

## CARACTERIZACIÓN NUMÉRICA Y EXPERIMENTAL DE UN SISTEMA VIBROACÚSTICO MEDIANTE *ADVANCED TRANSFER PATH ANALYSIS*

PACS: 43.40.At

Cierco, Ester<sup>1</sup>; Rodríguez, Pere Vicens<sup>1</sup>; Aragonès, Àngels; Arcas, Kevin; Poblet-Puig, Jordi<sup>2</sup>; Magrans, Francesc Xavier<sup>1</sup>; Rodríguez-Ferran, Antonio<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ingeniería para el Control del Ruido S.L, Berruete 52, 08035 Barcelona, Spain

<sup>2</sup> Laboratori de Càlcul Numèric, E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya, Jordi Girona 1, Campus Nord, 08034 Barcelona, Spain

Tel: +34 934286339

E-Mail: ecierco@icrsl.com pvrodriguez@icrsl.com

**Palabras Clave:** vías de transmisión, ATPA, TPA, path, subsistema, FEM, modelo numérico

### ABSTRACT

ATPA (Advanced Transfer Path Analysis) is a method that allows knowing the noise paths and contributions of a vibroacoustic problem. It is clear that a good quantification of the less dominant contributions is essential in order to maintain the validity of the analysis after the implementation of redesigns and possible modifications. A controlled experiment was carried out with a simple prototype, in parallel with the development of a numerical model to evaluate aspects of the experimental application of the method by means of numerical simulation of experiments. The results show a good correlation of the numerical and experimental model for all transmission paths and provide relevant information on its application.

### RESUMEN

La técnica ATPA (Advanced Transfer Path Analysis) permite conocer las contribuciones y las vías de transmisión al ruido en un problema vibroacústico. Una buena cuantificación de las contribuciones menos dominantes es básica para que el análisis se mantenga válido después de aplicar rediseños y posibles modificaciones. Se ha realizado un experimento controlado con un prototipo sencillo, en paralelo al desarrollo de un modelo numérico para evaluar aspectos en la aplicación experimental del método mediante la simulación numérica de experimentos. Los resultados muestran una buena correlación del modelo numérico y experimental para todas las vías de transmisión y dan informaciones relevantes sobre su aplicación.

### INTRODUCCION

Una de las principales preocupaciones cuando se estudian sistemas vibroacústicos es entender cómo se transmiten y distribuyen el ruido y las vibraciones. El concepto principal que nos proporciona esta información es el de camino (*path*). En el mundo de la ingeniería es habitual confundir erróneamente el concepto de camino con el de contribución. Una contribución describe

## FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

la cantidad de señal que llega a un punto receptor ( $j$ ) debido a una excitación en un punto emisor ( $i$ ). Pero esta señal puede ser transmitida a través de cualquier camino de  $i$  a  $j$  (independientemente de la existencia de un camino directo entre  $i$  y  $j$ ). Así, las contribuciones son descripciones de las entradas y salidas mientras que los caminos son una descripción de la topología del sistema. Una definición formal de este concepto se puede encontrar en [1].

Existe una gran cantidad de métodos experimentales desarrollados con el objetivo de conocer las vías de transmisión [2]. En una clasificación bastante general, podemos distinguir: Análisis de las Vías de transmisión (TPA [3]), TPA Avanzado (ATPA [4,5]) TPA *in situ* [6,7] y TPA Operacional (OTPA [8]). La principal diferencia entre los métodos agrupados bajo el nombre TPA y el nombre ATPA es que el TPA tradicional caracteriza sólo las contribuciones de las entradas de fuerza al sistema a algunos receptores, no los caminos. Se realiza combinando las señales medidas en funcionamiento real con las funciones de transferencia (funciones de respuesta en frecuencia) medidas en la estructura pasiva vacía donde estará instalado un equipo. Por ejemplo, en el chasis de un coche antes de la instalación del motor.

