



VI Congreso Iberoamericano de Acústica - FIA 2008
Buenos Aires, 5, 6 y 7 de noviembre de 2008

FIA2008-A078

Condiciones PML para modelos de propagación en oceanografía sísmica

Jean A. Kormann^(a),
Pedro Cobo Parra^(b),
Manuel Recuero Ruiz^(c).

(a) Instituto de Acústica, CSIC, Serrano 144, 28006 Madrid, España. E-mail: jkormann@hotmail.com.

(a) Instituto de Acústica, CSIC, Serrano 144, 28006 Madrid, España. E-mail: pcobo@ia.cetef.csic.es.

(b) GI2A2, Universidad Politécnica de Madrid, Ctra. Valencia km 7, 28031 Madrid, España. E-mail: manuel.recuero@upm.es

Abstract

Seismic oceanography is a recent technique which takes advantage of the high spatial resolution of seismic exploration to infer oceanographic properties of water masses. By applying inversion techniques, such as waveform tomography, the input data of a propagation model can be matched to the experimental seismic ones. When running a propagation model in a non-limited medium, it is necessary to introduce numerical boundaries. To avoid undesired reflections within the propagation medium, these boundaries might be absorbents. Perfectly Matched Layers (PML) were proposed by Berenger in the 90's for electromagnetic waves. The aim of this communication is to present several numerical formulations for modelling seismic oceanography experiments using first- and second-order PMLs. These formulations are able to handle usual seismic oceanography scenarios, traditionally problematic in PML derivations, such as grazing angle propagation.

Resumen

La oceanografía sísmica es una técnica de reciente aparición que pretende aprovechar la gran resolución espacial de la exploración sísmica para obtener propiedades de las masas de agua en el océano. Aplicando técnicas de inversión, como la tomografía por forma de onda, se pueden ajustar los parámetros de un modelo de propagación acústica oceánica, hasta que el resultado del mismo difiera mínimamente de los datos experimentales. Cuando se aplican modelos de propagación acústica en una zona limitada del espacio, es necesario acotar dicha zona introduciendo fronteras numéricas virtuales. Para que estas fronteras numéricas no introduzcan reflexiones indeseadas en la zona de propagación es necesario que sean absorbentes. Las Perfectly Matched Layers (PML) fueron introducidas por Berenger en los años 90 en el contexto de la modelización de ondas electromagnéticas. El objeto de esta comunicación es discutir diferentes formulaciones numéricas para modelizar experimentos de oceanografía sísmica usando fronteras PML de primer y segundo orden. Una de las características de esta formulación es que es capaz de manejar escenarios usuales en oceanografía sísmica, y que tradicionalmente resultan problemáticos en esquemas PML, tal como la propagación cuasi-rasante.

1 Introducción

Los oceanógrafos exploran la capa de agua con muy poca resolución lateral, mientras que los sísmicos exploran el fondo marino con mucha resolución lateral. Esta era la situación cuando el grupo de Holbrook, de la Universidad de Wyoming, adquiría datos sísmicos en la Cuenca de Newfoundland para estudiar la estructura crustal de la transición continente-oceano, en el año 2000. Holbrook observó en los sísmogramas unas reflexiones que venían de la columna de agua. En otro experimento similar realizado en 2002 en el Golfo de California notó algo parecido. Esto le llevó a procesar cuidadosamente los datos correspondientes a la columna de agua, descubriendo que estas reflexiones se originaban en las fronteras entre capas con distintas propiedades temperatura/salinidad. En la publicación de estos resultados en Science, Holbrook *et al.* (2003) reivindicaban el uso de las técnicas de reflexión sísmica para la visualización en alta resolución espacial de importantes fenómenos oceánicos.

Este trabajo se centra especialmente en proporcionar algoritmos que puedan aportar la precisión y la estabilidad necesarias para modelizar las ondas reflejadas por las estructuras thermohalinas de los océanos. Esto implica esquemas numéricos complejos, y condiciones en las fronteras muy bien especificadas. Así pues, la Sección 2 va a presentar un modelo de absorción de primer orden CFS-PML, así cómo un algoritmo de absorción de segundo orden PML. La Sección 3 presentará unos resultados numéricos de interés, mientras que la Sección 4 mostrará el resultado de la simulación de un experimento de oceanografía sísmica.

