

LOS ERRORES DE DISCRETIZACIÓN EN LA MEDIDA DEL AMORTIGUAMIENTO MEDIANTE UN MÉTODO EXACTO PARA UN SISTEMA CON AMORTIGUAMIENTO VISCOZO O HISTERÉTICO NO LIGERO

PACS: 43.20.Ye ; 43.40.At ; 43.40.Yq

David K. Anthony

Instituto de Acústica (Consejo de Investigaciones Científicas)
C/ Serrano 144
28006 Madrid, Spain.
Tel: +34 91 561 8806
E-mail: iaca344@ia.cetef.csic.es

Resumen

El uso de la parte real del espectro de receptancia permite la medida del amortiguamiento viscoso o histerético a través de la receptancia, (incluso para amortiguamiento no ligero). Es importante considerar los errores procedentes de la discretización que siempre sufren las medidas experimentales. Este efecto puede tener importancia incluso si el amortiguamiento es ligero. Aquí se consideran los errores sistemáticos y de cuantización para poder estimar los errores con el fin de definir la resolución necesaria para obtener una exactitud requerida. De este se puede calcular el intervalo en el que se encuentra el valor verdadero sabiendo el valor medido y la resolución en frecuencia.

Palabras-clave: ensayo de vibraciones, alto amortiguamiento, análisis modal

Abstract

The use of the real part of the receptance spectrum allows accurate damping measurement of a system, including for non-light damping. Also, it measures both viscous and hysteretic damping (by a viscous damping equivalent). It is, however, important to consider the errors due to quantisation of the time/frequency axis. Here, the errors are studied and quantified against damping value and resolution, allows measurement parameters to be chosen to achieve a required accuracy. Then, the calculation of the possible range of the actual system damping is calculated from the measured value and the frequency resolution.

Keywords: vibration testing, heavy damping, modal analysis

1. Introducción

El uso de la parte real del espectro para análisis modal tiene ventajas. Permite la medición de la frecuencia natural directamente independientemente del parámetro de la respuesta del sistema SDOF. Además, usando la receptancia permite la medida del amortiguamiento sin error sistemático, incluso para amortiguamiento no ligero, para sistemas con amortiguamiento de tipo viscoso o histerético [1,2]. Una desventaja es que este método puede ser sensible a errores de fase (por ejemplo, procedentes de filtros en los canales de medida), aunque existen técnicas para corregir tales errores [3,4].

En sistemas reales una consideración tiene que ser la de la discretización de la señal, tanto como en el parámetro medido como del eje de tiempo. Éste último origina espectros con ejes en frecuencia discretizados y normalmente es mucho más significativo que la discretización de la amplitud del parámetro. Aquí se estudian los errores debidos a la

resolución definida en frecuencia y su efecto en la medida del amortiguamiento. Hay que hacer hincapié en que estos errores son sistemáticos y distintos de los errores debidos al ruido, los cuales normalmente se pueden reducir mediante promedios.

Es común que las expectativas de la exactitud de la medida del amortiguamiento sean menores que para, por ejemplo, la frecuencia natural. Cifras aproximadas pueden ser 5% o 10%, aunque es posible que no se pueda ni garantizar esta exactitud si no se ha utilizado una resolución en frecuencia adecuada, que es más exigente que cuando se trata de frecuencias individuales.

Finalmente, en este trabajo las frecuencias se expresan en forma circular o angular según conviene y se sobreentiende que el mismo subíndice representa la misma frecuencia.

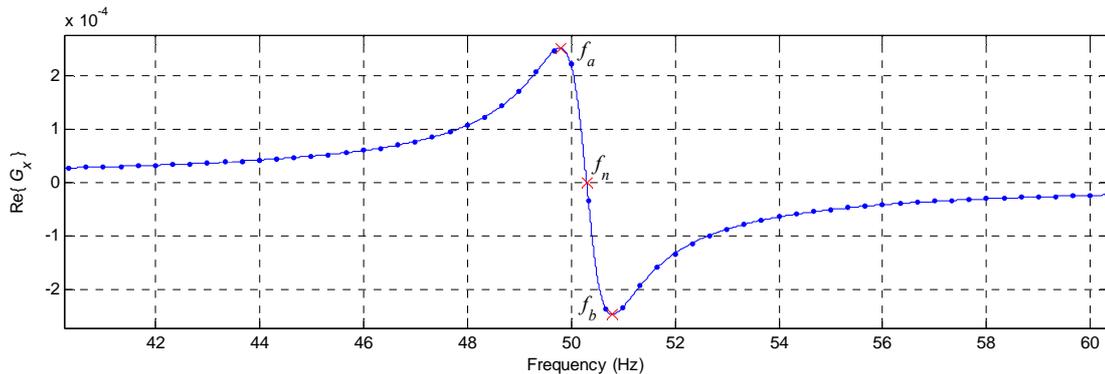


Figura 1. La respuesta de $\text{Re}\{G_x\}$ con la frecuencia para el sistema descrito en el texto. Se muestran f_a, f_b y f_n (×) y los valores discretos del eje de frecuencia discretizado (●).

