



VI Congreso Iberoamericano de Acústica - FIA 2008
Buenos Aires, 5, 6 y 7 de noviembre de 2008

FIA2008-C001

Aproximaciones al problema de radiación sonora de estructuras vibratorias

Jorge P. Arenas^(a),

(a) Instituto de Acústica, Facultad de Cs. de la Ingeniería, Universidad Austral de Chile. Casilla 567, Campus Miraflores, Valdivia, Chile. E-mail: jp Arenas@uach.cl

Abstract

The study of sound radiation from vibrating structures has been the subject of research for decades, due to its practical applications in both engineering acoustics and noise control. A vibrating structure interacting with a fluid medium radiates sound waves that form the basis of a vibroacoustic problem. In general, this problem can be solved using integral expressions that include the specific boundary conditions. However, the analytic and numerical solutions of these equations are computationally expensive. In some cases, transformation to the wave-space is used to estimate the sound power and sound pressure radiated. In this work, an historic overview of different approximations and methods used to solve these problems is presented. In addition, some recently developed methods of solution that use matrix equations and eigenanalysis, singular value decomposition and radiation and propagation matrices are reviewed. Several vibroacoustic practical cases are presented and some fundamentals of the application to optimization techniques are discussed.

Resumen

El estudio de la radiación sonora de las estructuras vibratorias ha sido un tema de interés por décadas, debido a las numerosas aplicaciones prácticas en ingeniería acústica y en el control del ruido. Una estructura vibratoria que interactúa con un medio fluido genera ondas sonoras y constituye el problema básico vibro-acústico. En general, este problema se puede resolver mediante expresiones integrales que incluyen las condiciones de borde específicas. Sin embargo, la solución analítica o numérica de estas ecuaciones presenta problemas de enorme costo computacional. En otros casos, se emplean las transformaciones al espacio de onda, que permiten estimar la potencia y la presión sonora radiada. En este trabajo, se expone una visión histórica de las distintas aproximaciones y métodos usados para obtener la solución de estos problemas. Además, se presentan algunos métodos recientes de solución, usando ecuaciones matriciales y el análisis de valores y vectores propios, descomposición en valores singulares y matrices de radiación y propagación. Se presentan varios casos prácticos de vibro-acústica y se discuten algunos fundamentos de la aplicación de optimización usando estas técnicas de solución.

1 Introducción

El estudio de la radiación sonora de estructuras vibratorias ha generado un número considerable de publicaciones. La mayor parte de los fenómenos prácticos de radiación sonora incluyen una estructura superficial, la cual vibra producto de alguna fuerza de excitación. Las fuerzas de excitación pueden ser de origen mecánico o bien de algún fluido. Estas fuerzas inducen una vibración en la estructura, que se traduce en una respuesta mecánica de ésta. Debido a que el fluido que rodea la estructura presenta una resistencia a la vibración (carga de radiación), esta respuesta mecánica se convierte en una respuesta acústica. Esto forma la base del problema vibro-acústico, esto es, la transferencia de energía vibratoria a energía acústica. El diagrama que representa el problema vibro-acústico se muestra en la figura 1. En ciertas aplicaciones, nos interesa que la eficiencia de esta transferencia sea alta, como en el caso de los altavoces. En la mayoría de los problemas que involucran ruido, nos preocupamos que esta eficiencia sea mínima [1].