2 Modelos de propagación y absorción

2.1 Modelo de propagación de primer orden

A continuación se presenta el algoritmo de propagación de primer orden ($O(\Delta t)$) expresado en términos de presión p , velocidad de partícula v , y de densidad ρ . Se usa una discretización escalonada de tal forma que

$$\begin{aligned} \rho \frac{v_{1,i+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{1,i+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t} &= -\frac{p_{i+1}^n - p_{ij}^n}{\Delta} \\ \rho \frac{v_{2,ij+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{2,ij+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t} &= -\frac{p_{ij+1}^n - p_{ij}^n}{\Delta} \\ \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n}{\Delta t} &= -\frac{\rho c_{ij}^2}{\Delta} \left(v_{1,i+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{1,i-\frac{1}{2}}^{n+1} + v_{2,ij+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{2,ij-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

2.2 CFS-PML de primer orden

En esta Sección se va a presentar la derivación de la CFS-PML aplicada a la acústica marina. Se va a usar el cambio de variable compleja propuesto por Roden y Gedney (2000) definido por

$$S_x = 1 + i \frac{\sigma_x}{\omega} \rightarrow S_x = k_x + \frac{\sigma_x}{\alpha_x + i\omega} \quad (2)$$

Entonces, si se define $s_x(t)$ como la transformada inversa de $1/S_x(\omega)$, se consigue la siguiente respuesta impulsiva

$$s_x(t) = \frac{\delta(t)}{k_x} - \frac{\sigma_x}{k_x^2} H(t) e^{-(\sigma_x/k_x + \alpha_x)t}, \quad (3)$$

donde $H(t)$ y $\delta(t)$ son las funciones de Heaviside y de Dirac, respectivamente. Así pues, el nuevo operador de derivación espacial se redefine como la siguiente convolución

$$\partial_{\bar{x}} = s_x(t) * \partial_x \Leftrightarrow \partial_{\bar{x}} = \frac{1}{k_x} \partial_x + \zeta_x(t) * \partial_x. \quad (4)$$

Ahora queda por encontrar una formulación para $\zeta_x(t) * \partial_x$. Computacionalmente, la introducción de una convolución temporal no es interesante porque aumenta de forma dramática los tiempos de cálculo y el espacio de memoria. A continuación se va a demostrar que $\zeta_x(t) * \partial_x$ se puede calcular de forma recurrente (Komatitsch y Martin, 2007). Para ello se introduce una nueva variable definida por

$$\psi_x^n = \zeta_x(t) * \partial_x = \int_0^{n\Delta t} (\partial_x^{n\Delta t - \tau} \zeta_x(\tau)) d\tau. \quad (5)$$

Como se usa un esquema escalonado, el operador derivada ∂_x está definido en el tiempo $t=(m+1/2)\Delta t$, y la ecuación (5) se discretiza de tal forma que

$$\begin{aligned} \psi_x^n &= \sum_{m=0}^{n-1} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \partial_x^{n\Delta t - \tau} \zeta_x(\tau) d\tau = \sum_{m=0}^{n-1} \partial_x^{n-(m+1/2)} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \zeta_x(\tau) d\tau \\ \Leftrightarrow \psi_x^n &= \sum_{m=0}^{n-1} Z_x(m) \partial_x^{n-(m+1/2)} \end{aligned} \quad (6)$$

Así pues, se puede calcular fácilmente la integral $Z_x(m)$, resultando

$$\begin{aligned} Z_x(m) &= a_x e^{-(d_x/k_x + \alpha_x)m\Delta t} \\ a_x &= \frac{\sigma_x}{k_x(\sigma_x + k_x\alpha_x)} (b_x - 1) \text{ y } b_x = e^{-(d_x/k_x + \alpha_x)\Delta t} \end{aligned} \quad (7)$$