2. Determinación del amortiguamiento independientemente de su tipo

La parte real de la función de la respuesta en frecuencia (FRF) de la receptancia de un sistema SDOF con amortiguamiento de tipo viscoso o histerético, y con frecuencia natural ω_n , es [1]:

$$\text{Re}\{G_x(\omega)\} = \frac{1}{m} \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2 \omega^2 K_v + \eta^2 \omega_n^4 \bar{K}_v}. \quad (1)$$

m es la masa rígida, ζ el factor de amortiguamiento viscoso y η el factor de amortiguamiento estructural (histerético). K_v es una variable Booleana que cuando es igual a "1" se selecciona el amortiguamiento viscoso, si no el amortiguamiento histerético es activo. El valor de ζ equivalente a η, ζ_{eq} , se define en la región de la resonancia [5]

$$\zeta_{eq} = \eta/2. \quad (2)$$

Una respuesta típica se muestra en la Figura 1 para una sistema con: $m = 1$, $\zeta = 0.01$ y $f_n = 50.3$ Hz.

El amortiguamiento se puede medir evaluando la frecuencia del máximo y del mínimo, f_a y f_b (también se muestran en la Figura 1). Se calcula ζ_{Re} como

$$\zeta_{Re} = \frac{f_b^2 - f_a^2}{4f_n^2}. \quad (3)$$

Se puede mostrar, numéricamente [1,2] o matemáticamente [4], que ζ_{Re} mide ζ o η sin error sistemático hasta un valor de ζ o ζ_{eq} de 0.5. En adelante sólo se trabajará con ζ pero los resultados se pueden aplicar a un sistema histerético con ζ_{eq} . Se pueden determinar f_a y f_b como

$$f_a = f_n \sqrt{1 - 2\zeta} \quad , \quad f_b = f_n \sqrt{1 + 2\zeta}. \quad (4a,b)$$

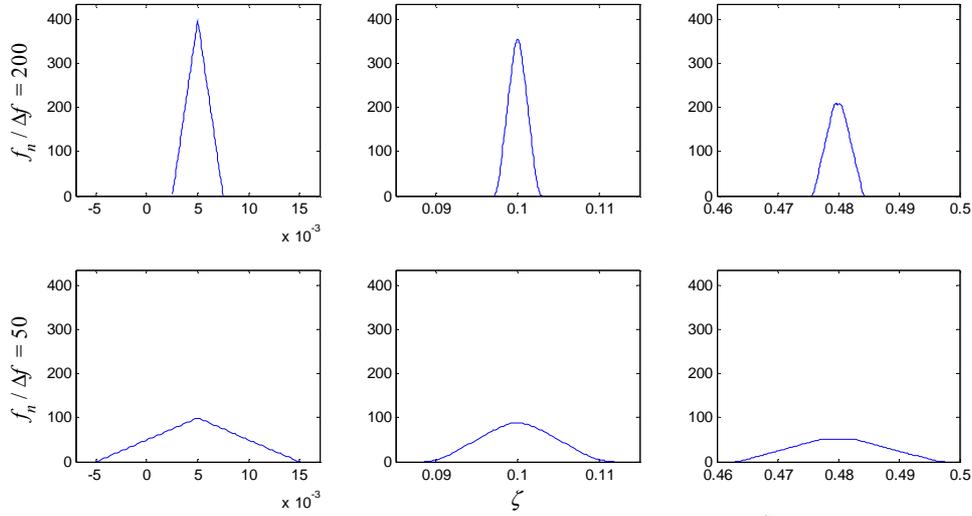


Figura 2. Las funciones de la distribución de probabilidad para γ para sistemas con $\zeta = \{0.005, 0.1, 0.48\}$ con dos valores de resolución frecuencial.

