

SISTEMAS ACÚSTICOS UNIDIMENSIONALES CON CONDICIONES DE CONTORNO MODULADAS TEMPORALMENTE

Jaime Galiana Nieves^{1}*
Javier Redondo¹
Víctor J. Sánchez-Morcillo¹
Rubén Picó¹

¹ Instituto de Investigación para la Gestión Integrada de Zonas Costeras, Universitat Politècnica de València, Campus de Gandía

RESUMEN

En este trabajo se estudia el comportamiento de sistemas acústicos con propiedades que varían en el tiempo mediante la implementación numérica de condiciones de contorno moduladas temporalmente. Fenómenos en reflexión, tales como el efecto Doppler, o variaciones en las propiedades efectivas del medio, se modelizan mediante simulaciones numéricas de objetos móviles. Este trabajo se centra en el estudio de estos fenómenos a partir de una implementación de sistemas cuyas condiciones de contorno, dependientes en el tiempo, se simulan a partir de la respuesta al impulso obtenida de la impedancia de entrada del sistema en el dominio frecuencial. La variación temporal de esta respuesta al impulso describe las propiedades del sistema cuyas características que definen su impedancia de entrada variable en el tiempo.

ABSTRACT

In this work, we study the behaviour of acoustic systems with time-varying properties by means of the numerical implementation of temporally modulated boundary conditions. Reflection phenomena, such as the Doppler effect, or variations in the effective characteristics of the medium, are modelled by means of numerical simulations of moving objects. This work focuses on the study of these phenomena from an implementation of systems whose time-dependent boundary conditions are simulated from the impulse response obtained through the input impedance of the system in the frequency domain. The time variation of this impulse response describes the properties of the system whose characteristics define its time-varying input impedance.

Palabras Clave— Absorción acústica, filtros FIR, variación temporal, FDTD, resonador de Helmholtz

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha comenzado a estudiar en profundidad la creación de metamateriales fundamentados en la variación temporal de sus propiedades, además de las geometrías que los forman[1–3]. Ejemplos de esto serían materiales cuyas características físicas, como su densidad o la velocidad de propagación del sonido en dicho medio, cambiasen con el tiempo. En este trabajo se estudia la variación temporal de los parámetros efectivos dependientes de la geometría de un sistema. Este sería el caso de los resonadores de Helmholtz, HR, [4, 5]. Estos sistemas presentan unas características de densidad e impedancia acústica efectivas que dependen de la proporción de sus partes geométricas. Variando temporalmente el volumen de estos resonadores, es posible obtener características acústicas. Para el estudio de los sistemas variables en el tiempo mediante simulaciones numéricas, han de usarse métodos que permitan observar la evolución temporal de la propagación del sonido en estos materiales. Este es el caso del método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) [6]. Este método permite estudiar los fenómenos de reflexión y absorción acústica producidos por un sistema en el dominio del tiempo. En el caso de que las variaciones temporales del medio bajo estudio se apliquen sobre las características intrínsecas del mismo, este método es suficiente para el estudio de los fenómenos producidos por estos cambios[7]. Sin embargo, cuando los cambios en el tiempo se producen sobre la geometría del sistema, han de seguirse otros procedimientos.

* **Autor de contacto:** jaiganie@doctor.upv.es

Copyright: ©2023 First author et al. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 3.0 Unported License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author and source are credited.

2. OBJETIVOS

En este trabajo, el objetivo principal es obtener un modelo para simular la acústica en una geometría compleja y variable en el tiempo substituyéndola por una condición de contorno. De esta manera se puede lograr simplificar simulaciones que de otra manera resultarían muy complicadas haciendo uso del método de las diferencias finitas (FDTD). En la Figura 1 se puede observar un ejemplo de simplificación de un sistema formado por un resonador de Helmholtz variable en el tiempo ubicado al final de un tubo. Dicho resonador se substituye por una condición de contorno en forma de filtro de respuesta finita (FIR) cuyos coeficientes serán los obtenidos mediante el procesamiento de la admitancia del sistema.