ATPA, al igual que el procedimiento TPA *in situ*, no requiere ningún desmontaje de la estructura. Otra característica del ATPA es que no es necesaria la medición de la fuerza de excitación, lo que constituye una ventaja respecto al TPA tradicional. Ambos son adecuados si uno puede actuar sobre las fuerzas de excitación para controlarlas y reducirlas. Esto significa que un rediseño del sistema vibroacústico actúa sobre la fuerza de excitación para mejorar la respuesta en términos de emisión de ruido o niveles de vibración. Sin embargo, sólo con ATPA es posible cuantificar las contribuciones de un sistema pasivo (como los paneles interiores de un vagón de un tren) y con esta información decidir qué parte de este sistema necesita ser modificada para reducir el ruido en el receptor. Si el sistema estudiado se entiende como una caja negra con  $n$  entradas y  $m$  salidas interconectadas a través de la caja, TPA y ATPA pueden predecir cuál es la contribución de cada entrada a cada salida, es decir, son capaces de descomponer la señal de salida en contribuciones procedentes de cada señal de entrada. Sin embargo, sólo ATPA es capaz de describir la topología del sistema mecánico, cómo se conectan las señales de entrada y salida dentro de la caja negra y descubrir cuál es la estructura intrínseca del sistema, cuáles y cómo son los caminos. Por esta razón, es útil cuando se necesita un análisis detallado del sistema mecánico.

En muchas ocasiones, conocer las contribuciones es suficiente para el análisis deseado. Cuando se aplica un método de vías de transmisión, en general no existen herramientas para comprobar que todas las contribuciones encontradas son correctas, se suele comprobar la reconstrucción de la señal total en el receptor. Sin embargo, esto no demuestra la bondad de las contribuciones calculadas. Un ejemplo de esto se produce con el método OTPA, donde una reconstrucción perfecta de la señal no implica obtener las contribuciones reales al ruido [9]. Tener la certeza de conocer las contribuciones reales es clave para resolver un problema de ruido y, una vez resuelto, conocer las contribuciones de los siguientes subsistemas en orden de importancia, que son los que determinan el nivel residual de ruido.

### Contexto y Objetivos de la Investigación

El método ATPA, cuyo origen se remonta a los años 80 [1], fue desarrollado íntegramente por ICR. Se creó inicialmente al mundo de la automoción, se aplicó al sector de la construcción y más tarde se adaptó al sector ferroviario, para la caracterización y diagnóstico de problemas de ruido en material rodante, así como a otros sectores. La aplicación del método en entornos no controlados dificulta la investigación y su desarrollo continuo, por limitaciones prácticas tales

## FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

como la accesibilidad a puntos de ensayo, número de sensores, tiempo, repetición de los ensayos, etc. Así, en esta investigación se ha decidido utilizar la simplicidad de una caja para realizar un análisis detallado en un entorno controlado. Asimismo, se ha desarrollado un modelo numérico de la caja, que permite realizar pruebas difíciles de realizar en la práctica, además de demostrar que el método es capaz de dar información cuantitativa correcta de todas las contribuciones, hasta las más pequeñas. El grado de incertidumbre del experimento está más controlado de lo habitual, por lo que se puede obtener una mejor concordancia entre el modelo numérico y los datos experimentales. Una vez calibrado, el modelo numérico permite la ejecución de experimentos 'virtuales' y la posibilidad de realizar análisis paramétricos, que suelen ser muy difíciles de realizar en ensayos in situ como son la identificación y el número de subsistemas, optimización de la posición del sensor en cada subsistema o la influencia del tipo de excitación.

Esta investigación está respaldada por el proyecto 'Nous horitzons pels outputs de l'ATPA (NHOA, RD15-1-0083)' el cual ha sido creado por ACCIO de la Generalitat de Catalunya en el programa FEDER Catalunya 2014-20120. El grupo de investigación LaCàN agradece la financiación recibida por la Generalitat de Catalunya (Grant No. 2017-SGR-1278). Este artículo muestra un resumen de la primera parte del proyecto y del artículo [10], con la obtención del modelo físico y numérico, así como los resultados de algunos de los experimentos realizados. El proyecto global se ha centrado también en la consecución de otros objetivos tales como la obtención de un grafo del sistema, la correlación de los parámetros de ATPA con los factores de acoplamiento SEA y la auralización de los resultados.

## METODOLOGIA

El método ATPA es un método de cálculo de vías de transmisión mediante las funciones de transferencia directas. La base teórica del método está desarrollada en [1], y también se conoce como GTDT. El método divide el sistema a estudiar en distintas partes, llamados nodos o subsistemas, con el objetivo de conocer las contribuciones al ruido o a las vibraciones de los distintos subsistemas, así como las interconexiones entre ellos, es decir, los caminos. La definición de subsistema es un aspecto fundamental en la aplicación de este método: se divide la estructura bajo estudio en un número finito de elementos, asociados a un grado de libertad, representados por un parámetro vibroacústico medible que caracteriza su comportamiento (aceleración, presión sonora, rotación, etc.).

