



VI Congreso Iberoamericano de Acústica - FIA 2008
Buenos Aires, 5, 6 y 7 de noviembre de 2008

FIA2008-A197

Comparación de los modelos clásico y Zener para la representación de sistemas vibratorios

Fernando J. Elizondo Garza^(b), Diego F. Ledezma Ramírez^(a),
Pablo Ernesto Tapia González^(b), José de Jesús Villalobos Luna^(b).

(a) Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, Southampton, United Kingdom, SO171BJ. E-mail: dfl@isvr.soton.ac.uk

(b) Laboratorio de Acústica de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Dirección de correo: Apartado Postal 28 "F", Cd. Universitaria, San Nicolás, 66450, N.L., México. Tel: (52) (81) 8329-4020 ext. 5854. Fax: (52) (81) 8352-654. E-mail: fjelizon@ccr.dsi.uanl.mx , cifo44@gmail.com , villalobosluna@gmail.com

Abstract

The development of new materials, in recent times, has permitted to modify their properties to be able to adapt to their applications and the response that they have under certain circumstances. The viscoelastic materials are a clear example of new materials which have a different behaviour than any metal or polymer, keeping certain characteristics of both. The modelling of a viscoelastic material, to predict its vibrational response, under different vibratory conditions has not been an easy task. Currently, tests and studies are being carried out on these materials and on their response to diverse excitations. In this work the results obtained when representing vibratory systems using the Zener model are presented. Also a comparison with respect to the obtained results using the classic model is performed, and finally in the conclusions the feasibility and implications of the use of the Zener model for each one of the considered situations are discussed.

Resumen

El desarrollo de nuevos materiales, en los últimos tiempos, ha permitido modificar sus propiedades para evolucionar en cuanto a sus aplicaciones y a la respuesta que tienen bajo ciertas circunstancias. Los materiales viscoelásticos son un claro ejemplo de nuevos materiales, con un comportamiento diferente al de cualquier metal o polímero, conservando ciertas características de ambos. No ha sido fácil modelar un material viscoelástico en cuanto a predecir su respuesta a la vibración bajo diferentes condiciones. Actualmente, se realizan pruebas, además de estudios, de estos nuevos materiales y su respuesta ante diversas excitaciones vibratorias. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos al representar sistemas vibratorios utilizando el modelo Zener. También se efectúa una comparación con respecto a los resultados obtenidos utilizando el modelo clásico y, por último, en las conclusiones se discute la viabilidad e implicantes de utilizar el modelo Zener en cada uno de los sistemas considerados.

1 Introducción

Durante la etapa de modelado de sistemas vibratorios normalmente el primer paso es construir un modelo matemático de un grado de libertad el cual represente las características físicas del sistema. Normalmente la elasticidad se representa por medio de un elemento elástico lineal, y el amortiguamiento es considerado viscoso. Ambos elementos se combinan mediante un arreglo en paralelo, ver figura 1.

Esta configuración es relativamente simple y arroja resultados confiables, que permiten tener una idea preliminar del comportamiento dinámico, de ciertos sistemas mecánicos.

Sin embargo, dicho modelo clásico: elasticidad-amortiguamiento en paralelo (Kelvin-Voigt), no es muy adecuado para representar sistemas con materiales que presentan comportamiento viscoelástico, los cuales se caracterizan por tener propiedades elásticas y amortiguantes a la vez.

Debido a esto se han desarrollado otros modelos para representar el fenómeno viscoelástico. La configuración más simple comprende un conjunto elástico-amortiguante en serie, el cual está en paralelo con otro elemento elástico. Esta configuración se conoce como modelo Zener.

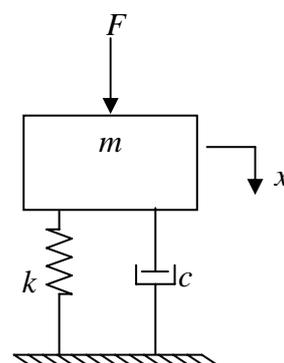


Figura 1. Sistema masa-amortiguador-resorte (MKC) de un grado de libertad sujeto a vibración armónica forzada.

2 Materiales viscoelásticos

Todos los materiales disipan algo de energía mientras son sometidos a cargas cíclicas (vibratorias). Existen además algunas aleaciones especiales en las que las propiedades amortiguantes han sido realzadas. Además, los polímeros, en especial el caucho, presentan un alto índice de disipación de energía [3]. Otra característica importante de estos materiales es que no sólo presentan una gran cantidad de amortiguamiento, sino que también presentan un comportamiento elástico. A esta característica, como ya se mencionó, se le conoce como viscoelasticidad y una comprensión profunda del comportamiento de estos materiales es necesaria para su uso en el aislamiento y control de vibraciones.

2.1 Amortiguamiento

El amortiguamiento puede definirse como la conversión de energía mecánica en energía térmica [1]. Uno de los enfoques más comúnmente usados para representar el amortiguamiento es un elemento del tipo viscoso, en el cual la fuerza amortiguante es proporcional a la velocidad. Este concepto es físico y matemáticamente simple. Permite obtener resultados confiables rápidamente y sin complejidades matemáticas. Sin embargo, en la práctica existen otros mecanismos de amortiguamiento los cuales no son tan simples.

El amortiguamiento viscoso es un medio externo de disipar energía. Otros medios externos de amortiguamiento son la fricción seca, también conocido como amortiguamiento de Coulomb. Sin embargo, algunos medios de amortiguamiento son internos. En un sentido amplio, a este tipo de amortiguamiento se le llama estructural, o amortiguamiento de material. Este concepto es muy general, dado que se pueden enumerar diversos tipos de amortiguamiento interno según su naturaleza, por ejemplo [2]: fricción fluida, histéresis mecánica, plasticidad y relajación mecánica.

2.1.1 Factor de pérdida

Uno de los parámetros más importantes para cuantificar el amortiguamiento en cierto sistema es el factor de pérdida η (en inglés: loss factor). Se define como la razón entre la pérdida de energía a causa del amortiguamiento por radián, y la energía potencial máxima [1]. Si se considera que el sistema mostrado en la figura 1 experimenta sólo vibración sinusoidal, se tiene que su desplazamiento y velocidad están dados respectivamente por:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = \omega X \cos(\omega t + \phi) \quad (2)$$

La fuerza amortiguante (considerándola viscosa) disipa una cantidad de energía $W_d = c\dot{x}(t)dx = c\dot{x}^2(t)dt$ a medida que experimenta un desplazamiento dx . Lo último puede ser expresado como:

$$c\dot{x}(t)dx = c\dot{x}^2(t)dt = \frac{1}{\omega} c\dot{x}^2(t)d(\omega t) \quad (3)$$

La ecuación (3) se integra de 0 a 2π para obtener la energía disipada por ciclo ($W_d = \oint F_d \cdot dx$), lo que se expresa como:

$$\frac{c}{\omega} \int_0^{2\pi} \dot{x}^2(t)d(\omega t) = c\omega X^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t + \phi)d(\omega t) = \pi c\omega X^2 \quad (4)$$