Debido a la sencillez de la expresión de Z_x , la convolución (6) se puede calcular de forma recursiva, dando lugar a las relaciones

$$\begin{aligned} \psi_{x,\eta}^{n+1/2} &= b_x \psi_{x,\eta}^{n-1/2} + a_x \partial_x^n \\ b_x &= e^{-(d_x/k_x + \alpha_x)\Delta t} \\ a_x &= \frac{d_x}{k_x(d_x + k_x\alpha_x)} (b_x - 1) \end{aligned} \quad (8)$$

donde el sub-índice η se refiere al campo de presión o de velocidad de partícula. Finalmente, en el caso de un medio no disipativo, la ecuación (8) nos proporciona las nuevas ecuaciones separadas CFS-PML para la dirección x

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{k_x} \frac{\partial p}{\partial x} - \psi_{x,v}^n \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p_x}{\partial t} &= -\rho c \frac{1}{k_x} \frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \psi_{x,p}^n \\ \frac{\partial p_y}{\partial t} &= -\rho c \frac{\partial v_y}{\partial y}\end{aligned}\quad (9)$$

Las ecuaciones CFS-PML para la dirección y se deducen intercambiando las variables x e y en la ecuación (9).

2.3 Modelo de propagación de segundo orden

El algoritmo de propagación consiste en la discretización por diferencias finitas de la ecuación de ondas proporcionando un algoritmo $O(\Delta t^2)$. El esquema numérico es (Berkhout, 1987)

$$\begin{aligned}p(x, y, t + \Delta t) &= -p(x, y, t - \Delta t) + 2 \left[1 - 2 \frac{(c\Delta t)^2}{\Delta^2} \right] p(x, y, t) + (c\Delta t)^2 s(x, y, t) + \\ &\frac{(c\Delta t)^2}{\Delta^2} [p(x, y - \Delta, t) + p(x - \Delta, y, t) + p(x, y + \Delta, t) + p(x + \Delta, y, t)]\end{aligned}\quad (10)$$

2.4 Modelo PML de segundo orden

La transformación de Fourier de la ecuación de ondas propone la ecuación de Helmholtz, de tal forma que

$$\nabla^2 P + \frac{\omega^2}{c^2} P + F_s = 0 \quad (11)$$

donde P y F_s son la transformadas de Fourier de la presión y de la fuente. Ahora se busca una derivación para el operador PML Laplaciano $\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2}$ a partir del cambio de variable de Beranger y se consigue

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} = \frac{-i\sigma'_x/\omega}{\left(1 + i\frac{\sigma_x}{\omega}\right)^3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\left(1 + i\frac{\sigma_x}{\omega}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (12)$$

Ahora vamos a definir P y F_s usando el método de partición de variables

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 \\ F_s &= F_{s,1} + F_{s,2} \end{aligned} \quad (13)$$

Así pues, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{-i\sigma'_x/\omega}{\left(1+i\frac{\sigma_x}{\omega}\right)^3} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\left(1+i\frac{\sigma_x}{\omega}\right)^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} P_1 + F_{s,1} &= 0 \quad (a) \\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} P_2 + F_{s,2} &= 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (14)$$

Ahora, aplicando la transformación de Fourier inversa, se llega a las ecuaciones PML de segundo orden para la dirección x

$$\begin{aligned} -\sigma'_x \frac{\partial q}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p_x}{c^2 \partial t^2} - \frac{3\sigma_x}{c^2} \frac{\partial p_x}{\partial t} - 3 \frac{\sigma_x^2}{c^2} p_x - \frac{\sigma_x^3}{c^2} q_x &= 0 \quad (a) \\ \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 p_y}{c^2 \partial t^2} &= 0 \quad (b) \\ q &= \int_0^t p(s) ds \quad (c) \\ q_x &= \int_0^t p_x(s) ds \quad (d) \\ p &= p_x + p_y \quad (e) \end{aligned} \quad (15)$$

Las ecuaciones para la dirección y se consiguen intercambiando los subíndices x e y .