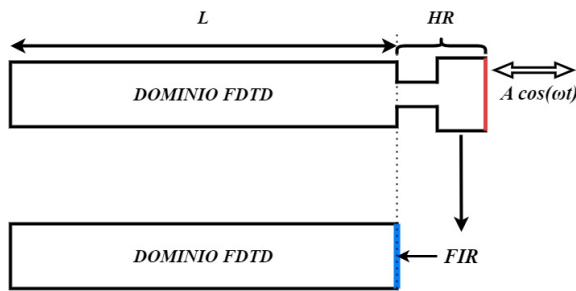


Figura 1. Esquema de resonador de Helmholtz variable en el tiempo implementado como condición de contorno. El contorno oscilante (rojo) varía armónicamente con una amplitud y frecuencias definidos. El sistema se substituye por un contorno dependiente del tiempo (azul).

3. TEORÍA Y MÉTODOS

En este apartado se muestran los pasos seguidos para la substitución de un sistema geométrico por una condición de contorno que dependa del tiempo.

3.1. Filtro FIR como condición de contorno.

En FDTD, una manera de definir una condición de contorno es a partir de la relación entre la presión sonora y la velocidad de partícula:

$$v(L) = p(L)/Z \quad (1)$$

donde v y p son los valores de velocidad de partícula y presión sonora en un punto situado en $x=L$. La impedancia acústica, Z , definida en ese punto determina los efectos absorción y reflexión acústica producidos por el contorno. La forma más sencilla de implementar estas condiciones de contorno consiste en definir el valor de la impedancia como una constante. Por ejemplo, en el caso de desear un contorno rígido, se definiría el valor de la impedancia como infinito, haciendo nula la velocidad de partícula en ese punto.

Sin embargo, hay casos en los que es necesario implementar condiciones de contorno más complejas. Esto puede ayudar a simular materiales con otras propiedades acústicas, ya sean materiales porosos absorbentes o sistemas con geometrías complejas.

Para ello, el método que se ha utilizado en este caso es la creación de filtros de respuesta finita (FIR) y la implementación de estos en los últimos puntos del dominio[8].

Los filtros FIR se basan en el procesamiento de una señal de entrada haciendo uso únicamente de valores anteriores de dicha entrada.

La formulación de un filtro FIR discreto se expresa como

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k], \quad (2)$$

donde y es la señal de salida, x es la señal de entrada, n es la muestra actual y M es la longitud del filtro en muestras. El parámetro h se refiere a los coeficientes del filtro, que definen la respuesta al impulso aplicada por el filtro FIR.

La formulación descrita en la ecuación (2) está discretizada, siendo equivalente a la convolución dos señales en el tiempo:

$$y(t) = h(t) * x(t). \quad (3)$$

3.2. Método de la matriz de transferencia.

El método de la matriz de transferencia (TMM) es un método analítico utilizado para estudiar la propagación de ondas acústicas en problemas unidimensionales [9]. Es un método de estudio en el dominio de la frecuencia, que permite obtener los parámetros efectivos de un sistema acústico a partir de la interacción entre sus valores de presión y velocidad en el punto inicial del sistema con los valores en su punto final a partir de la interacción entre ondas transmitidas y reflejadas. En los casos en los que se conoce la solución analítica del sistema acústico, el método de la matriz de transferencia devuelve resultados muy cercanos a los analíticos[10,11]. Este método se formula como

$$\begin{bmatrix} p(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(kL) & iZ\sin(kL) \\ i\frac{1}{Z}\sin(kL) & \cos(kL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(L) \\ v(L) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

donde p y v son los valores de presión y velocidad. El número de onda que se propaga en el interior del sistema, k , la longitud, $L(m)$, y la impedancia característica del sistema acústico, Z , relacionan los valores en $x=0$ y $x=L$ para obtener los parámetros efectivos del sistema acústico.