Cuando hablamos de contribuciones de un subsistema, nos referimos a la parte de señal que dicho subsistema aporta a otro subsistema o a un receptor, p.ej. un micrófono en la posición de conducción de un coche. En este caso, el nivel de ruido total en recepción, será igual a la suma de las contribuciones de todos los subsistemas que forman el habitáculo. El cálculo de la contribución de un subsistema significa un bloqueo virtual del resto de subsistemas, de modo que, para cada subsistema empleado en el cálculo, se conoce la cantidad de señal en el punto receptor que proviene únicamente de la radiación del subsistema considerado.

El concepto de "camino directo" o "vía de transmisión directa" se refiere a la señal que va de un subsistema a otro sin pasar por ningún otro subsistema. Por otra parte, el concepto de "vía de transmisión global" se refiere únicamente a la señal que va de un subsistema a otro, pasando por cualquier otro subsistema y/o directamente. La base de esta tecnología está en la obtención de las funciones de Transferencia Directa (DTF) a partir de la medición de las funciones de Transferencia Global (GTF). Ambas funciones están matemáticamente relacionadas entre sí [10], ya que son dos descripciones complementarias del mismo sistema físico.

## FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

Los coeficientes de la matriz de GTF,  $T_{ij}^G$ , dependen de la frecuencia y se definen como el cociente entre las transformadas de Fourier de la señal en  $j$ ,  $s_j$ , y la señal en  $i$ ,  $s_i$ , cuando sólo hay una excitación externa no nula e independiente, aplicada en  $i$ , que ha sido transmitida a  $j$  a través de una trayectoria global. Estos coeficientes se pueden obtener experimentalmente. Los coeficientes de la matriz de DTF,  $T_{ij}^D$ , se definen como cociente entre las transformadas de Fourier de la señal en  $j$ ,  $s_j$ , y la señal en  $i$ ,  $s_i$ , cuando sólo hay una excitación externa no nula e independiente, aplicada en  $i$ , que ha sido transmitida a  $j$  a través de una trayectoria directa, es decir, cuando el resto de caminos están bloqueados. No se pueden obtener experimentalmente, ya que no es posible bloquear físicamente todos los subsistemas. Las transferencias directas nos dan la información sobre los caminos. El método ATPA permite formular el nivel de ruido en el punto receptor ('target'),  $p_T$ , como [1,11]

$$p_T = \sum_{i=1}^N s_i T_{iT}^D + p_T^e \quad (1)$$

donde  $s_i$  es la señal en el subsistema  $i$  (p.ej. aceleración),  $T_{iT}^D$  es la transferencia directa entre  $i$  y el target,  $N$  es el número total de subsistemas y  $p_T^e$  es la señal que llega a  $T$  debido a una excitación externa cuando el resto de subsistemas está bloqueado.

## ENSAYO Y MODELO

### Maqueta

Se ha diseñado y construido una maqueta que sirva como prototipo experimental que permita la aplicación del ATPA de forma controlada y que al mismo tiempo pueda ser modelada numéricamente con la menor incertidumbre posible. Las principales dudas planteadas en este proceso han sido cómo hacer un diseño que permitiera acceder al interior de la maqueta y cómo realizar las uniones entre las diferentes caras de forma que estas pudieran ser modeladas numéricamente. Se ha optado por una caja de metacrilato sin base, ajustada a una base diseñada para no radiar ruido, formada por chapas de hierro pesadas separadas con material insonorizante y amortiguante (Tecsound), atornillada una madera DM de 2 cm de espesor. Un sistema de puntos de apretamiento con vigas de hierro ha permitido aplicar una presión uniforme al contorno de la caja. Las uniones de las caras se han hecho mediante encolado a testa con la cola Acrifix 116 de Plexiglas Rhom. Esta cola actúa como un disolvente sobre el material y consigue uniones que se pueden asimilar como continuas entre las caras, por lo que facilita el proceso de modelado numérico. En caso de haber utilizado tornillos la modelización hubiera sido más complicada al tratarse de uniones puntuales. Las dimensiones del prototipo, así como los espesores de cada una de las caras, se definieron a partir de cálculos analíticos preliminares para controlar la distribución modal e intentar desacoplar al máximo las resonancias de las distintas placas. Finalmente, se realizaron un conjunto de ensayos preliminares sobre una placa de metacrilato sola y sobre una L formada por dos placas con el fin de obtener experimentalmente los parámetros físicos de estos componentes y definir las características de cada subsistema en el modelo de elementos finitos (FEM).