Por lo que la energía por radian ($W_d/2\pi$) será igual a: $(c\omega X^2/2)$

La máxima energía potencial está dada por:

$$U = \frac{1}{2} kX^2 \quad (5)$$

Combinando las ecuaciones (4) y (5) se obtiene la expresión para el factor de pérdida.

$$\eta = \frac{\omega c}{k} \quad (6)$$

Finalmente, el factor de pérdida se puede expresar en términos de la razón de amortiguamiento ζ , y la frecuencia natural, como:

$$\eta = 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \quad (7)$$

2.1.2 Elasticidad compleja

Para el sistema MKC mostrado en la figura 1, la amplitud de estado estable está dada por la siguiente expresión [4]:

$$(-\omega^2 m + j\omega c + k)X = F_0 \quad (8)$$

Esta expresión puede ser escrita como:

$$(-\omega^2 m + k^*)X = F_0 \quad (9)$$

Donde la elasticidad compleja k^* se define de la siguiente manera:

$$k^* = (k + jk_i), \quad k_i = \omega c \quad (10)$$

Al combinar ecuaciones (10) y (6), se tiene que:

$$\eta = \frac{\omega c}{k} = \frac{k_i}{k} \quad (11)$$

Finalmente sustituyendo en la ecuación diferencial del modelo clásico se tiene:

$$m\ddot{x} + kx + j\eta kx = 0 \tag{12}$$

Por lo tanto, el factor de pérdida puede ser obtenido usando el enfoque de elasticidad compleja. El uso de un elemento elástico con una elasticidad compleja definida es la más básica representación de un material viscoelástico, donde la parte real de la elasticidad representa la elasticidad física, y la razón entre la parte imaginaria y la parte real representa el factor de pérdida. Dicho sistema se muestra en la figura 2, y su ecuación característica es:

$$m\ddot{x} + k(1 + j\eta)x = 0 \tag{13}$$

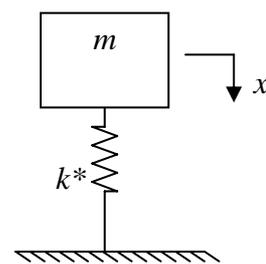


Figura 2. Sistema masa-resorte de un grado de libertad considerando elasticidad compleja.

2.2 Modelos usados para representar la viscoelasticidad

Diversos modelos son usados para representar sistemas mecánicos usando amortiguamiento viscoso y elementos elásticos. La figura 3 muestra diversos modelos, el primero mostrado en la figura 3(a) es el mas simple y se le llama modelo de Maxwell, que consta de un elemento elástico y un elemento amortiguante en serie. El modelo clásico es el mostrado en la figura 3(b), el cual está formado por un elemento elástico y un elemento amortiguante viscoso en paralelo. A éste modelo se le llama también modelo Kelvin-Voigt, el cual es muy simple, pero no representa de manera fidedigna el comportamiento de los materiales viscoelásticos. Dicho modelo ha sido mejorado con la adición de un conjunto amortiguador-elemento elástico Nk en serie, que a su vez está en paralelo con otro elemento elástico, denominándose a esta configuración modelo Zener el que se muestra en la figura 3(c). Si se requiere una mayor exactitud en el análisis de cierto sistema, se puede agregar una mayor cantidad de elementos, ver figura 3(d), lo cual también aumenta la complejidad del análisis.

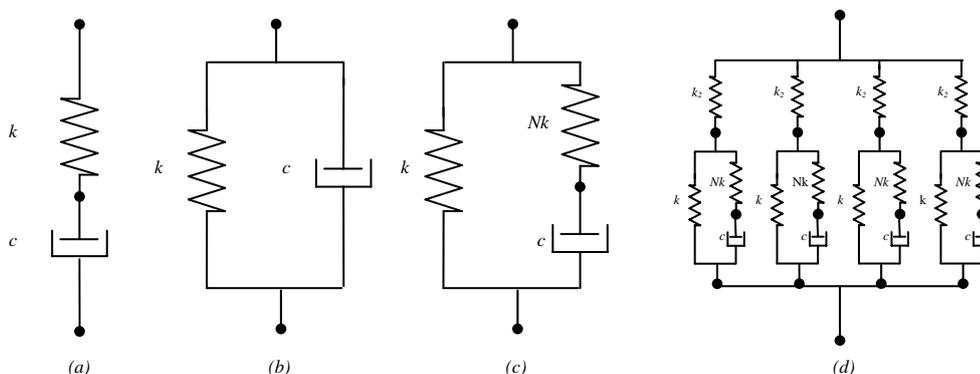


Figura 3. Diferentes modelos usados para representar materiales viscoelásticos considerando elementos elásticos y amortiguantes: (a) modelo de Maxwell, (b) modelo clásico o Kelvin-Voigt, (c) modelo Zener y (d) modelo Zener compuesto.

2.2.1 Relajación

Algunas de las propiedades más significativas de un material viscoelástico son:

- Creep (deformación). Si el esfuerzo permanece constante, la deformación incrementa con el tiempo.
- Relajación mecánica. Si la deformación permanece constante, el esfuerzo disminuye con el tiempo.
- La elasticidad efectiva depende de la razón de aplicación de la carga.

- Cuando se aplican cargas cíclicas, se presenta el fenómeno de histéresis, lo que conlleva a la disipación de la energía mecánica.

Como consecuencia de estas características, el modelo Zener también es conocido como oscilador de relajación [5]. De una manera simple el fenómeno de relajación mecánica puede definirse como el alivio de tensión en un material deformado debido al deslizamiento. En general, el modelo Zener se considera como una de las representaciones más simple de un material viscoelástico.

En general, las propiedades de los materiales viscoelásticos son afectadas por diversos parámetros, como temperatura, frecuencia, rango de deformación dinámica, pre-carga estática, envejecimiento, etc., dependiendo del mecanismo de amortiguamiento. En el modelo Zener, la principal causa de amortiguamiento es el fenómeno de relajación mecánica. Y una de las principales características del fenómeno de relajación, es precisamente que tanto la elasticidad como el factor de pérdida son altamente dependientes de la frecuencia. Este fenómeno puede ser observado en polímeros como el caucho, y ciertos metales como el hierro, magnesio, y aleaciones como el bronce.

2.2.2 Dependencia del amortiguamiento y la elasticidad con la frecuencia

Como se ha mencionado previamente, una de las principales características del modelo Zener es la dependencia de sus propiedades físicas con la frecuencia. Para mostrar este comportamiento se usará el enfoque de elasticidad compleja, siendo el objetivo representar el modelo Zener como un modelo simple con una elasticidad compleja, como lo indica la figura 4.