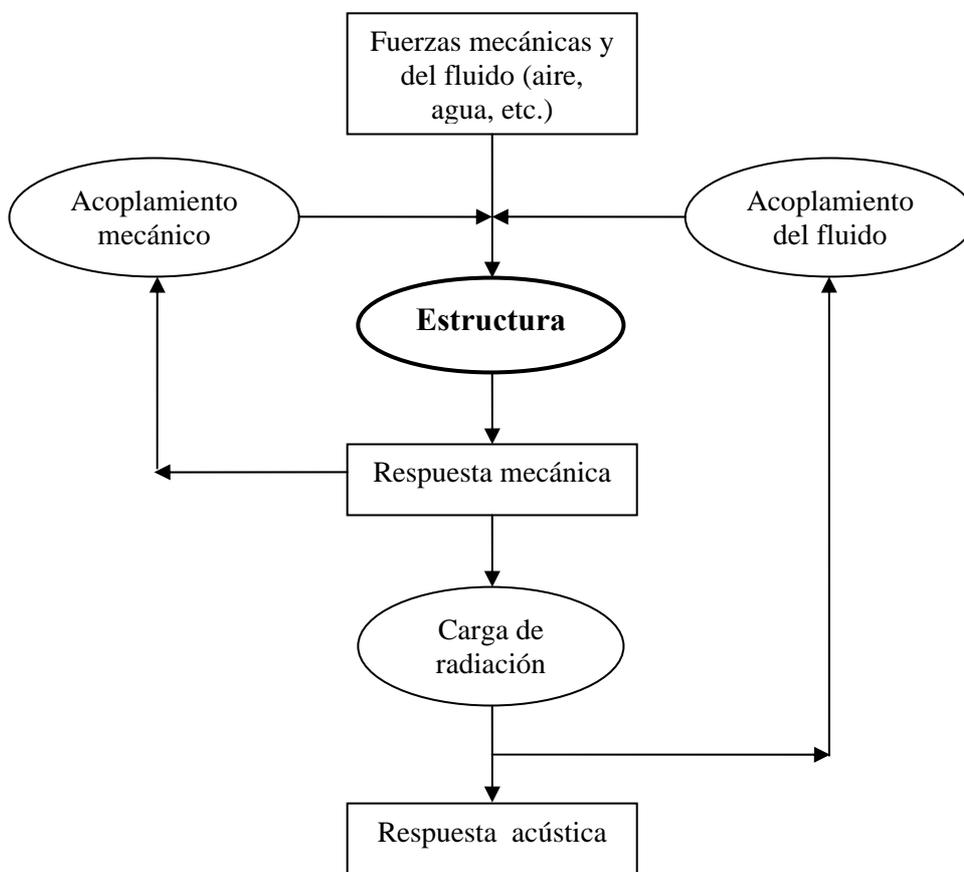


Figura 1. Problema vibro-acústico.

La principal complicación en la determinación de la respuesta acústica, radica en los acoplamientos que se producen entre la estructura y el fluido. Estos acoplamientos son, en la mayoría de los casos, difíciles de determinar y se debe resolver el problema mediante aproximaciones analíticas, métodos numéricos o métodos estadísticos [1].

El objetivo principal de este trabajo, es presentar algunos métodos aproximados, mediante el uso de matrices, para la estimación de la radiación acústica de una estructura vibratoria.

2 Radiación acústica

Para la obtención de la radiación acústica de una estructura vibratoria, se debe observar que el vector de vibración sobre una estructura, se puede descomponer en una parte tangencial y otra normal. El movimiento tangencial no aporta al movimiento de partículas del fluido que rodea la estructura y solamente la componente normal de la velocidad es significativa. Así, el método general consiste en resolver la ecuación integral de Kirchhoff-Helmholtz, que es la base del método de elementos de contorno [1] y que determina la presión sonora radiada por una superficie vibratoria S , rodeada de un fluido de densidad ρ , a una distancia r externa a esta superficie. Esta ecuación es:

$$p(r, \omega) = \iint_S \left[p(r', \omega) \frac{\partial G(r | r')}{\partial n} + j\rho\omega V(r', \omega) G(r | r') \right] dS, \quad (1)$$

donde ω es la frecuencia de la vibración, r' es un punto ubicado sobre la superficie de la estructura, n indica la dirección normal a un plano perpendicular sobre la superficie, V es la amplitud de la velocidad normal a la superficie y $G(r|r')$ es una función de Green. Evidentemente, el método requiere la división de la superficie S , en un número suficiente de elementos dS , pequeños en comparación con la longitud de onda del sonido radiado. La figura 2 muestra la geometría para la aplicación de la ecuación (1).

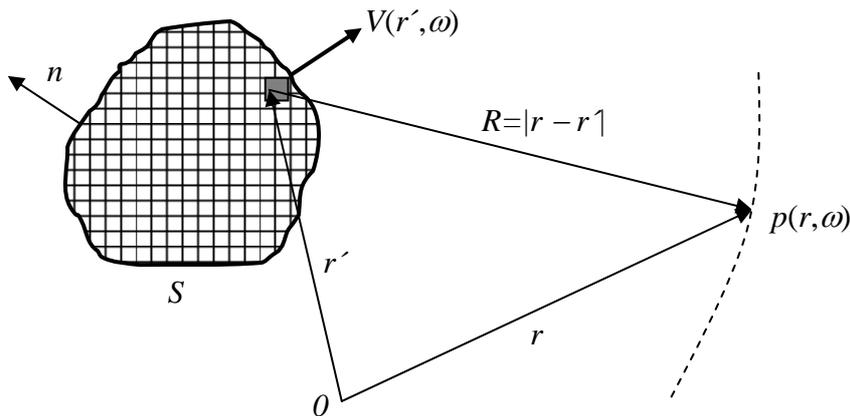


Figura 2. Geometría para el cálculo de la integral de radiación de Kirchhoff-Helmholtz.