3. El efecto de discretización a la medida

En la práctica las medidas de un sistema se realizan usando un eje de frecuencia discretizado, con un espaciado entre valores de Δf , como se muestra en la Figura 1 donde $\Delta f = 1/3$ Hz. Entonces hay un error en la determinación de cada punto en frecuencia con límites de $\{-\Delta f/2, \Delta f/2\}$. Así, la frecuencia natural se determina entre los límites

$$\hat{f}_n = f_n \pm \Delta f/2. \quad (5)$$

Como cualquier valor en este rango tiene la misma probabilidad de ocurrir, se puede representar cada medida con una variable aleatoria

$$\phi = f_n + U_n \Delta f/2, \quad (6)$$

donde U_n es una distribución uniforme con límites $\{-1,1\}$. El error en una medida de amortiguamiento es más complejo siendo la combinación de tres errores independientes. Se puede representar la medida también como una variable aleatoria, γ ,

$$\gamma = \frac{(f_b + U_a \Delta f/2)^2 - (f_a + U_b \Delta f/2)^2}{4(f_n + U_n \Delta f/2)^2}, \quad (7)$$

donde U_a y U_b son distribuciones idénticas a U_n . Ahora la distribución de γ depende tanto de la resolución como del valor de ζ , como se muestra en la Figura 2. Sin embargo, los límites de la distribución se pueden evaluar permutando los signos de los errores máximos en (7)

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\zeta}_{\min} \\ \hat{\zeta}_{\max} \end{array} \right\} = \frac{(f_b \mp \frac{\Delta f}{2})^2 - (f_a \pm \frac{\Delta f}{2})^2}{4(f_n \pm \frac{\Delta f}{2})^2}. \quad (8)$$

El término cuadrado en el denominador es insignificante para todo ζ factible y se pueden expresar los límites del rango de ζ , $\hat{\zeta}_{\min}$ y $\hat{\zeta}_{\max}$, como

$$\hat{\zeta}_{\min} = \zeta \left(1 - \frac{\Delta f}{f_n} \right) - c_{\min} Y \quad \text{where} \quad c_{\min} = \frac{\Delta f}{4f_n} \left(1 - \frac{\Delta f}{f_n} \right). \quad (9)$$

$$\hat{\zeta}_{\max} = \zeta \left(1 + \frac{\Delta f}{f_n} \right) + c_{\max} Y \quad \text{where} \quad c_{\max} = \frac{\Delta f}{4f_n} \left(1 + \frac{\Delta f}{f_n} \right). \quad (10)$$

donde Y se define como

$$Y = (f_a + f_b) / f_n. \quad (11)$$

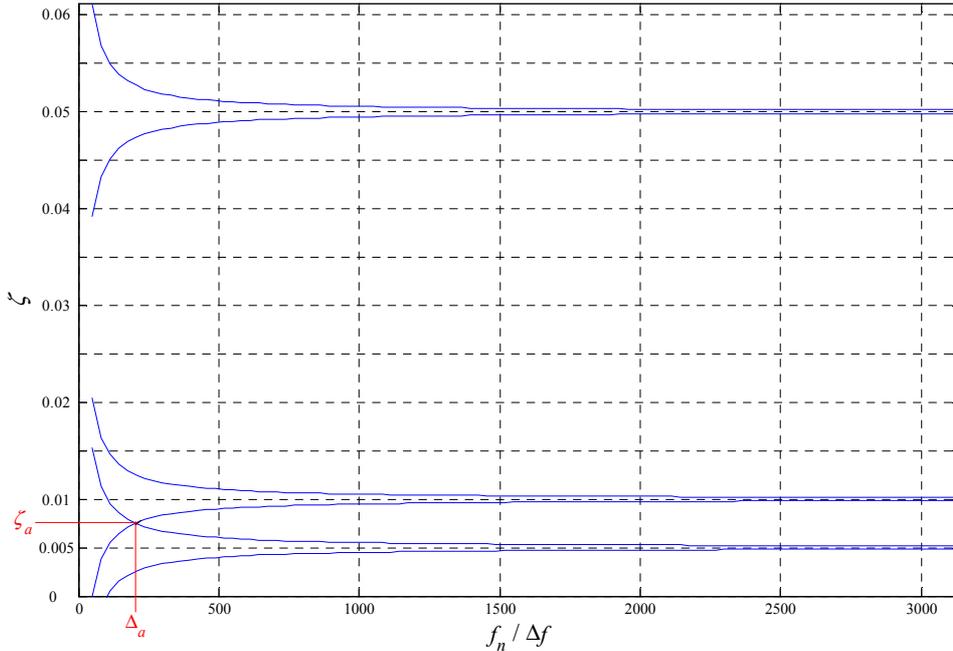


Figura 3. Los límites inferiores y superiores del rango posible del valor medido para sistemas con $\zeta = \{0.005, 0.01, 0.05\}$ contra el inverso de la resolución normalizada.