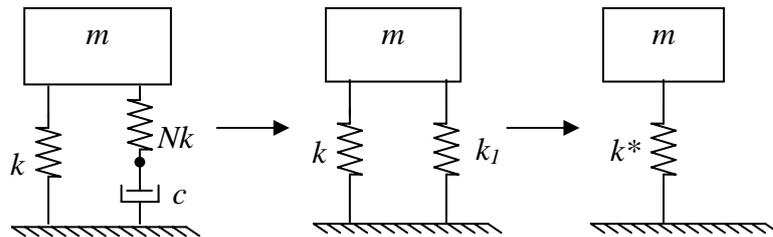


Figura 4. Reducción del modelo Zener a un modelo simple con elasticidad compleja.

Considerando que el sistema tiene una elasticidad compleja resultado de dos elementos elásticos en paralelo, y estableciendo que el elemento elástico Nk y el amortiguador c están en serie, se puede escribir:

$$k_1 = \frac{j\omega c Nk}{j\omega c + Nk} \quad (14)$$

Ahora k_1 está en paralelo con k , lo que da como resultado:

$$k_{eff} = \frac{j\omega c Nk + k(j\omega c + Nk)}{j\omega c + Nk} \quad (15)$$

Esta última ecuación puede ser escrita como:

$$k_{eff} = \frac{k + jk(N+1)\left(\frac{\omega c}{Nk}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega c}{Nk}\right)} \quad (16)$$

Lo que finalmente lleva a la ecuación para la elasticidad compleja.

$$k^* = \frac{k + k(N+1)\left(\frac{\omega c}{Nk}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega c}{Nk}\right)^2} + j \frac{\omega c}{1 + \left(\frac{\omega c}{Nk}\right)^2} \quad (17)$$

Como se mencionó en la sección 2.2, la parte real de la ecuación (17) representa la elasticidad dinámica, dada por:

$$k_d = \frac{k + k(N+1)\left(\frac{\omega c}{Nk}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega c}{Nk}\right)^2} \quad (18)$$

Y la razón entre la parte imaginaria y la real representa el factor de pérdida:

$$\eta = \frac{\omega c}{k + k(N+1)\left(\frac{\omega c}{Nk}\right)^2} \quad (19)$$

En los materiales viscoelásticos ha sido observado que la elasticidad dinámica es constante a bajas frecuencias, pasa por un punto de inflexión, y luego alcanza un nuevo valor constante a altas frecuencias [7][1][3]. Por otro lado, el factor de pérdida es pequeño a bajas frecuencias, incrementando proporcionalmente con la frecuencia, alcanza un punto máximo, y después disminuye inversamente proporcional a la frecuencia. El valor de frecuencia al cual el factor de pérdida alcanza su máximo valor se le conoce como frecuencia de transición, ω_t . Es importante notar que el modelo Zener no representa exactamente el comportamiento de un material viscoelástico, sin embargo ofrece una muy buena aproximación para estudiar su respuesta.

Para encontrar una expresión que permita calcular la frecuencia de transición, es necesario resolver la ecuación:

$$\frac{d\eta}{d\omega} = 0 \quad (20)$$

Lo cual resulta en la siguiente expresión:

$$\omega_t = \frac{Nk}{c\sqrt{N+1}} \quad (21)$$

Las ecuaciones 18, y 19 pueden ser rescritas usando la ecuación 21, lo que lleva a:

$$k_d = \frac{k(N+1)\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^2\right]}{(N+1) + \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^2} \quad (22)$$

$$\eta = \frac{N\left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)}{\sqrt{N+1}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right)^2\right]} \quad (23)$$

Estas últimas ecuaciones han sido representadas gráficamente en la figura 5, para varios valores del factor N.

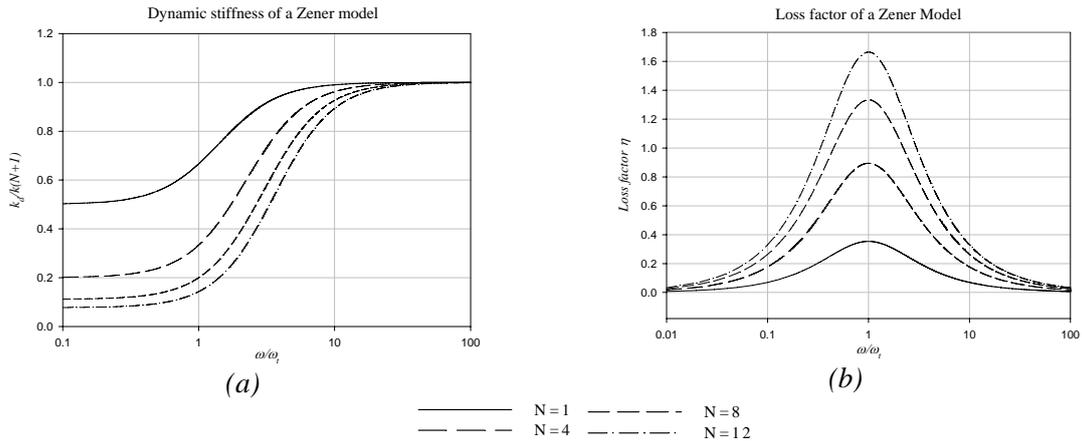


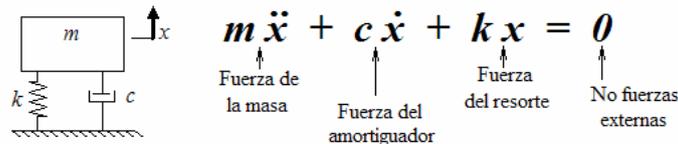
Figura 5. Elasticidad dinámica (a) y factor de pérdida (b) en función de la frecuencia, para el modelo Zener.

El comportamiento de la elasticidad puede ser observado en la figura 5(a), la cual muestra claramente la dependencia de la elasticidad con la frecuencia. Se puede observar que a bajas frecuencias el modelo Zener se reduce a un sistema soportado únicamente por el elemento elástico k . La elasticidad toma un valor constante igual al valor de este elemento k . Puede decirse que a bajas frecuencias el arreglo $Nk-c$ en serie no es “visible”, o más precisamente que actúa como si estuviera desconectado del sistema. Por otro lado, a altas frecuencias, el elemento c se vuelve virtualmente incompresible, o sea que actúa como un eslabón rígido, por lo que la elasticidad equivale a tener k , y Nk en paralelo, reduciéndose a un simple sistema masa resorte. Como resultado el factor de pérdida tiende a cero en las bajas y altas frecuencias, pero pasa por su punto máximo en la frecuencia de transición.

3 Vibración libre

3.1 Análisis MKC

Como se muestra en la figura 6, el modelo MKC tiene varias consideraciones en su análisis lo que lleva a tres casos únicos que dependen solamente de la relación de amortiguamientos.



Supone que los resortes son lineales y metálicos (Ley de Hooke), que el amortiguador es lineal ($\propto c\dot{x}$) y que se le dan condiciones iniciales para que vibre.