La ecuación (1) se puede resolver, en la mayoría de los casos, mediante métodos numéricos especiales, que pueden ser extremadamente exigentes desde un punto de vista computacional. Además, se requiere saber a priori la función de Green asociada al problema, que puede adoptar formas muy complicadas, dependiendo del caso a estudiar.

Debido a que la mayoría de las estructuras prácticas se componen de barras, placas y cáscaras, el estudio de la radiación sonora de este tipo de elementos ha sido de mucha importancia en la acústica [1]. En particular, en este trabajo se discutirá la aplicación al problema de placas vibratorias planas montadas en un sonodeflector infinito, que es una superficie totalmente rígida, y sobre la cual la función de Green satisface la condición de borde de Neumann. En este caso, la ecuación (1) adopta una forma más simple, conocida como la ecuación integral de Rayleigh:

$$p(r, \omega) = \frac{j\omega\rho}{2\pi} \iint_S V(r', \omega) \frac{e^{-jkR}}{R} dS, \quad (2)$$

donde $k=\omega/c$, es el número de onda y c es la velocidad del sonido. Aún cuando la ecuación (2) es más simple que la ecuación (1), su evaluación analítica es posible sólo para unos pocos casos prácticos, siendo el pistón circular el más conocido. Para la mayoría de las aplicaciones, la ecuación (2) requiere de una integración numérica. Sin embargo, este método puede ser muy ineficiente de computar. Además, y debido a la singularidad que se produce cuando $r=r'$, la ecuación (2) se puede resolver también mediante el cálculo de residuos, usando variable compleja. La potencia sonora W , radiada por la estructura, se obtiene mediante la ecuación:

$$W = \iint_{S(r)} \text{Re}\{p(r, \omega)u(r, \omega)\} dS(r), \quad (3)$$

donde u es la velocidad de partículas y $S(r)$ es una superficie arbitraria que encierra la totalidad de la estructura vibratoria y por la cual fluye la energía sonora. Observando la ecuación (2) y (3), podemos apreciar que la determinación de la potencia radiada por una estructura, requiere el cálculo de dos integrales de superficie por cada frecuencia, lo cual puede tener un costo computacional enorme [2].

3 Métodos aproximados

Debido a que la superficie vibratoria requiere ser discreta, los métodos que hacen uso del cálculo de matrices resultan ideales para resolver estos problemas. En esta sección se presentan algunos de estos métodos para superficies vibratorias planas.

3.1 Resistencia de radiación modal

Cuando una placa es excitada en una frecuencia dada, la respuesta mecánica de la placa, asumiendo linealidad, se puede obtener mediante la superposición de un número de respuestas modales individuales. La velocidad normal de la placa, en un punto r sobre su superficie, es:

$$V(r) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i \psi_i(r), \quad (4)$$

donde V_i es la amplitud de velocidad del modo i -ésimo y $\psi_i(r)$ es la función modal asociada (función propia) en la posición r . Para estimar la ecuación (4), se puede truncar la serie considerando un número finito N de modos, que asegure la convergencia. Así, la potencia radiada se puede expresar como una ecuación matricial, dada por [3]:

$$W = \mathbf{v}^H \mathbf{M} \mathbf{v}, \quad (5)$$

donde \mathbf{v} es el vector columna de las N amplitudes modales $\{V_i\}^T$, H denota el hermitiano y \mathbf{M} es una matriz $(N \times N)$ simétrica, definida positiva, denominada matriz de *resistencia de radiación modal*, y cuyos elementos son:

$$M_{ik} = \frac{\omega\rho}{4\pi} \iint_S \iint_{S'} \psi_i^*(r') \frac{\sin kR}{R} \psi_k(r) dS' dS. \quad (6)$$

La ecuación (6) permite determinar la auto-resistencia ($i=k$) y la resistencia mutua modal ($i \neq k$). Es importante notar que los elementos de la matriz \mathbf{M} dependen de la

distribución de velocidad sobre la placa, la cual depende a su vez de las condiciones de borde. Además, la evaluación de la ecuación (6) requiere el cálculo de una integral cuádruple. La ecuación (6) ha sido analizada teóricamente para varias geometrías y distintas condiciones de borde, resultando en soluciones aproximadas.

