolo de vibração, Ziomec (1995).

4 Resultados e Comparações

A solução analítica da equação diferencial de Helmholtz foi implementada no software MatLab e os resultados obtidos foram comparados com os obtidos por Papini (1999), mostrados na Tabela 1 e exibidos na Figura 1. Na análise dos dados, foram calculados o absoluto, e e o erro relativo, e_r , definidos da maneira que se segue

$$e = val1 - val \quad (8)$$

e

$$e_r = \frac{e}{val1} \quad (9)$$

onde e é o erro absoluto, $val1$ é o valor obtido por Papini (1999), val é o valor obtido neste trabalho e e_r é o erro relativo ao resultado obtido por Papini (1999).

Tabela 1. Comparação de resultados analíticos

Frequência (Hz)	Analítica Papini	Analítica (Implementada)	Erro absoluto	Erro relativo
62,5	0,770946776	0,770946769	-7,000000E-09	-9,079745E-09
125	0,419396006	0,419396013	7,000000E-09	1,669067E-08
250	0,215903228	0,215903243	1,500000E-08	6,947557E-08
500	0,108860012	0,108860013	1,000000E-09	9,186110E-09

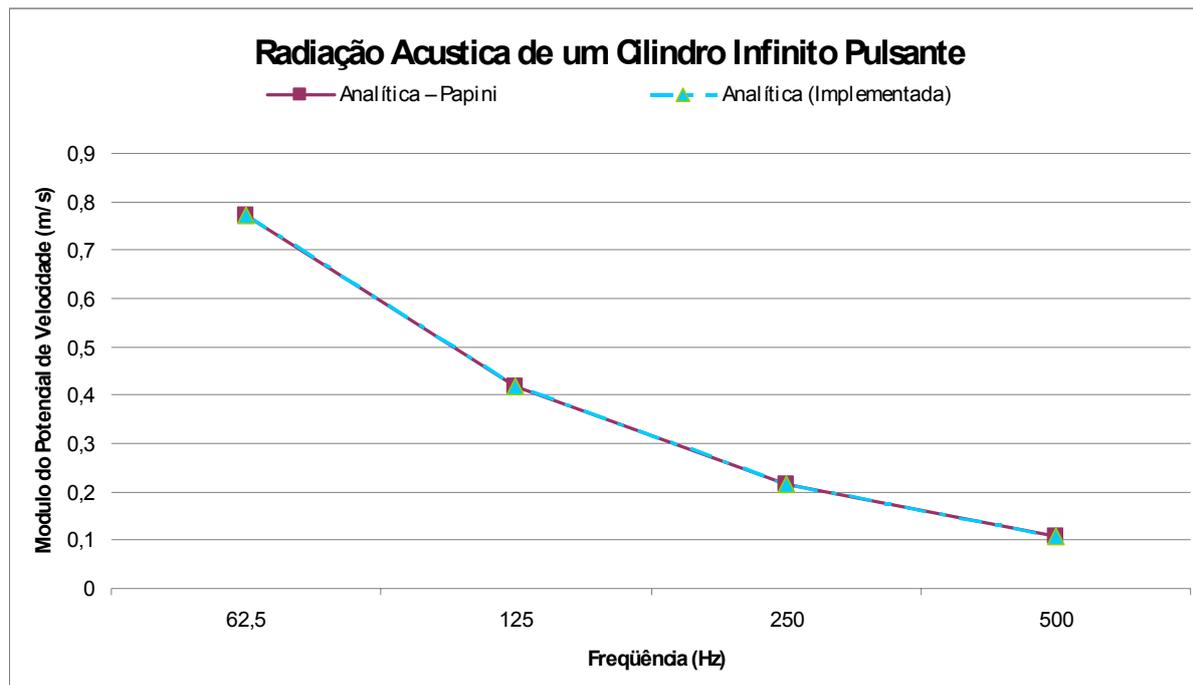


Figura 1. Comparação de resultados analíticos implementados

Verifica-se pela Figura 1 que o módulo do potencial de velocidade diminui à medida que a frequência aumenta. Isso se verifica na Equação (7), onde é mostrado que o potencial de velocidade é inversamente proporcional ao número de onda k .

Os resultados obtidos neste trabalho, apresentados na Tabela 1 e mostrados na Figura 1, são bastante satisfatórios quando comparados aos resultados obtidos de Papini (1999), através do cálculo dos erros absoluto e relativo.

