



## LA ENTROPÍA SHANNON APLICADA A LA ACÚSTICA: ESTUDIO DEL EFECTO ZENER ACÚSTICO

José Sánchez-Dehesa<sup>1\*</sup>  
J. Ricardo Arias-González<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Grupo de Fenómenos Ondulatorios, Departamento de Ingeniería Electrónica, Universitat Politècnica de València, Camino de vera s/n (Edificio 7F), 46022 Valencia, España

<sup>2</sup>Centro de Tecnologías Físicas, Universitat Politècnica de València, Camino de vera s/n, 46022 Valencia, España

### RESUMEN

*Este trabajo introduce en acústica una fórmula inspirada en la entropía Shannon comúnmente usada en la teoría de información. Se demuestra que la llamada entropía Shannon acústica es una herramienta muy útil para caracterizar la localización de los modos acústicos. En particular, la entropía Shannon acústica se aplica aquí para estudiar el efecto Zener acústico, que fue caracterizado experimentalmente en redes de cavidades acústicas con gradiente de anchura: Se observa que los modos acústicos involucrados en la resonancia Zener acústica maximizan el valor de la entropía Shannon cuando el gradiente de anchura alcanza el valor crítico donde los dos niveles acústicos se anti-cruzan. En consecuencia, se concluye que la aparición del efecto Zener acústico está asociado con la máxima deslocalización de dos modos acústicos acoplados.*

### ABSTRACT

*We introduce Shannon entropy as a tool to characterize the spreading of acoustic modes. Here, it is employed to study the acoustic analog of the resonant Zener tunneling observed in graded acoustic superlattices. It is shown that the two acoustic levels involved in the phenomenon maximize their Shannon entropy at the critical gradient where the levels anticross.*

**Palabras Clave**— Entropía Shannon. Modos acústicos. Localización acústica. Efecto Zener acústico.

### 1. INTRODUCCIÓN

Desde su introducción en teoría de la información [1], la entropía Shannon ha sido aplicada a una gran variedad de

campos. Así, por ejemplo, ha abierto nuevas vías para la interpretación de fenómenos bien conocidos en cristalografía y física atómica [2]. Este trabajo introduce en acústica una fórmula de la entropía Shannon que permite describir efectos acústicos donde la localización de los modos acústicos juegue un rol fundamental. En la literatura científica ya existen varios indicadores para caracterizar el grado de localización de modos acústicos, entre otros, el denominado “inverse participation ratio” (IPR) [3]. Aquí, sin embargo, proponemos que la fórmula de la entropía Shannon, convenientemente adaptada a la acústica, es la mejor opción para la caracterización de modos acústicos ya que la entropía Shannon es un concepto universal, que enlaza la teoría de la información y la complejidad de los fenómenos ondulatorios con virtualmente cualquier disciplina científica. En particular, este trabajo describe cómo utilizar la entropía Shannon acústica en el estudio de la dinámica del efecto Zener acústico, que tiene lugar en redes de cavidades acústicas con gradiente de anchura [4]. El análisis se basa en el análisis detallado del cruce evitado que experimentan los niveles acústicos que pertenecen a mini bandas vecinas en el sistema de multicapas que forman las superredes acústicas. A continuación, en la Sección 2 introducimos la fórmula para la entropía Shannon adaptada a la acústica. Posteriormente, en la Sección 3, aplicamos la fórmula de Shannon acústica a una estructura periódica de cavidades de agua rodeadas de un metamaterial acústico, que muestra un comportamiento similar a la estructura caracterizada experimentalmente en Ref. [4]. Finalmente, la Sección 4 dará un resumen de las conclusiones.

### 2. LA ENTROPÍA SHANNON EN ACÚSTICA

\* **Autor de contacto:** jsdehesa@upv.es

**Copyright:** ©2023 First author et al. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 3.0 Unported License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author and source are credited.

En física atómica, la entropía Shannon ha sido definida como [2]:  $S_p = -\int \rho(\mathbf{r}) \ln \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ , donde  $\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$  es la densidad de probabilidad asociado a un orbital electrónico con función de onda  $\psi(\mathbf{r})$ . Para campos clásicos (por ejemplo, en electromagnetismo o en acústica), sin embargo, no existe una magnitud equivalente que tenga el significado de una distribución de probabilidad. Para evitar éste inconveniente, hemos explotado la analogía entre orbitales electrónicos mecano-cuánticos y modos acústicos confinados en cavidades acústicas de cualquier tipo. Por ejemplo, láminas de un material sólido en aire pueden sustentar vibraciones acústicas que pueden ser consideradas como los modos de la ecuación de onda asociada sujeta a las condiciones de contorno en las interfaces con el medio que les rodea. Estos modos tienen una cierta vida media y pueden ser considerados como el análogo clásico de los orbitales atómicos. Partiendo de ésta analogía con las estructuras atómicas, hemos introducido la siguiente distribución de probabilidad [5].

$$P(\mathbf{r}) = |u(\mathbf{r})|^2 / \int |u(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}, \quad (1)$$