La principal característica de este método es la posibilidad de diseñar sistemas complejos mediante la consecución de matrices de transferencia. Multiplicando las matrices para cada sector del sistema diseñado se obtiene una matriz global que define los parámetros efectivos de impedancia y propagación en el sistema completo.

3.3. Obtención de la respuesta al impulso de la admitancia acústica.

A partir del método de la matriz de transferencia se puede obtener la impedancia acústica de un sistema. Partiendo de la expresión mostrada en la fórmula (4) podemos definir la matriz de transferencia como

$$T = \begin{bmatrix} \cos(kL) & iZ\text{sen}(kL) \\ i\frac{1}{Z}\text{sen}(kL) & \cos(kL) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

De esta manera, podemos obtener la impedancia acústica efectiva como:

$$Z_{eff} = \sqrt{\frac{iZ\text{sen}(kL)}{i\frac{1}{Z}\text{sen}(kL)}} = \sqrt{\frac{T_{12}}{T_{21}}}. \quad (6)$$

Este caso es válido para sistemas con condición de contorno final transparente. En el caso de considerar un sistema cuya condición de contorno en $x=L$ sea rígida, ha de forzarse que la velocidad en el punto final del sistema sea nula $v_{x=L} = 0$. De esta manera, y sabiendo que la impedancia de entrada se define como

$$Z_{x=0} = \frac{p_0}{v_0}. \quad (7)$$

Podemos definir la impedancia efectiva de un sistema con condición de contorno final rígido como

$$Z_{eff} = \frac{T_{11}}{T_{21}}. \quad (8)$$

La admitancia acústica se obtiene a partir de la inversa de la impedancia[12]. Para obtener la evolución temporal de la admitancia acústica y, con ello, los coeficientes del filtro FIR utilizado como condición de contorno, aplicamos la transformada de Fourier inversa a los resultados obtenidos a partir de la matriz de transferencia. De esta manera obtendremos la respuesta al impulso del sistema diseñado y podremos implementarlo como una condición de contorno mediante un filtro FIR como se expresa en la ecuación (3):

$$v(t) = \frac{1}{Z_{eff}(t)} * p(t) = Y(t) * p(t), \quad (9)$$

siendo $Y(t)$ la respuesta al impulso de la admitancia del material que se quiera implementar como condición de contorno en función del tiempo. El símbolo $*$ denota la operación de convolución.

3.4. Variación temporal de la condición de contorno.

Existen varios métodos para la implementación de filtros FIR variables en el tiempo [13]. En este trabajo se ha optado por la creación de una respuesta al impulso para cada paso temporal de la simulación, dependiente de la variación de la geometría del sistema diseñado. Se han diseñado los sistemas con una condición final rígida que oscila con una frecuencia y amplitud determinadas. De esta manera sólo es necesario originar una oscilación completa para poder estudiar los efectos producidos por la variación temporal de la geometría de los sistemas implementados.

4. SIMULACIONES Y RESULTADOS

En este apartado, con el objetivo de verificar el funcionamiento de los métodos previamente explicados y la respuesta de un modelo variable en el tiempo, se han realizado una serie de simulaciones 1D mediante FDTD.

En primer lugar, una vez obtenidos los coeficientes de los filtros FIR utilizados como condición de contorno, se comprueba que los resultados de las simulaciones coincidan con lo obtenido a partir de la matriz de transferencia.

En segundo lugar, se estudia la respuesta obtenida ante la variación temporal de estas condiciones de contorno. Esto se realiza tanto para un tubo simple con una pared oscilante, cuyo comportamiento en reflexión es conocido[14], como para el caso de resonadores con volumen variable.

Para la obtención de los coeficientes de los filtros FIR se han aplicado pérdidas en la implementación de la matriz de transferencia [15].

4.1. Admitancia acústica en el dominio temporal

A partir del método de la matriz de transferencia, se puede obtener la impedancia efectiva del sistema acústico diseñado. En la figura 2 se muestran los valores en frecuencia tanto de la impedancia efectiva como de la correspondiente admitancia para un resonador de Helmholtz cuya frecuencia de resonancia es de 237 Hz.