En la Figura 3 se muestra $\hat{\zeta}_{\min}$ y $\hat{\zeta}_{\max}$ para sistemas con diferentes valores de ζ en función del inverso de la resolución normalizada con f_n , $f_n / \Delta f$. Se observa que a valores de $f_n / \Delta f$ bajos hay grandes errores posibles. Conviene también calcular el error relativo que se define como

$$\hat{\epsilon}_{\langle l \rangle} = \frac{\hat{\zeta}_{\langle l \rangle} - \zeta}{\zeta}, \quad (12)$$

donde l especifica uno de los límites, así $l = \{\min, \max\}$. En la Figura 4 se muestra $\hat{\zeta}_{\min}$ y $\hat{\zeta}_{\max}$ en función de ζ para diferentes valores de $\Delta f / f_n$. Se ve que a baja resolución $\hat{\zeta}_{\max}$ es notablemente mayor que $\hat{\zeta}_{\min}$. También se ve que los requisitos son más exigentes para medir ζ que simplemente f_n . Por ejemplo, para medir un sistema con $\zeta = 0.01$ con una exactitud de al menos 10%, se necesitaría un valor de $\Delta f / f_n < 1/500$, el cual corresponde a medir f_n con un exactitud de 0.2%. Según el ámbito de los errores con pequeño ζ y bajo $\Delta f / f_n$, incluso se puede resultar valores de $\hat{\zeta}$ negativos.

El desarrollo hasta este punto se deja especificar la resolución necesaria de una sistema de medición por una exactitud deseada, si se sabe el amortiguamiento aproximadamente, o un límite inferior de él.

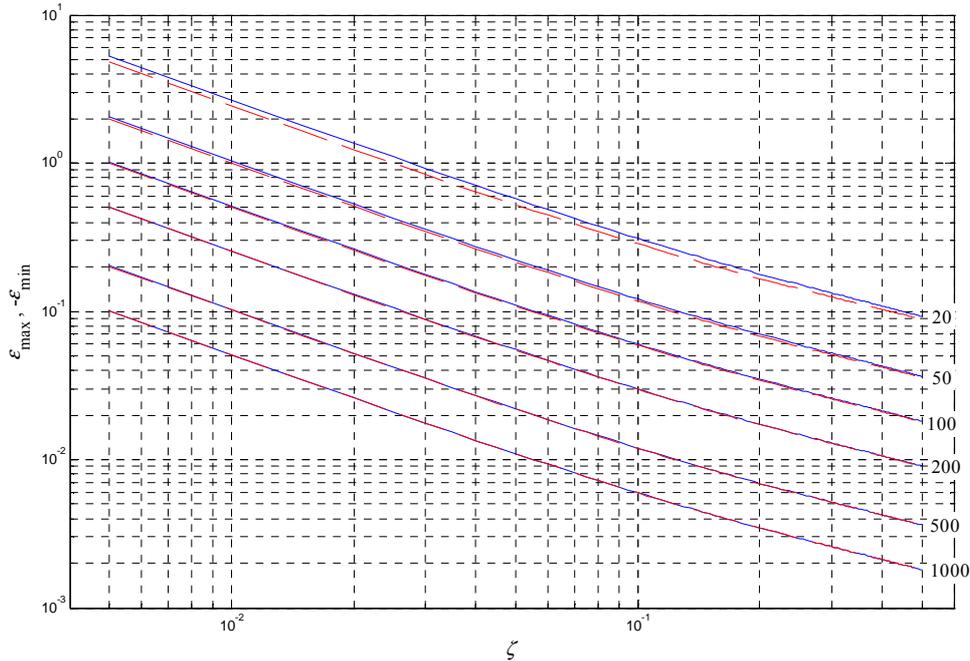


Figura 4. Valores de $\hat{\mathcal{E}}_{\min}$ (- - -) y $\hat{\mathcal{E}}_{\max}$ (—) en función de ζ para diferentes valores de $f_n/\Delta f$.

4. Cuantificación de los límites del valor verdadero dado el valor medido

Un escenario más común es aquel en el que sabiendo la resolución de la medida, $\Delta f/f_n$, y el valor medido, $\hat{\zeta}$, se quieren saber los límites posibles del valor real, ζ , del amortiguamiento del sistema. Para facilitar esto, es conveniente representar Y como un polinomio en ζ , $\hat{Y}(\zeta)$, como

$$\hat{Y} = y_3 \zeta^3 + y_2 \zeta^2 + y_1 \zeta + y_0, \quad (13)$$

donde y son los coeficientes. Esto se realiza usando un ajuste por mínimos cuadrados de Y calculado numéricamente entre $\zeta = \{0, 0.45\}$, y para reducir el error a bajos valores de ζ se predetermina que $y_0 = 2$ (lo cual se averigua por inspección de (4) y (11)). Los coeficientes son

$$\{y_3, y_2, y_1, y_0\} = [-2.76, -0.00843, -0.0895, 2] \quad (14)$$

y consiguen un exactitud menor del 1% en representar a Y hasta $\zeta = 0.45$.