3.2 Resistencia de radiación acústica

Un método distinto, pero también matricial, consiste en dividir la superficie vibratoria en un conjunto de N elementos virtuales. Así, la dimensión del problema está dada por el número de sub-divisiones de la estructura, en lugar del número de modos considerado. Esto corresponde a un modelo de parámetros concentrados, el cual usa una representación simplificada de la distribución de velocidad sobre la estructura.

Asumiendo que el largo característico del elemento de superficie es pequeño, comparado con la longitud de onda, la presión y la velocidad pueden ser consideradas constantes sobre cada elemento y se pueden representar por un valor promedio. De esta forma, la potencia radiada por la estructura es [2, 4]:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N R_{ik} u_i u_k^* = \frac{1}{2} \mathbf{u}^H \mathbf{R} \mathbf{u}, \quad (7)$$

donde $\mathbf{u} = \{u_i\}^T$ es el vector complejo de velocidades de volumen (velocidad normal por dS) y \mathbf{R} es la matriz simétrica y real de *resistencia de radiación acústica*, de orden $N \times N$.

De la ecuación anterior podemos observar que como W es una cantidad positiva, la matriz \mathbf{R} definida positiva. Además, la matriz \mathbf{R} puede descomponerse como $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}$, donde \mathbf{Q} es una matriz real unitaria de vectores propios \mathbf{q}_i y $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz diagonal de valores propios, positivos y reales, λ_i . Entonces, W puede escribirse como:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{y}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{y}, \quad (8)$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \mathbf{u}$ es un conjunto de amplitudes transformadas por los vectores propios de la matriz de resistencia. Por lo tanto, la ecuación (8) puede escribirse como:

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^T |\mathbf{y}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i |y_i|^2. \quad (9)$$

La ecuación (9) muestra que cada distribución de velocidad superficial radia sonido de forma independiente, lo que es congruente con otros modelos de radiación acústica. Queda establecido que si la estructura vibra con una velocidad superficial proporcional a uno de los vectores propios de la matriz \mathbf{R} , entonces la vibración corresponde sólo a un modo de radiación. Entonces, las eficiencias de radiación de los modos de radiación pueden calcularse mediante una descomposición en valores y vectores propios de la matriz \mathbf{R} . Es importante notar que, a diferencia de la matriz \mathbf{M} , los elementos de \mathbf{R} no dependen de la distribución de velocidad ni de las condiciones de borde de la placa.

Si la estructura vibra con velocidad superficial proporcional a uno de los vectores propios de \mathbf{R} , digamos \mathbf{q}_i , esta velocidad está totalmente en fase o totalmente fuera de fase. Al fenómeno que ocurre en estos casos, se le denomina *modo de radiación*. Estos modos pueden ser *evanescentes* (pequeños λ_i), que existen sólo en el campo cercano o modos *propagativos* (grandes λ_i) que se propagan eficientemente en el campo lejano [2].

3.3 Modelo de pistones elementales

En particular, para una superficie vibratoria dividida en N elementos virtuales, se requiere que cada elemento sea considerado como un radiador elemental, cuya velocidad de volumen corresponda a la velocidad de volumen de cada elemento. De esta manera, se evalúan los elementos de la matriz \mathbf{R} para una geometría dada. La mayoría de las aproximaciones utilizan modelos de fuentes puntuales. Sin embargo, una alternativa, y que permite obtener mejores aproximaciones, consiste en utilizar un modelo de pistones circulares planos, de áreas equivalentes a la del elemento que representan. De esta manera, los valores de los elementos de \mathbf{R} se calculan por [2, 4, 5]:

$$R_{ik} = \begin{cases} \rho c S_i \left[1 - \frac{J_1(2ka_i)}{ka_i} \right] & i = k \\ \frac{2\rho c k^2 S_i S_k}{\pi} \left[\frac{J_1(ka_i)}{ka_i} \frac{J_1(ka_k)}{ka_k} \right] \frac{\sin kr_{ik}}{kr_{ik}}, & i \neq k \end{cases}, \quad (10)$$

donde J_1 es la función de Bessel de primer orden, S_i es la superficie del pistón equivalente, a_i es el radio del pistón equivalente y r_{ik} es la distancia entre el pistón i y k .