### Experimento

La maqueta se ha instrumentado con 4 acelerómetros por cara y tres micrófonos interiores (Fig. 1). El ensayo se divide en dos fases: la prueba estática y la prueba dinámica.

El ensayo estático es el proceso en el cual se obtiene experimentalmente la matriz  $T^G$  del sistema. Para cada subsistema, se introduce una excitación externa, mediante martillo de

## FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

impactos o *shaker*, y se mide su relación con la respuesta en el resto de subsistemas. Se ha realizado un número importante de ensayos con el fin de determinar la dependencia del resultado con el número de impactos, la posición de los impactos, así como con el número de subsistemas. El ensayo dinámico consiste en la realización de un registro de ruido y/o vibraciones del sistema estudiado en unas determinadas condiciones operativas, por ejemplo, en la cabina de un tren se mediría ruido y/o vibraciones en todos los subsistemas y target a distintas velocidades. En el caso que nos ocupa, y teniendo en cuenta que se trata de un prototipo, se forzaron diferentes tipos de excitación externa (fuerza puntual, excitación multipunto, excitación acústica...).

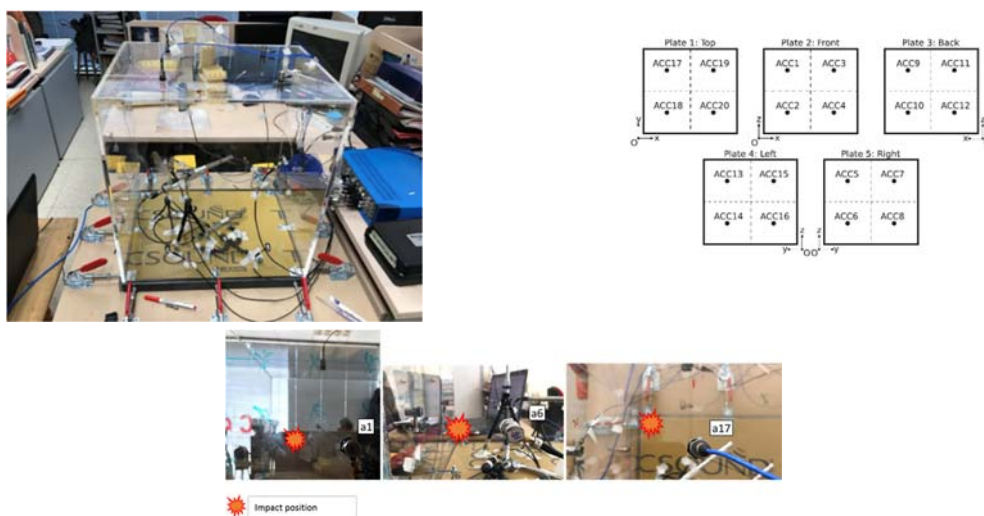


Fig. 1 Maqueta, posición acelerómetros y algunas configuraciones ensayo estático

### Modelo Numérico

Un modelo vibroacústico completo y acoplado en el dominio de la frecuencia ha sido diseñado e implementado mediante el software Code-Aster, basado en FEM [12]. La caja ha sido modelada mediante elementos *shell* triangulares que utilizan la formulación DKT [13] para describir el comportamiento de flexión. Los nodos en el contorno inferior de la caja están bloqueados (desplazamientos y rotaciones nulas). El comportamiento del material es elástico lineal con amortiguación histerética. Se pueden aplicar fuerzas perpendiculares al punto y a la superficie en cada cara. Solo la cavidad de aire dentro de la caja está incluida en el modelo y no se ha considerado ni el efecto de pérdidas por radiación ni el aire alrededor de la caja.