5 Método Numérico

5.1 Vantagens do Método de Elementos de Contorno

Problemas de engenharia são frequentemente descritos por leis físicas as quais são comumente expressas por equações diferenciais parciais. Em muitos casos, uma representação matemática alternativa e equivalente do problema é encontrada em termos de equações integrais de contorno. Com o avanço nas técnicas de modelagem numérica e o incremento na capacidade de processamento dos computadores, métodos de modelagem baseados em equações integrais de contorno podem ser agora usados para a simulação de muitos problemas práticos de engenharia. A mais geral e efetiva técnica numérica para solução de equações integrais de contorno é o Método de Elementos de Contorno.

A redução das dimensões do problema analisado constitui uma das razões pela qual o Método de Elementos de Contorno é tão atrativo: em problemas bidimensionais, apenas o contorno unidimensional do domínio necessita ser discretizado em elementos; em problemas tridimensionais, apenas as superfícies do contorno necessitam ser discretizadas.

Uma peculiaridade do Método de Elementos de Contorno é que ele provê um modelo contínuo do domínio, uma vez que nenhuma discretização do mesmo é requerida. Isso conduz a uma ótima resolução dos parâmetros incógnitos no domínio do problema. As soluções nos

pontos internos são calculadas após as incógnitas de contorno terem sido calculadas, de maneira semelhante a um pós-processamento. A densidade, distribuição e localização dos pontos internos não interferem na malha de contorno, tampouco nos valores das incógnitas de contorno.

Outra característica do Método de Elementos de Contorno é a satisfação automática de condições de contorno para domínios infinitos e semi-infinitos, o que elimina a necessidade de discretização numérica em contornos remotos.

5.2 Equação Integral de Contorno

A equação diferencial clássica, Equação de Helmholtz, que descreve o problema de radiação acústica de um cilindro infinito pulsante foi determinada nos capítulos anteriores. Para encontrar a Equação Integral no contorno, a partir da Equação de Helmholtz, considera-se um corpo bidimensional B imerso em um domínio infinito Ω , representado na Figura 2 abaixo.

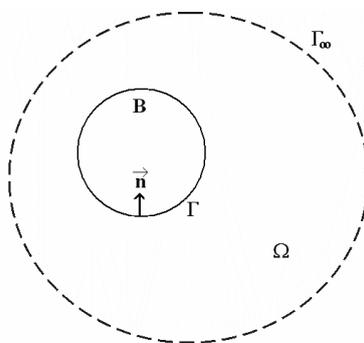


Figura 2 – Representação do domínio e do contorno

A solução da Equação (6) que descreve o problema analisado, sujeito a condição de contorno

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 1 \quad (\text{condição de Neumann}) \quad (10)$$

é dada pela equação integral de contorno

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma - \phi(\vec{r}) = 0. \quad (11)$$

A equação acima foi obtida para pontos de colocação \vec{r} pertencentes ao domínio, onde u^* é a solução fundamental, representada pela função de Green. Esta solução é apresentada para o corpo bidimensional, Ciskowski et al. (1991), como:

$$u^* = \frac{i}{4} H_0^1(kR) \quad (12)$$

e sua derivada é dada por

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{ik}{4} H_1^1(kR) \frac{\partial R}{\partial n} \quad (13)$$

onde R é a distância entre o ponto \vec{r} e o ponto de aplicação \vec{r}' no domínio Ω .

5.3 Discretização das Variáveis

Para a discretização das variáveis físicas e geométricas do problema utilizando-se elementos constantes, o contorno é discretizado em N elementos. Assume-se uma distribuição constante das variáveis u^* e $\frac{\partial u^*}{\partial n}$ ao longo dos elementos em que o contorno foi discretizado.

Assim, da Equação (11) pode-se escrever

$$\frac{1}{2} \phi_j(\vec{r}') + \sum_{j=1}^N \phi_j(\vec{r}') \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} d\vec{\Gamma}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \int_{\Gamma_j} u^*(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{\Gamma}(\vec{r}) \quad (14)$$

As integrais $\int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\vec{\Gamma}$ e $\int_{\Gamma_j} u^* d\vec{\Gamma}$ são chamadas de coeficientes de influência, pois relacionam a influência da solução no ponto P , quando a solução fundamental é integrada sobre o elemento Q . Renomeando as integrais, tem-se

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\vec{\Gamma} \quad (15)$$

e

$$\widehat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\vec{\Gamma} \quad (16)$$

onde i representa o ponto de colocação e j o elemento em consideração a ser integrado. Assim a Eq.(14) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\frac{1}{2} \phi_j(\vec{r}') + \sum_{j=1}^N \phi_j \widehat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial n} G_{ij} \quad (17)$$