3.4 Presión sonora radiada

En las secciones anteriores, se ha discutido la metodología para estimar un parámetro global, como es la potencia acústica, mediante métodos aproximados. Sin embargo, a veces es necesario tener la información respecto a la distribución de la presión sonora, como un parámetro local.

Si asumimos una carga del fluido despreciable (el caso del aire, por ejemplo), los problemas acústico y vibratorio se pueden analizar independientemente. Así, una versión discreta de la integral de radiación se puede también representar por el método de parámetros concentrados. Considerando que la superficie se divide en N elementos iguales y que el campo de recepción se divide en M puntos discretos, podemos escribir que la presión sonora es igual a la transformación lineal de las velocidades de volumen [6]:

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{u}, \quad (11)$$

donde \mathbf{p} es un vector ($M \times 1$) de presión sonora, \mathbf{G} es la matriz ($M \times N$) de propagación y \mathbf{u} es el vector ($N \times 1$) de velocidad de volumen. Se puede notar que la matriz \mathbf{G} es compleja, independiente de la distribución de vibración sobre la superficie y que, al igual que \mathbf{R} , depende sólo de la geometría de la placa y de la frecuencia. Si consideramos nuevamente el modelo de pistones elementales, los elementos de la matriz de propagación son:

$$G_{ik} = j \frac{\rho c}{\pi r_a} \frac{J_1(kr_a \sin \theta)}{r_{MN} \sin \theta} e^{-jkr_{MN}}, \quad (12)$$

donde r_{MN} es la distancia entre el elemento N y el punto del campo M , r_a es el radio del pistón circular equivalente y θ se calcula como (ver figura 3):

$$\sin \theta = \sqrt{1 - (z'/r_{MN})^2}. \quad (13)$$

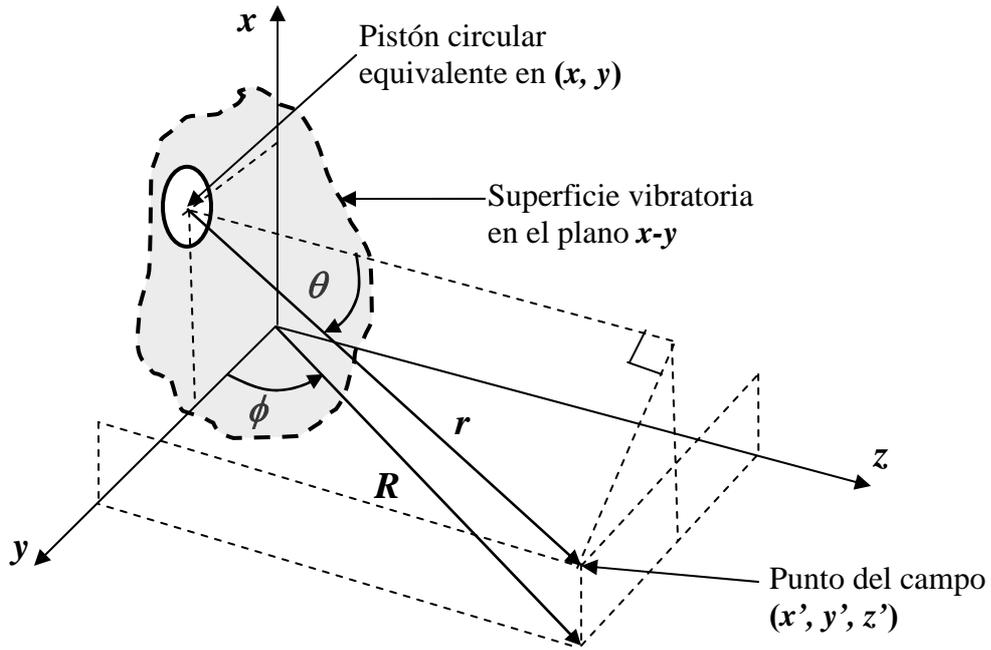


Figura 3. Geometría para el cálculo de la presión sonora radiada.

El cómputo de la ecuación (11) puede ser simplificado aún más, usando la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz de propagación \mathbf{G} . Dada esta matriz \mathbf{G} , existen dos matrices unitarias \mathbf{V} y \mathbf{B} , tales que podemos escribir:

$$\mathbf{B}^H \mathbf{G} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

donde $\mathbf{\Sigma}$ es una matriz diagonal de valores singulares $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_L)$, L es el rango de la matriz \mathbf{G} , y $\mathbf{0}$ es la matriz nula. Los valores singulares están ordenados como $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_L > 0$.