Solución General $x = Ae^{S_1t} + Be^{S_2t}$

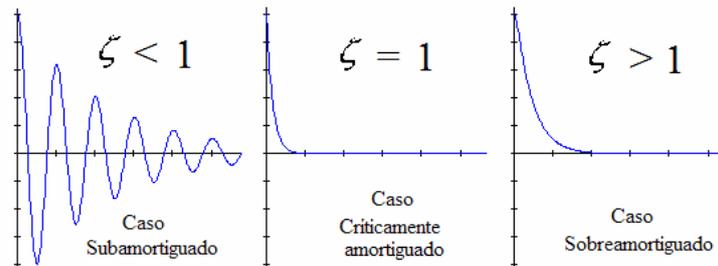


Figura 6. Análisis clásico del sistema MKC en vibración libre.

3.2 Análisis Zener

Para poder investigar la respuesta de vibración libre del modelo Zener, es necesario obtener su ecuación característica. Considerando el sistema mostrado en la figura 7, cuando la masa m sufre un cierto desplazamiento x , se mueve de su punto de equilibrio, mientras que el punto donde se unen c y Nk muestra un desplazamiento x_0 .

La ecuación característica para m puede escribirse como:

$$m\ddot{x} + kx + Nk(x - x_0) = 0 \quad (24)$$

Dado que c y Nk están acomodados en serie, los dos están afectados por la misma fuerza, por lo que:

$$c\dot{x}_0 + Nk(x - x_0) = 0 \quad (25)$$

Para obtener una sola ecuación en términos del desplazamiento x de la masa m , la ecuación (24) se deriva una vez con respecto al tiempo, lo que da lugar a:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Nk\dot{x} - Nk\dot{x}_0 = 0 \quad (26)$$

Después de manipular algebraicamente las ecuaciones (24) y (25), es evidente que:

$$\dot{x}_0 = -\left(\frac{m\ddot{x} + kx}{c}\right) \quad (27)$$

Combinando (26) y (27) se obtiene la ecuación característica del modelo Zener:

$$m\ddot{x} + \frac{Nkm}{c}\ddot{x} + k(N+1)\dot{x} + \frac{Nk^2}{c}x = 0 \quad (28)$$

Finalmente dividiendo la ecuación entre m , y usando la definición de la razón de amortiguamiento crítico, y frecuencia natural, la ecuación (28) se puede escribir en términos no dimensionales como:

$$\ddot{x} + \frac{N\omega_n}{2\zeta}\ddot{x} + \omega_n^2(N+1)\dot{x} + \frac{N\omega_n^3}{2\zeta}x = 0 \quad (29)$$

Es importante notar que el término razón de amortiguamiento crítico ζ ha sido convenientemente usado para expresar la ecuación característica de una manera más simple, sin embargo la definición comúnmente aceptada para este término no es válida para el modelo Zener, como se verá a continuación.

Considerando la ecuación (30), la cual es característica de un sistema MKC en vibración libre, resulta que el sistema tendrá dos raíces dado el hecho de que es de segundo orden.

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (30)$$

La ecuación característica del modelo Zener se puede escribir como:

$$s^3 + \frac{N\omega_n}{2\zeta}s^2 + \omega_n^2(N+1)s + \frac{N\omega_n^3}{2\zeta} = 0 \quad (31)$$

Y su solución general:

$$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + Ce^{s_3 t} \quad (32)$$

Como se ha mencionado antes, el término ζ ha sido utilizado para facilitar que la ecuación característica sea escrita en forma no dimensional. Sin embargo, este término no representa la fracción de amortiguamiento crítico tal y como sucede en el sistema MKC. Refiriéndose al sistema MKC, se dice que el sistema es críticamente amortiguado cuando $\zeta = 1$, y a partir de este punto la respuesta deja de presentar un comportamiento oscilatorio.

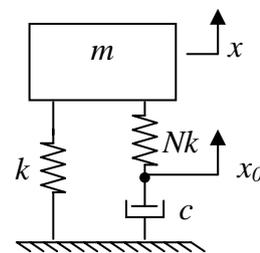


Figura 7. Modelo Zener en vibración libre.

Este fenómeno puede ser analizado con mayor atención en las figuras 8(a) y 8(b) las cuales muestran la respuesta en función del tiempo para el modelo Zener cuando $N=1$, y $N=4$, respectivamente. Adicionalmente la figura 8 incluye las gráficas de respuesta en vibración libre para los valores de N previamente considerados. Cuando $N=8$, hay un punto donde el sistema presenta un comportamiento críticamente amortiguado, y a medida que N aumenta, existe una región donde el sistema puede ser sobreamortiguado [9-11]. Esto significa que independientemente del valor de ζ usado en el modelo Zener, la respuesta del sistema siempre será oscilatoria a menos que $N > 8$. En otras palabras, el amortiguamiento crítico en el modelo Zener sólo puede darse si N es mayor o igual a 8.