Denominando H_{ij} por

$$H_{ij} = \begin{cases} \widehat{H}_{ij} & \text{para } i \neq j \\ \widehat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{para } i = j \end{cases} \quad (18)$$

pois $\phi(\vec{r}')$ é zero para os elementos que não contém a singularidade e um para os que contém. Assim, chega-se a seguinte equação

$$\sum_{j=1}^N \phi_j H_{ij} = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (19)$$

onde $\frac{\partial \phi}{\partial n} = q = 1$ (condição de Neumann) conforme definido anteriormente. No caso mais geral, as variáveis u^* e $\frac{\partial u^*}{\partial n}$ são aproximadas por funções de interpolação da forma

$$\phi(Q) = \sum_{m=1}^E \phi_m N_m(Q) \quad (20)$$

onde E representa o grau da função interpoladora. Assume-se que a posição do nó i também varia de 1 a N . Assim, a solução fundamental é aplicada em cada nó, o que possibilita verificar a influência de todos os outros elementos no nó da singularidade e dele nele mesmo, obtendo-se um sistema de equações expresso na forma matricial, para cada ponto do contorno, como segue

$$H\vec{\phi} = G\vec{q} \quad (21)$$

onde H e G são duas matrizes $N \times N$, e $\vec{\phi}$ e \vec{q} são vetores de comprimento N .

Inserindo-se todos os elementos das matrizes H e G correspondentes às condições de contorno desconhecidas do lado esquerdo e aqueles correspondentes às condições de contorno conhecidas do lado direito, e multiplicando as matrizes do lado direito, forma-se o seguinte sistema de equações:

$$A\vec{y} = \vec{b} \quad (22)$$

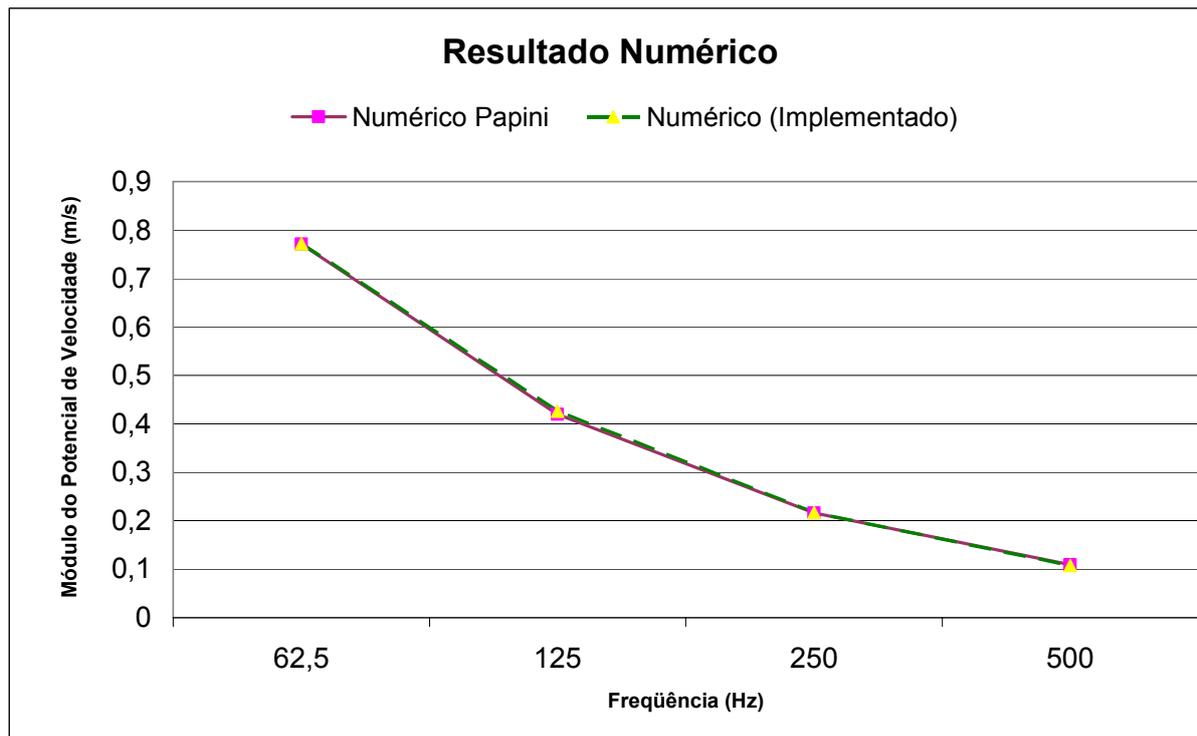
onde \vec{y} é o vetor dos valores de contorno desconhecidos de $\vec{\phi}$ e \vec{q} . O vetor \vec{b} é encontrado multiplicando as colunas correspondentes de H ou de G pelos valores conhecidos de $\vec{\phi}$ e \vec{q} . É interessante notar que as variáveis podem ser uma mistura dos potenciais e suas derivadas. Após a resolução no contorno é possível calcular qualquer valor interno do potencial ou de sua derivada.