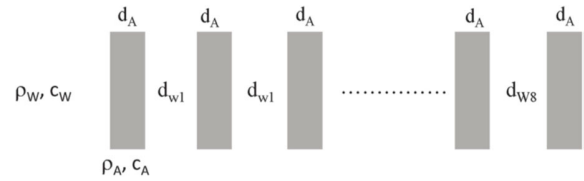
donde  $u(\mathbf{r})$  representa el campo de desplazamientos de las partículas, que va a jugar el mismo papel en acústica que la distribución de probabilidad en el sistema mecano-cuántico. De todas formas, puede extenderse al campo de velocidades de las partículas o la presión acústica para definir la correspondiente  $P(\mathbf{r})$ , ya que son magnitudes relacionadas en acústica lineal. Por tanto, la entropía Shannon acústica se define como:

$$S_u = - \int P(\mathbf{r}) \ln P(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (2)$$

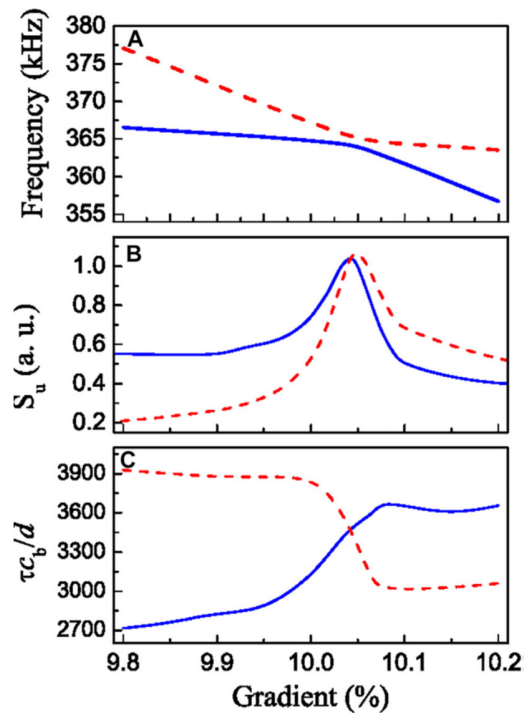
El valor de  $S_u$  proporciona información del esparcimiento espacial del nivel acústico representado por  $u(\mathbf{r})$ , dando la incertidumbre de su localización espacial. Esta cantidad se comporta como la entropía Shannon en la teoría de información; esto es,  $S_u$  aumenta cuando crece la incertidumbre (i.e., cuando el nivel acústico se vuelve más deslocalizado).

### 3. APLICACIÓN AL ESTUDIO DEL EFECTO ZENER ACÚSTICO

Las estructuras que estudiamos están descritas esquemáticamente en la Figura 1 y consisten en una multicapa de  $m$  cavidades de agua acopladas,  $W_m$ , encerradas por  $m + 1$  láminas fluidas de igual anchura,  $A_m$ . Además, consideramos que las láminas están hechas de un metamaterial acústico (un cristal de sonido) con parámetros homogenizados  $\rho_A$  and  $c_A$ , respectivamente, densidad de masa y velocidad del sonido. Una estructura análoga realizada con cavidades de agua rodeadas por láminas de Plexiglás ha sido empleada para observar las oscilaciones Bloch acústicas y el tunneling Zener (ZT) resonante [4].



**Figura 1** Esquema de la estructura multicapa considerada en este estudio, consistente en ocho cavidades,  $W_m$ , con anchuras variables separadas por nueve cristales de sonido homogenizados con igual anchuras  $d_A$  embebidas en un fluido con parámetros  $\rho_w$  and  $c_w$ .

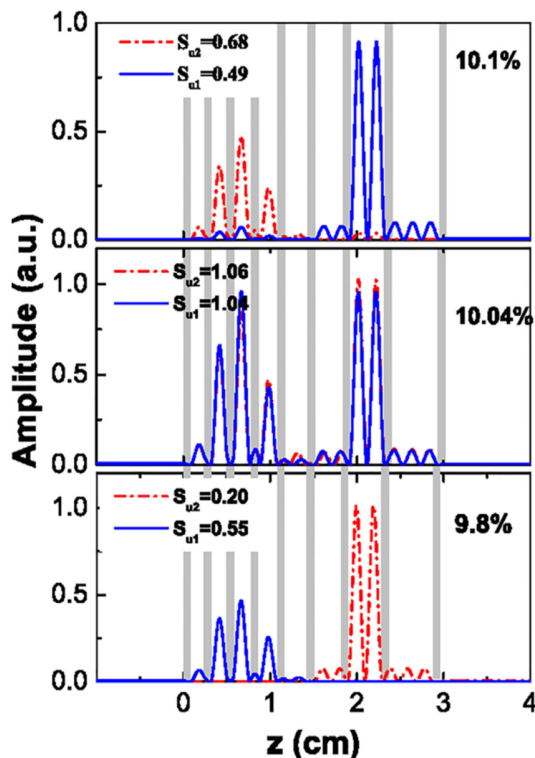


**Figura 2** Frecuencia (A), entropía Shannon acústica (B), y vida media (C) de los dos modos acústicos,  $u_1$ , and  $u_2$ , que interactúan en la región cercana al cruce evitado para la estructura descrita en la Figura 1