### RESULTADOS

A continuación se muestran algunos de los resultados relevantes obtenidos. Uno de los puntos destacados es la posibilidad del método de caracterizar no sólo las vías de transmisión dominantes, sino también las de menor importancia. Se ha comparado la obtención de la matriz  $T^D$  mediante el procedimiento habitual, numérica y experimentalmente, con su obtención numérica a partir de la definición de transferencia directa.

En primer lugar, se ha obtenido la matriz  $T^G$  de forma experimental y simulando el experimento numéricamente, es decir, mediante la excitación con una fuerza puntual actuando de manera



FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

perpendicular en cada uno de los subsistemas y el cálculo de la relación de aceleraciones entre cada pareja de subsistemas para construir la matriz de transferencias globales. Una vez obtenida, se procede al cálculo de la matriz de transferencias directas de formas distintas:

- Calculada matemáticamente a partir de la matriz  $T^G$ , tanto de la obtenida experimentalmente ('DT Experiment') como de la obtenida numéricamente ('DT Computed').
- Calculada utilizando su definición física, es decir bloqueando el resto de subsistemas no incluidos en la  $T^D$  calculada ( $T_{iT}^D = \frac{p_i}{x_j}$ ,  $x_j=0, \forall j \neq i$ ). Para la realización de esta simulación se tuvieron en cuenta 2 excitaciones, una próxima al punto de medida ('DT Simulated', equivalente a experimentación) y otra en el punto exacto ('DT Simulated Exact Point').

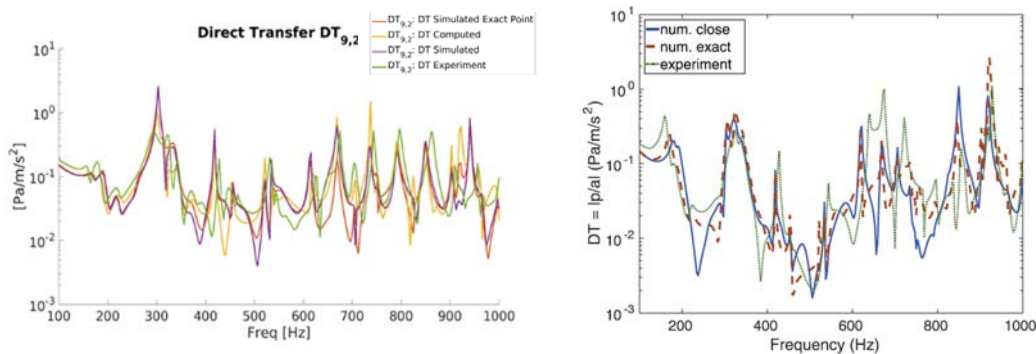


Fig. 2. Comparativa  $T_{ij}^D$ .(izq) Calculada de distintas formas;(dcha) calculada con distintos puntos de aplicación de la fuerza.

La Fig. 2 muestra la comparación de resultados para el caso de la  $T_{9,2}^D$  (del sensor 9 al micrófono 2), con una buena correlación entre los distintos casos, con lo que, después de revisar todas las  $T_{ij}^D$  demostramos implícitamente la validez de las contribuciones.

Otro aspecto evaluado es el efecto de la posición del martillo en la excitación de la estructura, con la que obtenemos la matriz  $T^G$ , para el posterior cálculo de la matriz  $T^D$ . Por un lado, se ha calculado aplicando la fuerza en el punto exacto en el que se encuentra el sensor y, por otro lado, aplicando la fuerza aproximadamente a una distancia entre 2,5 cm y 4,5 cm del sensor. Esta segunda prueba es muy representativa del ensayo experimental ya que generalmente no se puede golpear en la posición exacta en la que se encuentra el sensor (Fig. 2 dcha.). Los resultados muestran que existe una influencia debida a la posición de excitación y, aunque no se puede ver un patrón claro, esta influencia es más importante a frecuencias mayores. Sin embargo, no hay que olvidar que estamos trabajando con magnitudes lineales y la experiencia nos muestra que para aplicaciones de ingeniería trabajando en una escala de dB estas diferencias no se consideran significativas.