Como se indica en la Figura 3, un valor medido, ζ_a , ocurre usando una resolución de Δ_a . ζ_a está en el límite superior de $\zeta = 0.05$ y en el límite inferior de $\zeta = 0.1$. Así, se puede decir que el valor verdadero se encuentra entre estos valores. Generalizado este procedimiento se pueden expresar (9) y (10) como polinomios en ζ , y reemplazando $\hat{\zeta}_{\min}$ y $\hat{\zeta}_{\max}$ con ζ^m , el valor medido. Ya se puede calcular los límites del valor verdadero de ζ :

$$\hat{\zeta}_{\min} : c_{\max} (y_3 \zeta^3 + y_2 \zeta^2) + (c_{\max} y_1 + \frac{\Delta f}{f_n} + 1) \zeta + c_{\max} y_0 - \zeta^m = 0, \quad (15)$$

$$\hat{\zeta}_{\max} : c_{\min} (y_3 \zeta^3 + y_2 \zeta^2) + (c_{\min} y_1 + \frac{\Delta f}{f_n} - 1) \zeta + c_{\min} y_0 + \zeta^m = 0. \quad (16)$$

Cada ecuación produce tantas soluciones como el orden del polinomio (que es una consecuencia de modelizar Y como un polinomio). Sin embargo, sólo se usa la raíz real en el rango $0 < \zeta < 0.45$.

Algunos ejemplos de este procedimiento son: Para $\Delta f/f_n = 1/250$ y $\zeta^m = 0.013$, los límites resultantes de ζ son $\{0.0109, 0.0151\}$. Para $\Delta f/f_n = 1/25$ y $\zeta^m = 0.0057$, los límites son $\{-0.0145,$

0.0259}, y en este caso el límite inferior se interpreta como cero. Finalmente, para $\Delta f/f_n = 1/20$ y un valor medido y negativo de $\zeta^m = -0.0083$, los límites son $\{-0.0329, 0.0162\}$, y esto se interpreta como $0 < \zeta^m \leq 0.0162$, y indica que información útil sobre el rango posible de ζ todavía se puede conseguir.

5. Resumen y conclusiones

El uso la parte real del espectro de la receptancia de un sistema SDOF es una muy buena opción, para medir los parámetros de la frecuencia natural y el amortiguamiento sin error sistemático, incluso para amortiguamiento no-ligero. Sin embargo, como todas las medidas prácticas, hay que considerar el efecto de la discretización. Aquí, se ha mostrado como calcular la resolución necesaria para una exactitud requerida sabiendo el valor aproximado del amortiguamiento. También se ha mostrado cómo definir el intervalo donde se encuentra el valor verdadero, sabiendo la resolución y el valor medido. Debido al hecho que la forma de las funciones de distribución de probabilidad de los errores depende de la resolución y del valor del amortiguamiento, no se pueden tratarlas como distribuciones gaussianas sin error significativo. Por eso, hasta ahora se trataba con los límites de las distribuciones y no con límites de confianza, las cuales serán útiles.

Agradecimientos

Este trabajo se realizó durante un Permiso de Estancia en el instituto nombrado. Se agradece la ayuda de Francisco Simón del mismo instituto durante la preparación de este artículo.

Referencias

- [1] Anthony DK, Simón F, Juan J. Determining material damping type by comparing modal frequency estimators. JASA Express Letters. (Artículo aceptado 24/07/2007)
- [2] Anthony DK, Simón F. The role of material damping type in determining modal parameters of non-lightly damped systems. Inter-noise. 23-26 Agosto, Ottawa, Canadá.
- [3] Anthony DK. Practical Improvements to real and imaginary spectral based modal parameter measurements of SDOF systems. Applied Acoustics 2009; 70(9); 1219-1225.
- [4] Anthony DK. Ventajas del uso de la parte real del espectro para la medida de los parámetros modales frente a errores de fase. TecniAcústica, Cádiz, España. 23-25 Septiembre 2009.
- [5] Ewins DJ. Modal Testing: theory, practice and application. Great Britain: Research Studies Press Ltd.; 2000