3 Resultados numéricos

3.1 Propagación a ángulos rasantes

En esta Sección se va a analizar la eficiencia de las distintas PMLs en el caso de la propagación a ángulos rasantes. Este tipo de geometrías son muy comunes en simulaciones numéricas, ya que muchas veces la fuente se encuentra ubicada cerca de la zona PML. La velocidad del sonido y la densidad son 1500 m/s y 1000 kg/m³, y son constantes en todo el entorno. El medio físico, de 3200 m de longitud y 500 m de profundidad, está rodeado por unas PMLs de 500 m a derecha, izquierda y abajo, y una PML de 75 m arriba, como se ve en la figura 1. Los incrementos espacial y temporal son 5 m y 0.0016 s, respectivamente. La fuente se encuentra a 250 m de alcance y 250 m de profundidad, aumentando así la influencia de la propagación a ángulos rasantes. La función de absorción es no-integrable y similar a las presentadas en Bermudez *et al.* (2007) cuya ecuación es

$$\sigma_x = 2c \left(\frac{1}{x^T - x_0} - \frac{1}{x^T - x} \right), \quad (16)$$

donde $x^T - x_0$ es el espesor de zona PML. Los receptores están ubicados a 0.05, 1.25 y 2.75 km de la fuente y a 250 m de profundidad. Al introducir PMLs más anchas en tres de las fronteras, nos aseguramos de que las amplitudes de sus respectivas reflexiones van a ser menores que la de la PML de 75 m (aproximadamente -40 dB), de forma que en las trazas solo se podrá apreciar la reflexión de la PML estudiada. Todas las trazas están normalizadas por su máximo, para evitar los efectos de divergencia esférica.

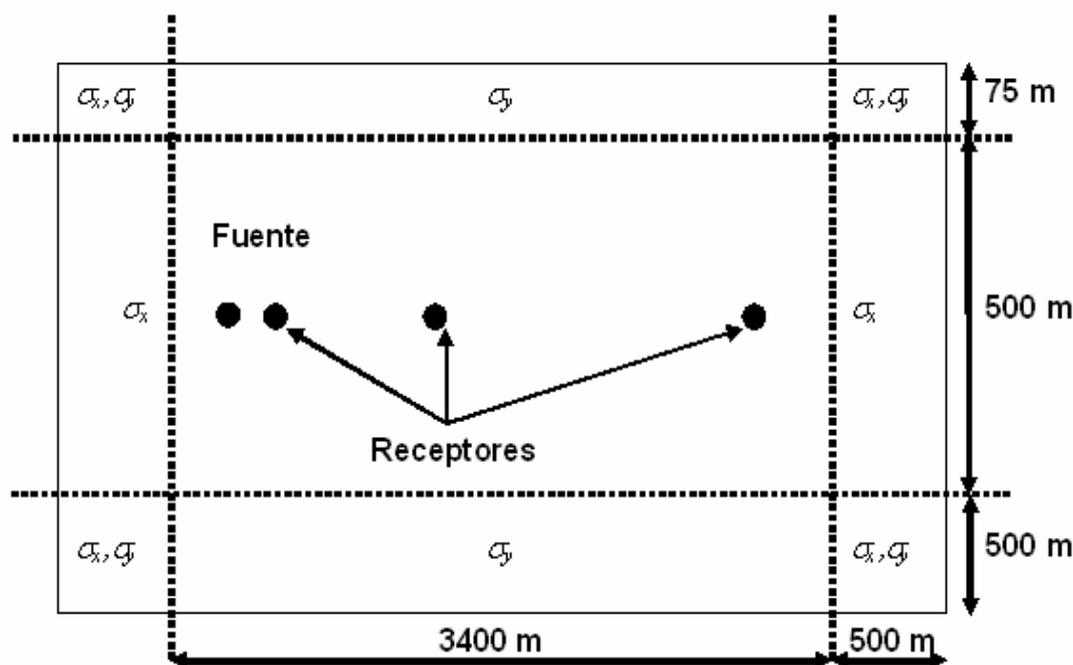


Figura 1. Esquema de la simulación numérica para propagación ángulos rasantes.