Un punto clave es el uso de transferencias directas para obtener las contribuciones de cada subsistema a un receptor en un sistema en funcionamiento real. Se han realizado numerosas pruebas para ver el efecto de una excitación distinta en condiciones dinámicas respecto a la excitación en el ensayo estático, del cual extraemos la matriz  $T^D$  del sistema. Las  $T^D$  se pueden interpretar como una medida de la contribución de un subsistema al ruido total. Por ello, la comparación entre el ruido en condiciones operacionales y su reconstrucción mediante la ecuación (1) nos aporta información relevante acerca de la buena elección de subsistemas y la

FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

independencia del tipo de excitación. Cuando la excitación en dinámico es exactamente la misma que en estático, la reconstrucción es idéntica, mientras que, si queremos reconstruir un impacto en un punto cercano al de la excitación, pero no exactamente el mismo, se observan pequeñas diferencias (Fig. 3a). Las diferencias aumentan si aplicamos otro tipo de excitación: presión uniforme aplicada en una cara de la caja (Fig. 3b).

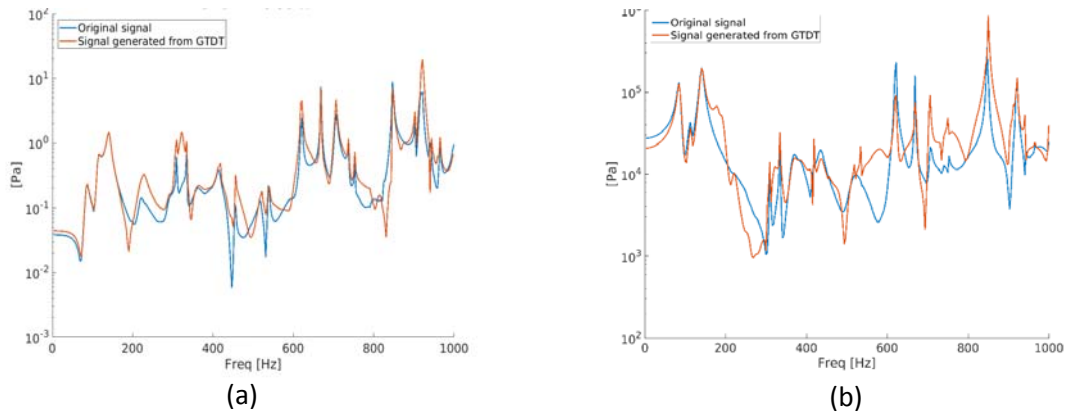


Fig. 3 Reconstrucción de la señal en el micrófono 1: (a) fuerza puntual en una posición cercana al sensor ACC14; (b) presión uniforme en la cara frontal.

Para este último caso, y con el objetivo de validar numéricamente la ecuación (1) se ha calculado  $p_T^e$  a través de su definición (aplicando la presión uniforme en la cara frontal y bloqueando todos los subsistemas) y se ha sumado a la señal reconstruida. El resultado reproduce exactamente la señal  $p_T$  en estas condiciones dinámicas y muestra que la relación (1) es exacta. Esto demuestra que, numéricamente, los errores asociados al método pueden estimarse mediante  $p_T^e$ . Experimentalmente, es un elemento que no se tiene en cuenta, y que tiende a ser muy pequeño siempre que se haya realizado una buena elección de subsistemas. A nivel experimental, la correlación entre el modelo físico y numérico ha sido complicada debido a la dificultad de simular ciertas condiciones dinámicas. Sin embargo, se han obtenido muy buenos resultados de reconstrucción, tal y como se muestra en la Fig. 4 izq. para una excitación con altavoz en movimiento. Finalmente, se muestra la topología del sistema (Fig. 4 centro), obtenida a partir de la matriz de transferencias directas (Fig. 4 dcha.) y que nos permite establecer todas las vías de transmisión entre los subsistemas.