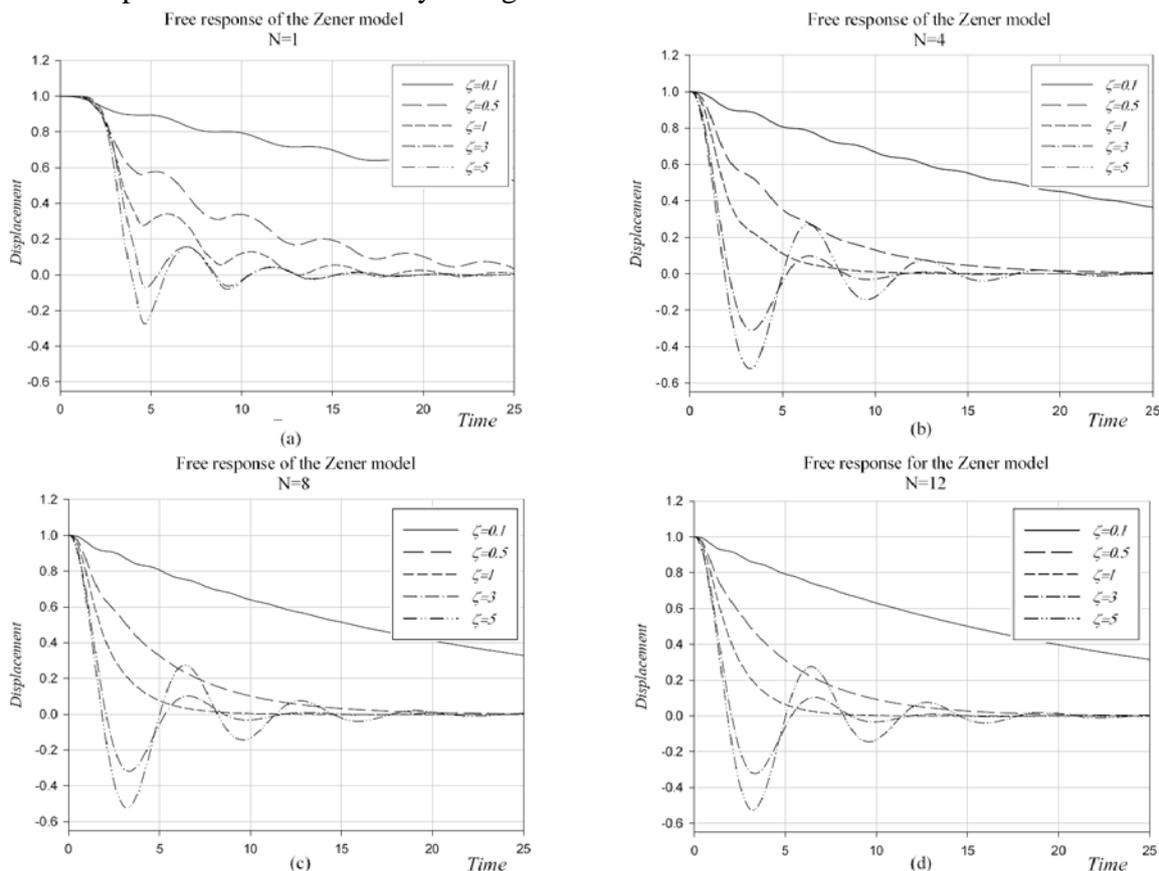


Figura 8. Gráficas de vibración libre para el modelo Zener, para diversos valores de amortiguamiento: (a) $N=1$, (b) $N=4$, (c) $N=8$ y (d) $N=12$.

3.3 Discusión del caso de vibración libre

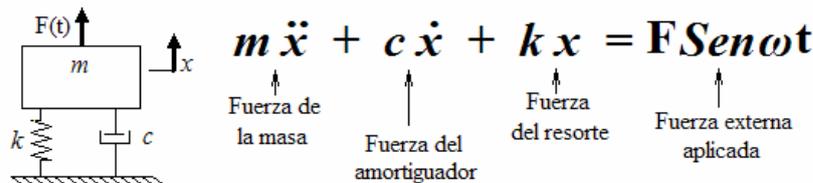
La respuesta a la vibración libre del modelo Zener representa, de mejor manera, la respuesta de un sistema con elementos viscoelásticos.

Muestra que el sistema puede presentar fluctuaciones durante la caída, aunque el sistema este sobreamortiguado.

4 Vibración forzada armónica

4.1 Análisis MKC

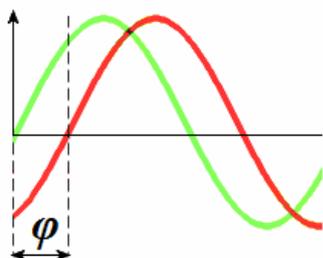
En la figura 9 se muestran las consideraciones para el análisis del modelo MKC bajo vibración forzada y el retraso φ de la vibración con respecto a la fuerza de excitación.



Supone que los resortes son lineales y metálicos (Ley de Hooke), que el amortiguador es lineal ($\propto c \dot{x}$) y que se le dan condiciones iniciales para que vibre.

Solución General $X = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + X_o \text{ Sen}(\omega t - \varphi)$

Generalmente se desprecia la vibración transitoria y sólo se considera la vibración de estado estable.



- La forma de onda de la fuerza determina la forma de onda de la vibración.
- La frecuencia de la fuerza determina la frecuencia de la vibración.
- La vibración se retrasa, con respecto a la fuerza de excitación, un ángulo φ .

Figura 9. Análisis clásico del sistema MKC en vibración forzada.

4.2 Análisis Zener

Para el análisis de la respuesta en vibración forzada del modelo Zener, se considera el modelo mostrado en la figura 10.

La ecuación característica se puede escribir como:

$$m\ddot{x} + kx + Nk(x - x_0) = F(t) \tag{33}$$

Como el amortiguador c y el elemento elástico Nk están en serie, los dos están afectados por la misma fuerza:

$$c\dot{x}_0 + Nk(x - x_0) = 0 \tag{34}$$

Combinando las ecuaciones (33) y (34), la ecuación para excitación armónica se expresa como:

$$m\ddot{x} + \frac{Nkm}{3}\ddot{x} + k(N+1)\dot{x} + \frac{Nk^2}{c}x = \dot{F}(t) + \frac{Nk}{c}F(t) \tag{35}$$

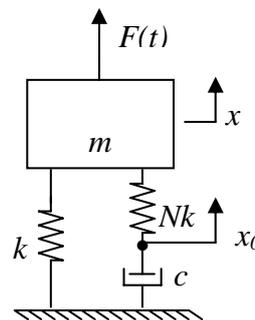


Figura 10. Modelo Zener sujeto a vibración forzada armónica.

Si se considera que la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia de transición, usando la ecuación (22), se obtiene el máximo factor de pérdida el cual está dado por:

$$\eta_{\max} = \frac{N}{2\sqrt{(N+1)}} \tag{36}$$

Basándose en la referencia [7] y usando la ecuación (35), la transmisibilidad del modelo Zener se expresa como:

$$T = \frac{\left\{ \left[R^2 + M^2 \right]^2 + \left[2RM\eta_{\max} \right]^2 \right\}^{1/2}}{\left\{ \left[R^2 + M^2 \right] - R^2 \left[R^2 + M^2 (N+1) \right] \left[\frac{1 + M^2}{1 + M^2 (N+1)} \right] + \left[2RM\eta_{\max} \right]^2 \right\}^{1/2}} \tag{37}$$

Donde $R = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$, $M = \left(\frac{\omega_t}{\omega_n} \right)$ y $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia natural del sistema. La transmisibilidad del modelo Zener está controlada por los parámetros M, y R. Para estudiar con detenimiento este modelo, la transmisibilidad se presenta en la figura 11, en donde cada figura representa un valor de N, y para cada una de ellas se consideran diversos valores de M. Como referencia han sido incluidas las curvas de transmisibilidad para un sistema MKC sin amortiguamiento (línea discontinua corta), y otro críticamente amortiguado (línea punteada). Gráficas adicionales pueden ser encontradas en las referencias [7, 12].