Las columnas de la matriz unitaria \mathbf{V} , esto es, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$, son los vectores singulares derechos de \mathbf{G} , y las columnas de la segunda matriz unitaria \mathbf{B} , esto es, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_M$ son los vectores singulares izquierdos de \mathbf{G} . Además, los vectores singulares derechos son los vectores propios de $\mathbf{G}^H \mathbf{G}$, mientras los vectores singulares izquierdos son los vectores propios de $\mathbf{G} \mathbf{G}^H$. Debido a que $\mathbf{B} \mathbf{B}^H$ es igual a la matriz identidad, obtenemos que:

$$\mathbf{G} \mathbf{V} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \mathbf{v}_i &= \sigma_i \mathbf{b}_i, & i &= 1, 2, \dots, L. \\ \mathbf{G} \mathbf{v}_i &= \mathbf{0}, & i &= L+1, \dots, M. \end{aligned}$$

Entonces, podemos expresar \mathbf{G} mediante la expansión [6]:

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^L \sigma_i \mathbf{b}_i \mathbf{v}_i^H. \quad (16)$$

Por lo tanto, al considerar los valores singulares más importantes de la matriz de propagación \mathbf{G} (modos dominantes), la ecuación (16) se puede usar en la ecuación (11), para obtener el vector de presiones sonoras, \mathbf{p} . Este proceso reduce considerablemente el espacio en memoria y el tiempo de cómputo [6].

4 Ejemplos de aplicación

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos para varias geometrías y condiciones de borde, utilizando la matriz de resistencia acústica y la matriz de propagación. En la figura 4, se muestran los resultados de la eficiencia de radiación para varios modos de vibración de una placa cuadrada, para dos condiciones de borde distintas [4, 7]. Estos resultados, obtenidos con la teoría de la matriz de radiación acústica, coinciden en forma perfecta con los resultados obtenidos por Wallace, quien usó integración directa de la ecuación de Rayleigh.

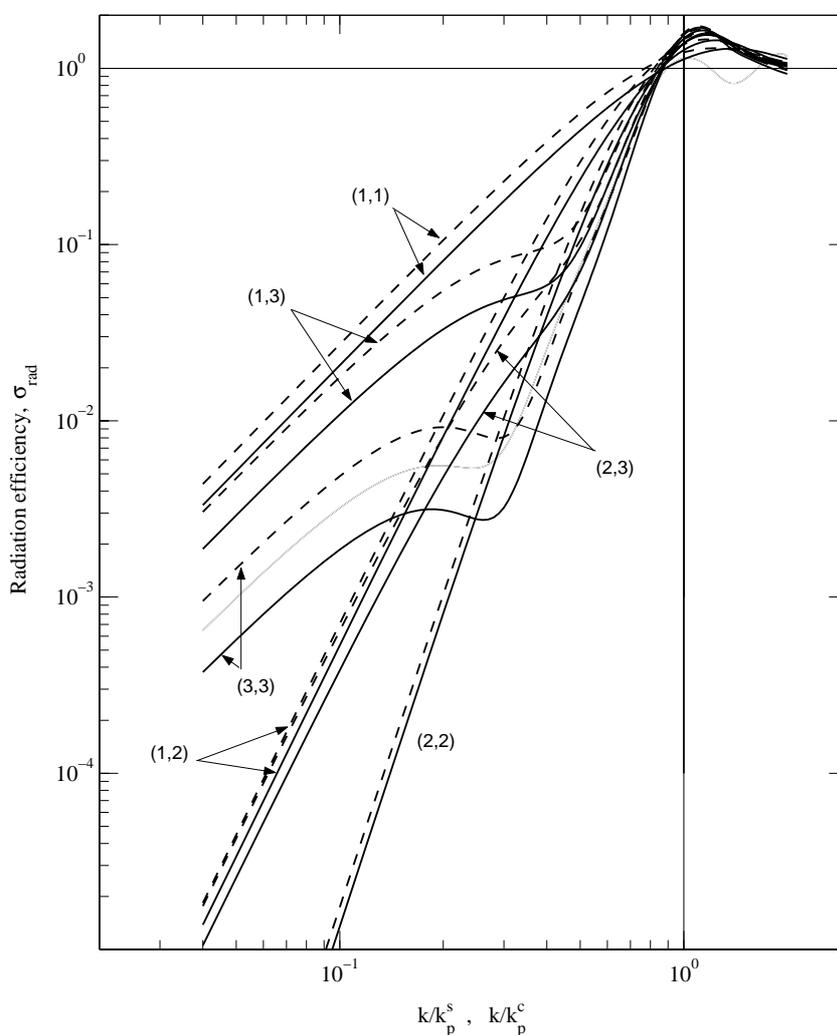


Figura 4. Eficiencia de radiación para algunos modos de una placa cuadrada: — bordes con soporte simples; - - - bordes empotrados. Los resultados se expresan en función del parámetro adimensional, donde k_p^S y k_p^C indican el número de onda estructural para soportes simples y empotrados, respectivamente [4].