6 Resultados Numéricos

A partir da formulação numérica apresentada, foi feita a implementação a través do software MATLAB e os resultados obtidos foram comparados com os resultados numéricos obtidos Papini (1999).

Tabela 2. Comparação de resultados numéricos

Frequência (Hz)	Númérico Papini	Númérico (Implementada)	Erro absoluto	Erro relativo
62,5	0,770955817	0,771765586	-0,000809769	-0,001050344
125	0,419302101	0,425843833	-0,006541732	-0,015601477
250	0,215899747	0,216669203	-0,000769456	-0,00356395
500	0,108885018	0,107506492	0,001378526	0,012660383

**Figura 3.** Comparação de resultados numéricos implementados

Os resultados numéricos apresentados são satisfatórios quando comparados com os valores obtidos por Papini (1999) e o erro absoluto apresentado deve-se ao fato do tratamento da singularidade encontrada na solução da diagonal da matriz G do sistema linear. A singularidade em questão foi resolvida usando o método de aumento do número de pontos de Gauss para a solução da função de Hankel que continha a singularidade. Este é um procedimento frequentemente utilizado na solução de algumas singularidades.

7 Conclusão

A formulação analítica do problema de radiação acústica de um cilindro infinito pulsante foi realizada neste trabalho, onde foi obtida a solução para o caso em que a superfície do cilindro está vibrando uniformemente na direção radial com uma amplitude de V_0 metros por segundo, numa frequência de f hertz. A solução analítica foi implementada e comparada com os valores encontrados por Papini (1999), onde se observou que os resultados foram bastante satisfatórios.

Foi realizado o estudo da formulação numérica do mesmo problema, através do Método dos Elementos de Contorno (MEC). A formulação direta do MEC escolhida para a solução da Equação de Helmholtz, utilizando elementos de contorno lineares. Nessa formulação do MEC, foi obtida a equação integral de contorno para a equação que descreve o problema da radiação acústica de um cilindro infinito pulsante. O desenvolvimento matemático das integrais de contorno, através do MEC, às vezes, não é tão fácil. As dificuldades estão relacionadas com as soluções fundamentais requeridas nessa formulação que envolvem as Funções de Hankel e Bessel.

A solução numérica, através do método direto do MEC foi obtida satisfatoriamente, se comparada com a literatura. O erro apresentado foi pequeno, comparado com a literatura, e deve-se ao fato do tratamento da singularidade apresentada pela função de Hankel. Um melhor tratamento desta singularidade fica apresentado como sugestão para trabalhos futuros.

Referências

- Brebbia, C.A., Domingues, J.(1989). “Boundary Elements Na Introductory Course”. Southampton - Boston: Computational Mechanics Publications.
- Brebbia, C. A., Walker, S.(1980). “Boundary Element Techniques in Engineering”. London.
- Chertock, George. (1964). “Sound Radiation from Vibrating Surfaces”, The Journal of the Acoustical Society of America, Volume 36, Número 7, Páginas 1305 – 1313.
- Ciskowski, R.D., Brebbia, C.A. (1991).“Boundary Element Methods in Acoustics”. Southampton-Boston: Computational Mechanics Publications.
- Debain, E.P., Trevelyan, J., Bettess, P.(2004). “Wave Boudary Elements: a theoretical overview presenting applications in scattering of short waves”. Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 28, Issue 2, Pages 131-141
- Kinsler, L.E., Frey, A.R., Coppens, A.B., Sanders, J.V.(1982). “Fundamentals of Acoustics”. New York: John Wiley & Sons.
- Papini, G. S.(1999). “Estudo Numérico de Barreiras Acústicas”. Dissertação de Mestrado, UFMG, Belo Horizonte - Brasil.
- Yoon, W.S., Park, J.M., Eversman,W.(1990). “Two- Dimensional radiation and scattering at short wave lenght, Journal of Vibration and Acoustics”, V. 112.
- Ziomek, L.J. “Fundamentals of Acoustic Field Theory and Space-Time Signal Processing”. (1995) Boca Raton: CRC Press.