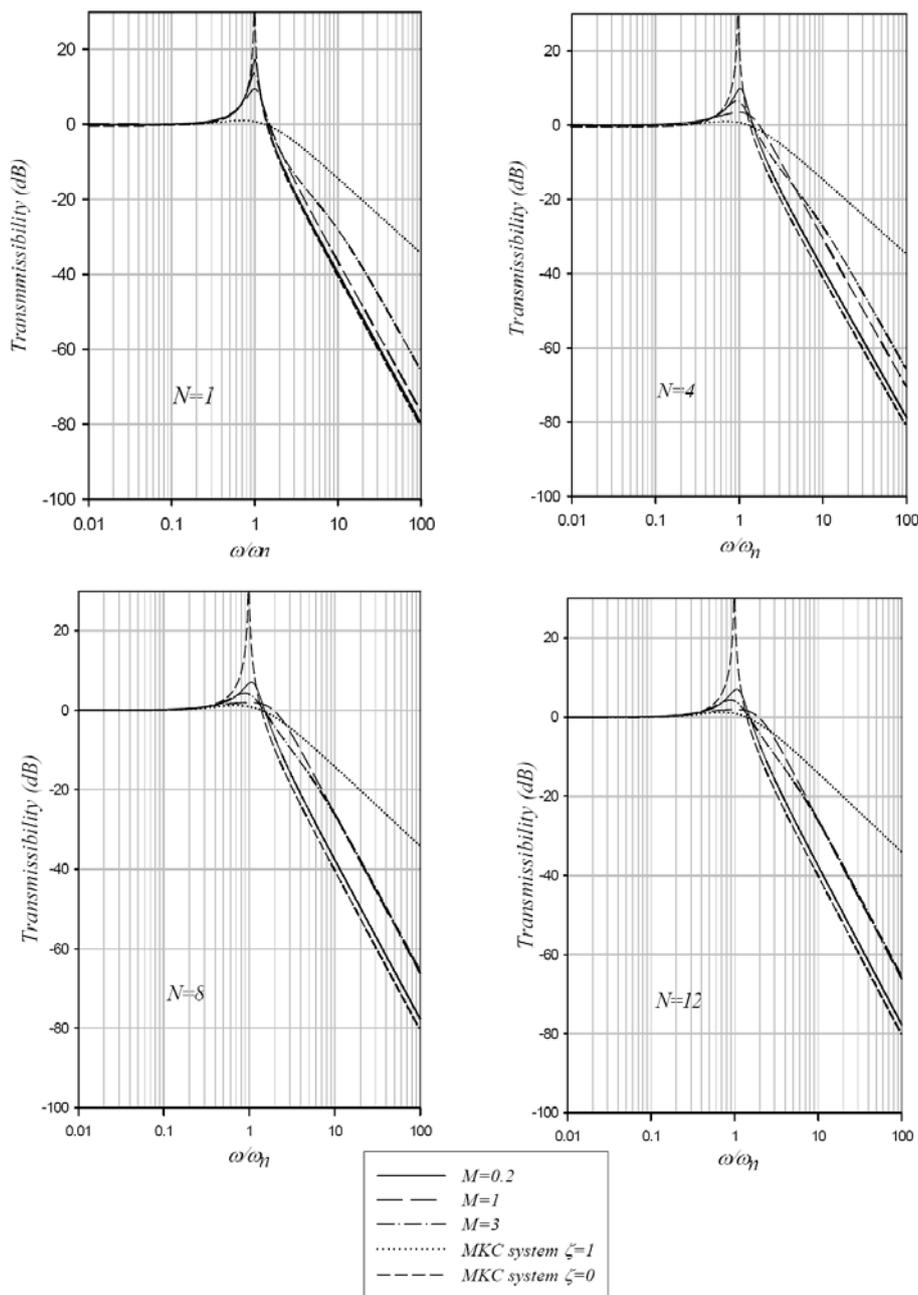


Figura 11. Transmisibilidad de vibración forzada para el modelo Zener, para diversos valores de amortiguamiento: N=1, N=4, N=8 y N=12.

En general, en la zona de resonancia, puede decirse que el modelo Zener y el modelo MKC presentan características similares, sin embargo, es importante notar que a medida que N aumenta, el pico de resonancia es suprimido con mayor facilidad, esto debido a que el factor de pérdida es directamente proporcional a N . La ventaja principal del modelo Zener se da en las altas frecuencias, con lo que se elimina en gran parte el problema de los sistemas MKC altamente amortiguados (donde se suprime el pico de resonancia pero la transmisibilidad aumenta en altas frecuencias). El modelo Zener presenta una pendiente de descenso de la transmisibilidad de 20 dB por década, similar a un sistema MK, es decir sin amortiguamiento. Esto es muy superior a los 10 dB por década de los sistemas MKC.

4.3 Discusión del caso de vibración forzada armónica

En vibración forzada armónica, el modelo Zener responde de manera óptima en las altas frecuencias con elementos viscoelásticos.

Se elimina en gran parte el problema de los sistemas MKC altamente amortiguados (donde se suprime el pico de resonancia pero la transmisibilidad aumenta en altas frecuencias).

5 Vibración por impacto

En el apartado de respuesta a impactos en el modelo Zener existe una cantidad mucho menor de artículos publicados. Una excepción notable es el trabajo de Snowdon [7]. En el presente artículo se considera el efecto y respuesta del modelo Zener a pulsos simples del tipo simétrico. Se consideran dos tipos de pulsos, uno rectangular, y otro medio seno. El principal objetivo del análisis es obtener el espectro de respuesta al impacto (conocido como SRS por sus siglas en inglés, Shock Response Spectra), y comparar el rendimiento de este modelo con el enfoque clásico MKC.

Para estudiar la respuesta al impacto, en este caso se usará una forma más general de la ecuación (35).

$$\ddot{x} + \frac{N\omega_n}{2\zeta} \dot{x} + \omega_n^2(N+1)x + \frac{N\omega_n^3}{2\zeta} x = \omega_n^2(N+1)\dot{u}(t) + \frac{N\omega_n^3}{2\zeta} u(t) \quad (38)$$

En esta expresión, $u(t)$ es una función impulsiva arbitraria, que puede tomar la forma de un torque, una fuerza impulsiva, desplazamiento en la base, aceleración, etc. El término x es la respuesta genérica relativa al parámetro de excitación. De esta manera el análisis de la respuesta es general y puede ser aplicado a diversas situaciones. Es importante señalar que en el análisis de impactos los parámetros de respuesta más importantes son la respuesta máxima X_{max} , que es la máxima respuesta debida a un impacto en cualquier instante, y la respuesta residual X_{res} , que es la máxima respuesta una vez que el impacto a terminado [13,14]. En este artículo se presta atención al estudio de la respuesta máxima.

Otro aspecto importante es la duración del impacto, τ . Durante este tiempo el sistema está sujeto a una cierta excitación, y después su respuesta es la de un sistema en vibración libre. La relación entre este parámetro y el periodo natural del sistema en cuestión T , es lo que dictará la respuesta de un sistema a un pulso en particular. Además, la forma del pulso o impacto también es muy importante en el análisis. Sin embargo, ha sido demostrado [13,14] que cuando el impacto es de una corta duración la forma de éste no tiene gran importancia, y sólo es importante cuando el impacto tiene una duración larga.

Las funciones de excitación consideradas en este análisis son:

Rectangular

$$\begin{cases} u(t) = U_c & [0 \leq t \leq \tau] \\ u(t) = 0 & [\tau \leq t] \end{cases} \quad (39)$$

Medio Seno

$$\begin{cases} u(t) = U_c \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) & [0 \leq t \leq \tau] \\ u(t) = 0 & [\tau \leq t] \end{cases} \quad (40)$$

La figura 12 muestra la representación gráfica de dichos pulsos.