Otra aplicación interesante de este método es la optimización de materiales. En la figura 5 se muestran los resultados del nivel de potencia sonora para una placa cuadrada, con soportes simples, hecha de poliestireno, vidrio y acero. Observamos que la placa de poliestireno genera un nivel de 70 dB cerca de su primera resonancia a 30 Hz. La placa de vidrio y acero, radian menos potencia hasta los 50 Hz, donde el nivel no excede los 40 dB [3].

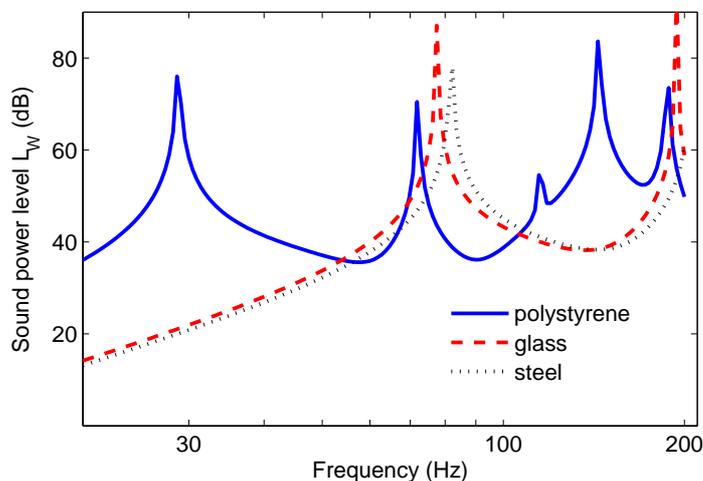


Figura 5. Nivel de potencia sonora radiada por una placa cuadrada ($0.6 \times 0.6 \times 0.006$ m³), hecha de tres diferentes materiales [3].

La figura 6 muestra los resultados de potencia sonora en tercios de octava, calculada para una placa cuadrada de aluminio simplemente soportada, a la cual se le ha adosado un material viscoelástico comercial. La distribución de vibraciones se obtuvo mediante un método combinado de la teoría RUK y FEM. Se observa que el material GP-3 (de 3M), produce los mejores resultados de reducción de ruido. Sin embargo, este es el material que incrementa más el peso total del sistema compuesto [8].

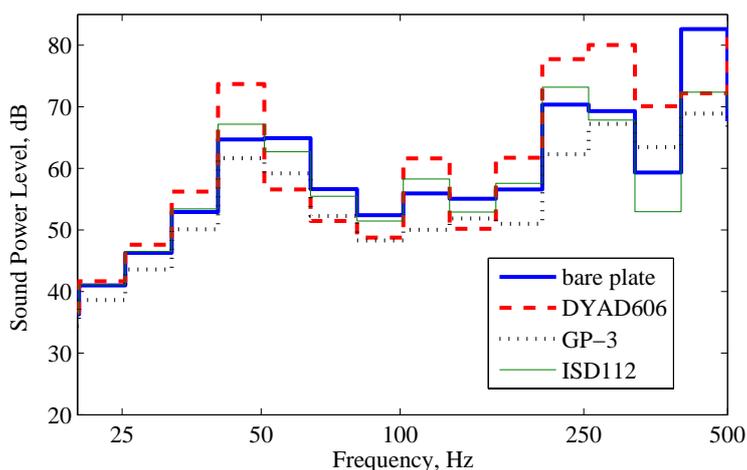


Figura 6. Nivel de potencia sonora radiada por una placa cuadrada de aluminio ($400 \times 400 \times 1.5$ mm), con diferentes materiales viscoelásticos adosados [8].