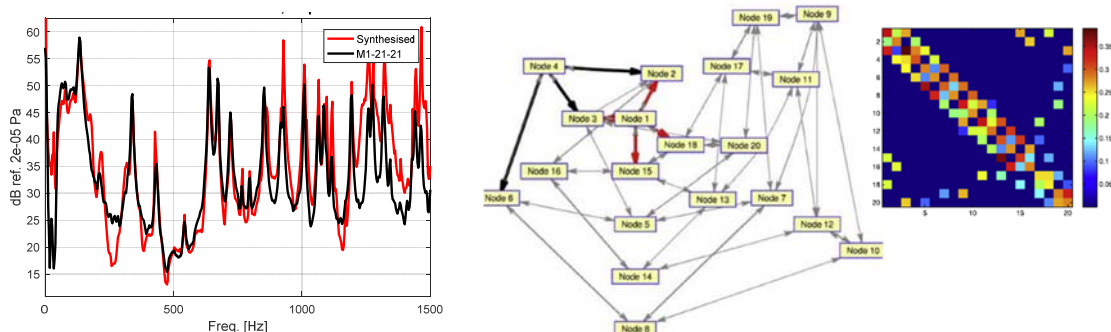


Fig. 4 Nivel de presión en el micrófono 1 (izq.): medida (en negro) y reconstruida (en rojo). Grafo con las vías de transmisión (centro) y representación de la matriz de  $T^D$  (dcha.).

## FIA 2018

XI Congreso Iberoamericano de Acústica; X Congreso Ibérico de Acústica; 49º Congreso Español de Acústica -TECNIACUSTICA'18-  
24 al 26 de octubre

### CONCLUSIONES

Las conclusiones principales extraídas de los resultados obtenidos son:

- Se ha realizado una correlación entre la aplicación experimental del ATPA a un prototipo y un modelo numérico del prototipo, que simula el método de ATPA. Los resultados son consistentes y respaldan la parte experimental y numérica.
- Los resultados de las  $T^D$  mediante el modelo numérico muestran que el procedimiento del ATPA es exacto, a menos que existan imprecisiones debidas a la parte experimental. Esto nos muestra que el método ATPA caracteriza correctamente todas las contribuciones.
- El tipo de excitación dinámica influye en la reconstrucción de la señal. Se ha comprobado como esta se puede estimar a partir del cálculo de la señal en el receptor con todos los subsistemas bloqueados.
- La influencia de la imprecisión en el punto de aplicación de la fuerza es mayor a medida que aumenta la frecuencia.
- La reconstrucción de la señal a nivel experimental ha sido muy buena.

### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Clément Dalmagne (ICR) su colaboración en la realización del ensayo.

### REFERENCIAS

- [1] F.X. Magrans, Method of measuring transmission paths, *J. Sound Vib.* 74 (1981) 321–330.
- [2] M. Van Der Seijs, D. de Klerk, D.J. Rixen, General framework for transfer path analysis: history, theory and classification of techniques, *Mech. Syst. Sign. Proc.* (2015) 217–244.
- [3] S.A. Hambric, S.H. Sung, D.J. Nefske, *Engineering Vibroacoustic Analysis: Methods and Applications*, John Wiley & Sons, 2016.
- [4] F.X. Magrans, P.V. Rodríguez, G.C. Cousin, Low and mid-high frequency advanced transmission path analysis, in: *Proceedings of the Twelfth International Congress on Sound and Vibration ICSV12*, 2005.
- [5] O. Guasch, C. García, J. Jové, P. Artís, Experimental validation of the direct transmissibility approach to classical transfer path analysis on a mechanical setup, *Mech. Syst. Sign. Proc.* 37 (2013) 353–369.
- [6] N. Zafeiropoulos, A.T. Moorhouse, A. Mackay, U. Senapati, Advanced transfer path analysis of a vehicle, in: *Proceedings of the 11 RASD Conference*, Pisa, 2013.
- [7] A. Moorhouse, A. Elliott, T. Evans, In situ measurement of the blocked force of structure-borne sound sources, *J. Sound Vib.* 325 (2009) 679–685.
- [8] J.S. Bendat, System identification of input/output data, *Journal of Sound and Vibration*, 49, 293-308, 1976.
- [9] P.V. Rodríguez; J. Sapena; F.X. Magrans, OPA method weakness in real case applications, in *Proceedings of 45th International Congress and Exposition of Noise Control Engineering (INTER-NOISE)*, Hamburg, Germany, 2016.
- [10] A. Aragonès et al., Experimental and numerical study of Advanced Transfer Path Analysis applied to a box prototype. *Mech. Syst. Sign. Proc.* 114 (2019) 448-466
- [11] F.X. Magrans, J. Poblet-Puig, A. Rodríguez-Ferran, The solution of linear mechanical systems in terms of path superposition, *Mech. Syst. Sign. Proc.* 85 (2017) 111–125.
- [12] EDF, Code-Aster Home Page, 2017. <<http://www.code-aster.org>>.