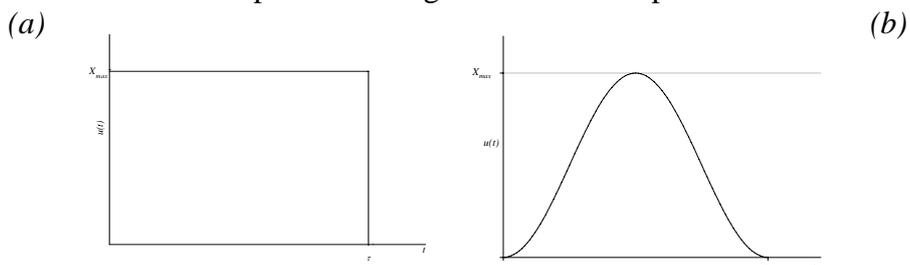


Figura 12. Representación gráfica de los pulsos usados para el análisis de la respuesta a impactos en el modelo Zener: (a) Pulso rectangular y (b) Pulso medio seno.

5.1 Análisis MKC

Un espectro se define como una gráfica de un parámetro de respuesta, contra frecuencia [11]. En el caso del SRS, está es simplemente una gráfica de la respuesta máxima del sistema producida por un impacto, en función de la frecuencia natural del sistema. Para impactos, es más conveniente usar el periodo natural del sistema, y la duración del impulso, por lo que el espectro no se grafica en función de la frecuencia natural, sino del período natural. Estrictamente, el SRS no es un espectro propiamente dicho, ya que es sólo una colección de la respuesta de una serie de sistemas con diferente frecuencia natural a un pulso en particular. Como referencia y para posterior comparación con el modelo Zener, se muestra el SRS de respuesta máxima para el modelo MKC, bajo una excitación medio seno y rectangular (ver figura 13).

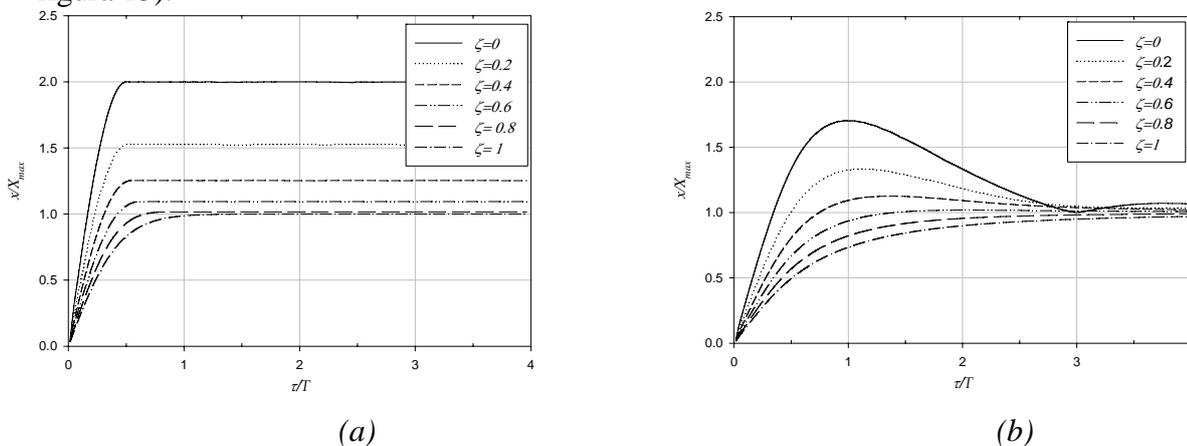


Figura 13. Gráficas de espectro de respuesta al impacto para el modelo clásico masa-resorte-amortiguador, para dos distintos pulsos: (a) pulso rectangular y (b) pulso medio seno.

5.2 Análisis Zener

En el caso del modelo Zener es difícil encontrar soluciones analíticas exactas. Debido a esto, el SRS ha sido calculado numéricamente usando rutinas de integración en MATLAB. La figura 14 presenta los SRS para el modelo Zener, para los pulsos rectangulares y la figura 15 para el pulso de tipo medio seno. Se incluyen valores de N iguales a 1, y 8, principalmente por que los resultados para otros valores son muy similares, a excepción de los casos extremos $N \approx 0$ y $N \approx \infty$, que representan a un sistema MK, y a un sistema MKC respectivamente. En el caso de $N \approx 0$, representa realmente un sistema MK sin amortiguamiento, ya que el amortiguador está desconectado del sistema. Es importante notar que para valores de N menores que 1, el sistema tiende a acercarse al comportamiento de un sistema sin amortiguamiento. Por otro lado, cuando N tiende a infinito, el elemento elástico Nk se comporta como un eslabón rígido, y por lo tanto el sistema presenta el comportamiento de un simple modelo MKC. Estas gráficas son muy similares a las del sistema MKC. Solamente en el caso de $N = 1$ aparecen pequeñas diferencias, sin embargo, el rendimiento de aislamiento del sistema es mas bajo. Debido a esto puede decirse que el modelo Zener y el modelo MKC presentan características de aislamiento de impactos muy similares, y la complejidad matemática involucrada con el modelo Zener no justifica su uso en la práctica.

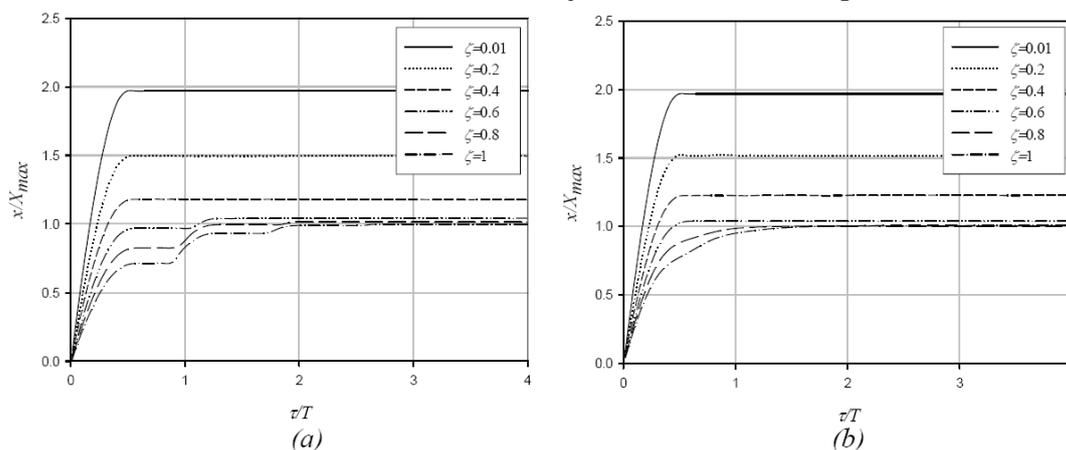


Figura 14. Gráficas de espectro de respuesta al impacto para el modelo Zener sujeto a un pulso rectangular, para dos valores de N : (a) $N=1$ y (b) $N=8$.