Finalmente, la figura 7 muestra los resultados de la presión sonora axial, para varios pistones elípticos, donde a y b son los semiejes menores y mayores, respectivamente. Los resultados se presentan como función de la distancia normalizada $S = \frac{1}{2}(z\lambda/a^2 + z\lambda/b^2)$, donde

$z\lambda/a^2$ y $z\lambda/b^2$ son las distancias medidas en unidades de la transición del campo cercano a^2/λ y b^2/λ , para un pistón circular de radio a y b , respectivamente. Estos resultados corresponden exactamente con los calculados por otros métodos. para valores de $S > 0.1$ [6].

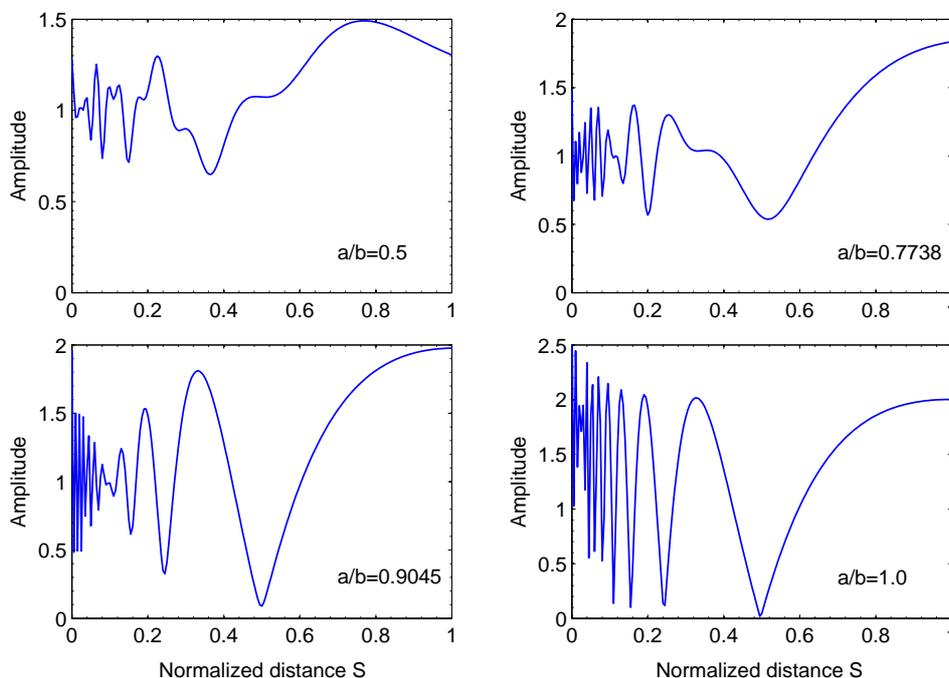


Figura 7. Amplitud de la presión sonora axial para pistones elípticos de diferente aspecto, en función de la distancia normalizada S [6].

5 Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por CONICYT-FONDECYT, proyecto No 1060117.

Referencias

- [1] Gerges, S.N.Y.; Arenas, J.P. (2004). Fundamentos del control de ruido y vibraciones”. NR Editora, Florianópolis, Brasil.
- [2] Arenas, J.P. (2008). “Numerical computation of the sound radiation from a planar baffled vibrating surface”. J. Comput. Acoust. 16(3), in press.
- [3] Arenas, J.P. (2008). “Matrix method for estimating the sound power radiated from a vibrating plate for noise control engineering applications”. Submitted to Lat. Am. Appl. Research.
- [4] Arenas, J.P.; Crocker, M.J. (2002). “Sound radiation efficiency of a baffled rectangular plate excited by harmonic point forces using its surface resistance matrix”. Int. J. Acoust. Vib., 7(4), 217-232.
- [5] Arenas, J.P.; Albarracín, C. (2007). “Estimation of the active and reactive sound power using hyper-matrices of impedance”. Proc. 14 Int. Congress on Sound and Vibration, Cairns, Australia.
- [6] Arenas, J.P.; Ramis, J.; Alba, J. (2008). “Far-field sound radiation from a baffled elliptical piston using a lumped-parameter model and singular value decomposition”. Proc. 15 Int. Congress on Sound and Vibration, Daejeon, Korea.
- [7] Arenas, J.P. (2003). “On the vibration analysis of rectangular clamped plates using the virtual work principle”. J. Sound Vib. 266(4), 912-918.
- [8] Arenas, J.P.; Hornig, K.H. (2008). “Sound power radiated from rectangular plates with unconstrained damping layers”. Proc. 9th Int. Conf. on Comp. Struct. Tech., Athens, Greece.