La figura 2 muestra el error, para la PML de segundo orden y la CFS-PML de primer orden. Por error se entiende la diferencia entre la solución obtenida con cierto número de capas PML en las fronteras y la solución de referencia del problema no acotado conseguida con los mismos parámetros numéricos. Restando la solución de referencia a la solución PML, uno se queda únicamente con las ondas reflejadas por la PML, es decir el error PML.

Se puede apreciar como ambas formulaciones devuelven cada vez reflexiones más fuertes en el medio a medida que el receptor se encuentra más lejos de la fuente (es decir, que la onda llega a la interfaz entre la PML y el medio con ángulos de incidencia más pequeños). También, se puede ver que, a pesar de que los errores son comparables, la CFS-PML de primer orden da mejores resultados, sobre todo en incidencia normal. Sin embargo a 0.05 y 1.25 km, la formulación de segundo orden proporciona aproximadamente el doble de error que la CFS-PML de primer orden. A 2.75 km las dos formulaciones dan casi el mismo error. Un resultado similar fue establecido también por Correia y Jin (2006) para la CFS-PML de primer orden y la PML de segundo orden, en el caso de la propagación de ondas electromagnéticas a través de una guía de ondas.

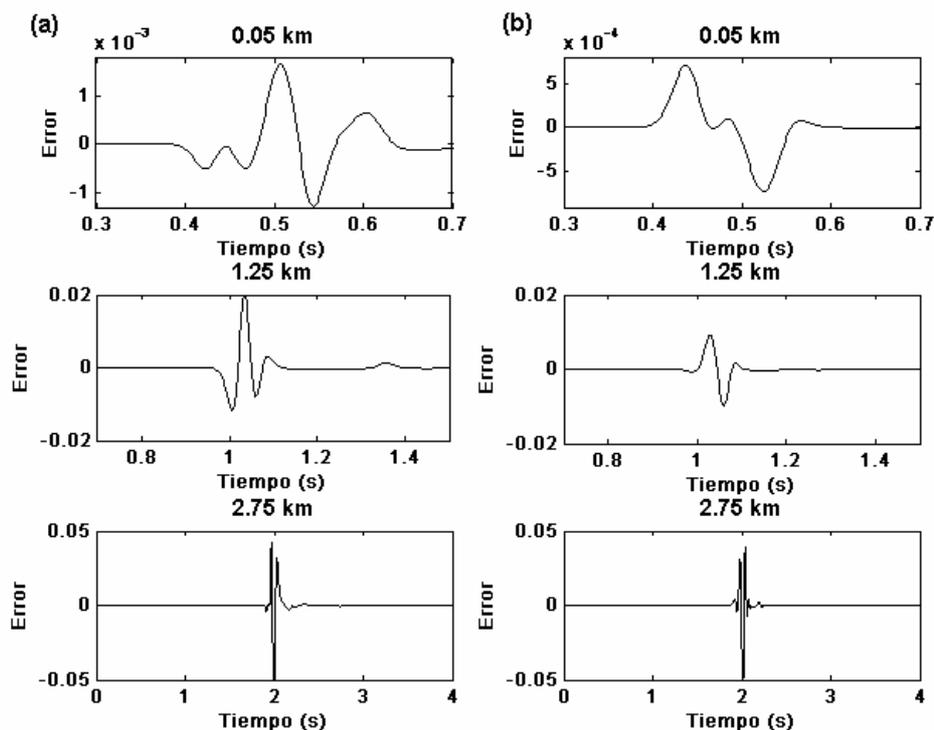


Figura 2. Comparación del error entre (a) PML de segundo orden y (b) CFS-PML de primer orden, para propagación a ángulos rasantes.

4 Aplicación a la oceanografía sísmica

El experimento es el siguiente (ver figura 3): la fuente y los receptores están a 5 m de profundidad. La fuente es una onda de Ricker, con frecuencia central de 60 Hz, el incremento temporal es de 0.0001 s. La figura 4 muestra el perfil de velocidad usado para la simulación. Se considera un campo de velocidad estratificado sin variación lateral. La densidad se considera como constante en todo el medio. En la fronteras laterales se considera la reflexión como total ($p=0$).