Para observar el efecto ZT resonante hay que romper la simetría de traslación introduciendo un gradiente  $\Delta(1/d_w)$  en las anchuras,  $d_w$ , de las cavidades de agua. Figura 2 representa las frecuencias y el valor de las entropías Shannon acústicas de los niveles acústicos involucrados en el cruce evitado, una característica del efecto ZT. Por una parte, la Fig. 2A muestra que la frecuencia  $u_2$  (línea roja a trazos) es siempre más alta que la del modo  $u_1$  (línea azul continua), aunque ambas frecuencias se aproximan cerca del valor crítico del gradiente donde los niveles muestran un cruce evitado. Por otra parte, la Fig. 2B muestra que los valores de

la entropía de los modos exhiben un comportamiento diferente, que está fuertemente correlacionado con el valor del gradiente. Para valores pequeños del gradiente (i.e., para valores mucho más bajos que el crítico), la entropía  $S_{u_2}$  es más pequeña que  $S_{u_1}$ . Este comportamiento indica que el sonido en el modo  $u_2$  está más localizado que en  $u_1$ . A medida que el valor del gradiente aumenta, ambos modos se comportan de forma similar, aumentando sus entropías hasta que en la región entre 10.02% and 10.06%, donde los modos se mezclan fuertemente y la pendiente de la entropía cambia abruptamente de valores positivos a negativos cuando el gradiente alcanza el valor crítico (10.04%).

La explicación dada arriba viene apoyada por la Figura 2C, que muestra los valores calculados de la vida media  $\tau$  (en unidades reducidas) de los modos acústicos. Efectivamente, por debajo del gradiente crítico, el modo  $u_2$  tiene vida media superior al de modo  $u_1$ , lo que indica mayor localización. Para el gradiente crítico ambos modos tienen el mismo valor de  $\tau$  y por encima del gradiente crítico, el estado de localización de los modos cambia, siendo ahora el modo  $u_2$  el que pasa a estar menos localizado.



**Figura 3** Amplitud (en unidades arbitrarias) de los modos acústicos  $u_1$  (línea azul continua) y  $u_2$  (línea roja a trazos) calculados para tres valores del gradiente de anchuras. El valor 10.04% corresponde al valor del gradiente crítico donde aparece el cruce evitado de los modos.

Los resultados anteriores respecto a la localización de los modos son corroborados por la representación de las amplitudes de los modos que se dan en la Fig. 3. El panel central de la Fig. 3 muestra la amplitud de los modos para el gradiente crítico (10.04%), donde los modos resultantes son una combinación enlazante y anti-enlazante de los modos no interactuantes. Como consecuencia, los respectivos campos de desplazamiento (i.e., las funciones de onda en términos mecano-cuánticos), muestran máxima dispersión y las entropías Shannon acústicas alcanzan valores máximos. Para el gradiente 10.1% (panel superior) el nivel  $u_2$  está más localizado en las cavidades inferiores, mientras para el gradiente 9.8% (panel inferior) el modo  $u_2$  se localiza en las cavidades a la derecha donde el valor de la entropía es inferior.

#### 4. CONCLUSIÓN

En este trabajo hemos introducido la fórmula para la entropía Shannon en acústica. Mediante su aplicación al estudio del efecto Zener resonante, hemos comprobado que el cálculo de dicha la fórmula proporciona una información muy útil para caracterizar el grado de localización de los modos acústicos involucrados en el efecto Zener. En particular, hemos concluido que el estado de localización de los modos cambia al atravesar el gradiente crítico donde ambos modos alcanzan su mayor grado de deslocalización.

En resumen, dada la universalidad de la fórmula de Shannon [1], sugerimos que la entropía Shannon acústica sea usada como herramienta preferida de cara a la caracterización del grado de localización de modos acústicos en estructuras acústicas.

Trabajo subvencionado por el contrato PID2020-112759GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

#### 5. REFERENCIAS

- [1] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell Syst Tech J* **27**, 379–656 (1948).
- [2] R. González-Férez, J. S. Dehesa. Shannon entropy as an indicator of atomic avoided crossings in strong parallel magnetic and electric fields. *Phys Rev Lett.* **91**, 11301 (2003).
- [3] D. J. Thouless. Electrons in disordered systems and the theory of localization. *Phys Rep* **13**, 93-142 (1974).
- [4] H. Sanchis-Alepuz, Y. A. Kosevich, J. Sánchez-Dehesa. Acoustic analog of electronic Bloch oscillations and resonant Zener tunneling in ultrasonic superlattices. *Phys Rev. Lett.* **98**, 134301 (2007).
- [5] J. Sánchez-Dehesa and R. Arias-González. Characterization of avoided crossings in acoustic superlattices: The Shannon entropy in acoustics. *Front. Phys.* **10**, 971171 (2022).