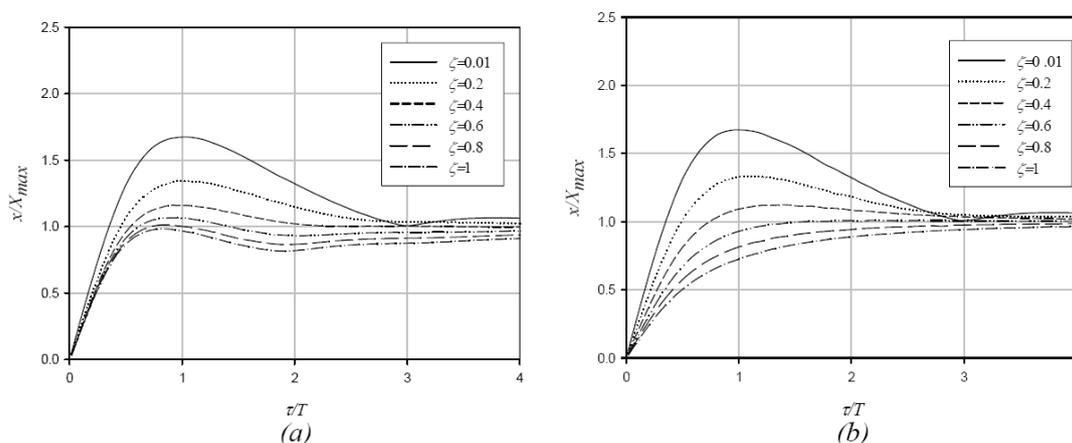


Figura 15. Gráficas de espectro de respuesta al impacto para el modelo Zener sujeto a un pulso medio seno, para dos valores de N : (a) $N=1$ y (b) $N=8$.

Para englobar y entender mejor los resultados obtenidos en el modelo Zener, se presenta una figura que muestra el efecto de diversos niveles de amortiguamiento en la respuesta máxima para diversos valores de N . Dicha gráfica se muestra en la figura 16. La comparación se da para los dos pulsos considerados. La respuesta máxima para el sistema MK ha sido tomada como referencia. Estas gráficas muestran claramente que la respuesta para ambos modelos es casi la misma, excepto para valores pequeños de N y pulso medio seno. Es en esta situación donde el rendimiento del modelo Zener es peor que el MKC.

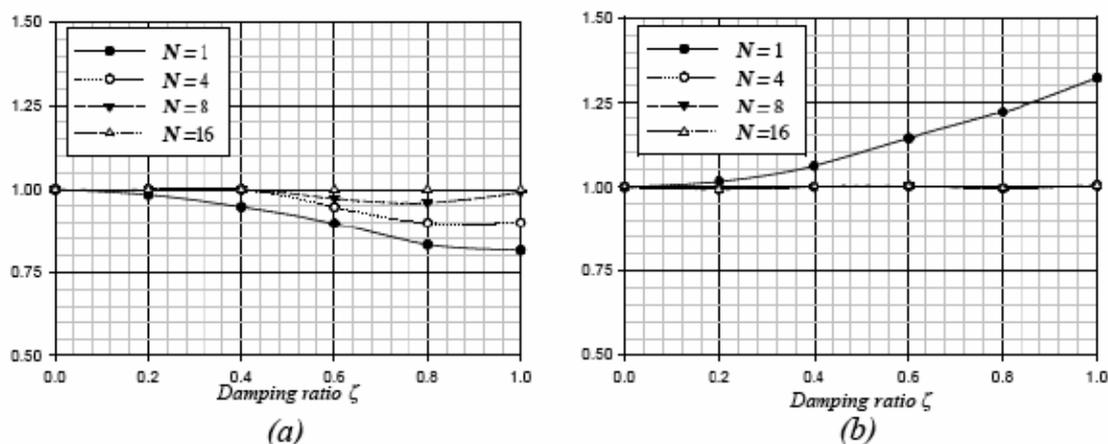


Figura 16. Comparación entre la respuesta máxima del modelo clásico masa-resorte-amortiguador y del modelo Zener para distintos valores de N . (a) Pulso rectangular. (b) Pulso medio seno.

5.3 Discusión del caso de vibración por impacto

A diferencia de los casos de vibración libre y forzada armónica, la respuesta del modelo Zener bajo vibración por impacto, no es muy diferente a la que se obtendría con un sistema clásico MKC.

Puede decirse que el modelo Zener y el modelo MKC presentan características de aislamiento de impactos muy similares, y la complejidad matemática involucrada en el modelo Zener no justifica su uso práctico.

6 Conclusiones

En base a lo antes discutido, varias conclusiones pueden ser obtenidas:

- En vibración libre, al comparar la respuesta del modelo Zener, utilizando materiales viscoelásticos, con la respuesta del modelo MKC, se puede concluir que el modelo Zener la representa de mejor manera. Mostrando que el sistema, aunque esté sobreamortiguado, puede presentar fluctuaciones durante la caída.
- En vibración forzada armónica, el modelo Zener responde de manera óptima en las altas frecuencias con elementos viscoelásticos, eliminando en gran parte el problema de los sistemas MKC altamente amortiguados.
- En vibración por impacto, el modelo Zener y el MKC presentan una respuesta muy similar, la complejidad matemática del modelo Zener es mayor que la del MKC, por lo que su uso práctico es poco rentable.

Referencias

- [1] Irwin J.D, Graf E.R, 1979: Industrial noise and vibration control, New Jersey, Prentice Hall.
- [2] Skudrzyk E, 1968: Simple and complex vibratory systems, The Pennsylvania State University press.
- [3] Nashif A.D, Jones D.I.G, Henderson J.P, 1985: Vibration damping, New York, Wiley and sons.
- [4] Beranek L.L, 1971: Noise and vibration control, New York , McGraw-Hill.
- [5] Zener C.M, 1948: Elasticity and anelasticity of metals , Chicago, University of Chicago Press.
- [6] Lakes R.S, 1998: Viscoelastic solids, Florida, CRC Press.
- [7] Snowdon J C, 1968: Vibration and shock in damped mechanical systems, New York, Wiley and sons.
- [8] Close C. M, Frederick D.K, 1995: Modeling and analysis of dynamic systems, New York, John Wiley and sons.
- [9] Ruzicka J.E, Derby T.F, 1971: Influence of damping in vibration isolation, US Department of Defence.
- [10] Ledezma, D.F., Ferguson, N.S., and Brennan, M.J., An overview of the Single degree of Freedom System and the Zener Model for Shock Isolation, Institute of Sound and Vibration Research, Technical Memorandum 947, University of Southampton, June 2005.
- [11] Carella, A., Brennan, M.J., Waters, T.P., Analysis of an isolation system consisting of a parallel combination of a spring and a elastically supported damper. Recent Advances in Structural Dynamics Conference, 2006.
- [12] Snowdon J C, 1963: Steady state and transient behaviour of two and three element isolation mountings, The Journal of the Acoustical Society of America, 35(3) 397-403.
- [13] Ayre, R. S, 1958: Engineering vibrations, New York , McGraw-Hill.
- [14] Harris and Creede, 1996: Shock and vibration handbook, New York, McGraw-Hill.
- [15] Chandra N.S, Hatwal H, Mallik M.K, 1999: Performance of non linear isolators and absorbers to shock excitations, Journal of Sound and Vibration, 227(2) 293-307.