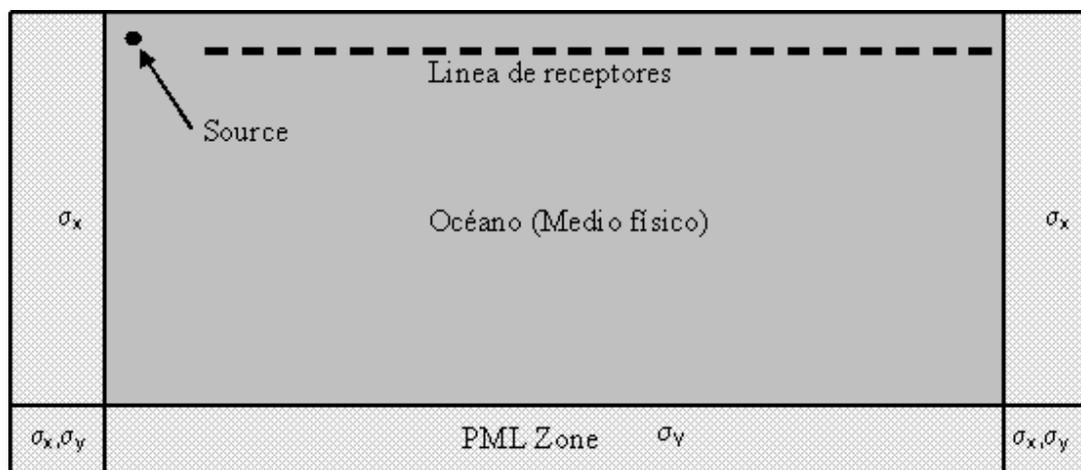


Figura 3. Esquema de la simulación.

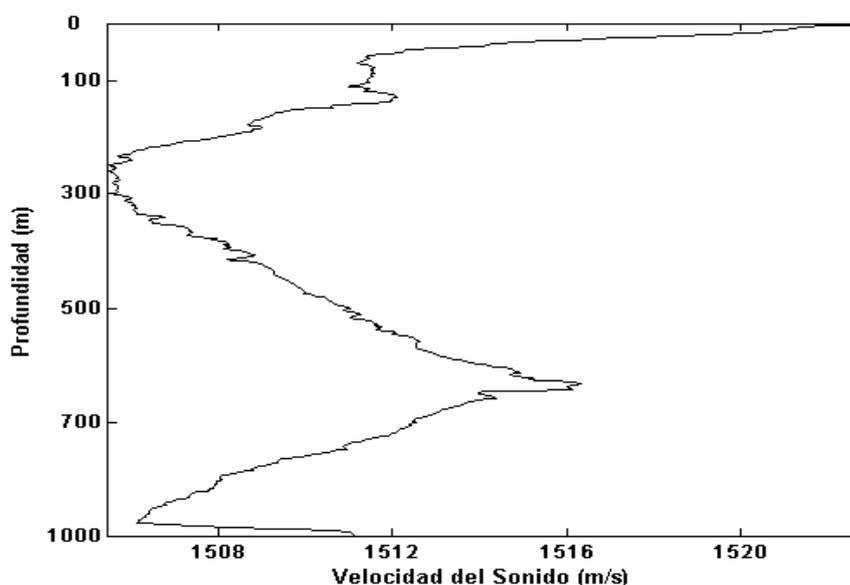


Figura 4. Perfil de velocidad (gentileza de Valentí Sallarés, UTM, CSIC).

La figura 5 presenta los sismogramas sintetizados con los algoritmos CFS-PML de primer orden y PML de segundo orden. Los tiempos de viaje se corresponden exactamente. Se puede ver que la reflexión de la PML del fondo depende claramente del ángulo de incidencia. En el tiempo $t=0.8$ s, se puede apreciar la reflexión de la PML del fondo en ambos sismogramas. Se puede apreciar que la reflexión de la CFS-PML es menor a la de la PML, cómo ha sido demostrado más arriba. Nótese que no se puede distinguir ninguna reflexión de las fronteras laterales en ambos sismogramas, porque están enmascaradas por las reflexiones de la estructura fina del agua. Así pues, las fronteras han sido diseñadas correctamente.

5 Conclusión

En este trabajo se han presentado dos formulaciones para la propagación acústica marina y fronteras absorbentes en el dominio tiempo/espacio. Los dos algoritmos han sido derivados para formulaciones en presión/velocidad y presión solo, respectivamente. Ambos han demostrado su eficiencia en el caso de la simulación de experimentos de oceanografía sísmica. Se ha comprobado que las ondas reflejadas por las fronteras absorbentes son menores que las reflexiones debido al *scattering* del agua, por lo cual proporcionan una solución adecuada a este tipo de problemas.

Referencias

- Berkhout, A.J. (1987). "Applied Seismic Wave Theory". Elsevier, Ámsterdam, Netherlands.
- Bermúdez, A.; Hervella-Nieto, L.; Prieto, A.; Rodríguez, R. (2007). "An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problems". J. Comput. Phys. 223, 469-488.
- Correia, D., Jin, J.M., 2006, "Performance of regular PML, CFS-PML, and second-order PML for waveguide Problems". Microw. Opt. Techn. Let. 48, 2121-2126.
- Holbrook, W.S.; Páramo, P.; Pearse, S.; Schmitt, R.W. (2003). "Thermohaline fine structure in an oceanographic front from seismic reflection profiling". Science, 301, 821-824.
- Komatitsch, D.; Martin, R. (2007). "An unsplit convolutional Perfectly Matched Layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation". Geophysics 72, 5. 155-165.
- Roden, J. A.; Gedney, S. D. (2000). "Convolution PML (CPML) an efficient FDTD implementation

of the CFS-PML for arbitrary media". *Microw. Opt. Techn. Let.* 27, 334-339.

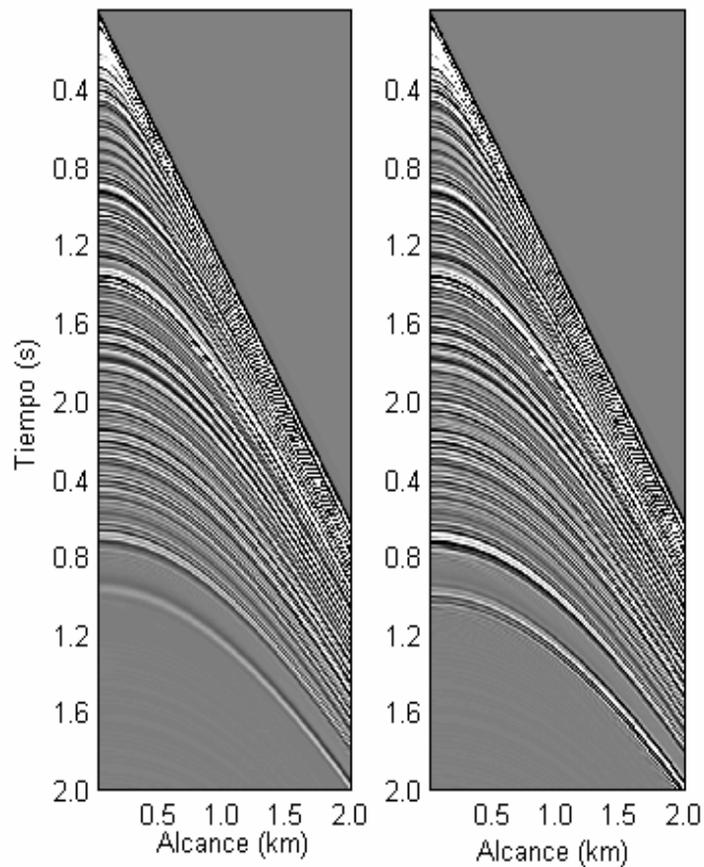


Figura 5. Comparación entre los shotgathers sintetizados con la CFS-PML de primer orden y (izquierda) y PML de segundo orden (derecha).