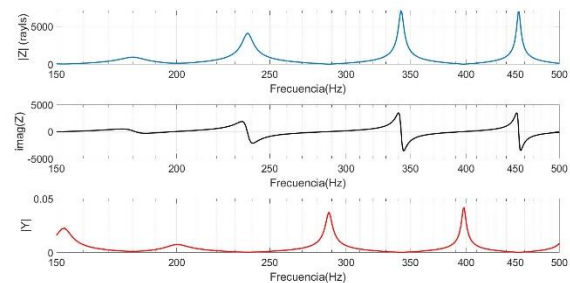


Figura 2. Valor absoluto (azul) y parte imaginaria (negro) de la impedancia obtenida a partir del método de la matriz de transferencia de un resonador de Helmholtz con una frecuencia de resonancia de 237 Hz. En rojo se muestra la admitancia del sistema.

A partir de la admitancia acústica, se puede obtener la respuesta al impulso mostrada en la figura 3 que servirá como coeficientes para el filtro FIR implementado como condición de contorno.

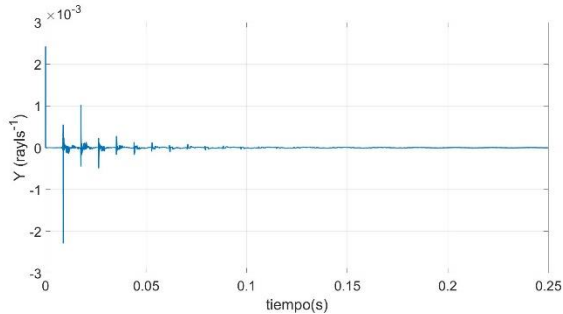


Figura 3. Respuesta al impulso obtenida a partir de la admitancia acústica de un resonador de Helmholtz con pérdidas con una frecuencia de resonancia de 237 Hz conectado a un tubo de 6m de longitud.

4.2. Impedancia y coeficiente de reflexión de sistemas estáticos.

Con los coeficientes del filtro FIR obtenidos para un HR con una frecuencia de resonancia de 150 Hz, se simula la respuesta del modelo para comprobar el correcto funcionamiento del método. En la figura 4 se muestra el coeficiente de reflexión y la impedancia obtenidas para el HR actual, comparando los resultados con los obtenidos a partir de los parámetros efectivos de la matriz de transferencia.

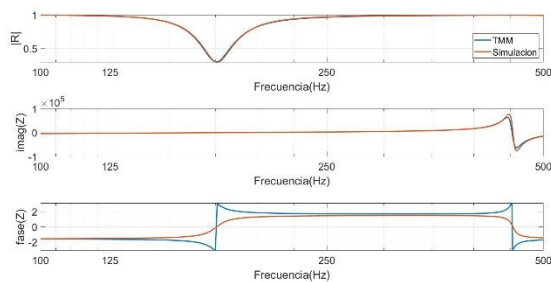


Figura 4. Coeficiente de reflexión (arriba), parte imaginaria de la impedancia acústica (centro) y fase de la impedancia (abajo) de un resonador de Helmholtz. Se muestran a partir de los resultados del TMM (azul) y las simulaciones mediante FDTD (naranja).

Se puede observar una correcta aproximación de los resultados obtenidos mediante simulaciones con los obtenidos a partir del método de la matriz de transferencia.

4.3. Sistemas móviles. El tubo oscilante y el resonador modulado.

Para comprobar el funcionamiento del modelo con condición de contorno variable en el tiempo se comprobó en primer lugar la reflexión producida por un tubo cuyo final oscila a una frecuencia concreta. Como se observa en la figura 5, la reflexión obtenida mediante simulaciones por dicho sistema excitado por un tono puro de 200 Hz y cuyo final rígido oscila a 50 Hz, produce una atenuación en la fundamental de la onda incidente. Debido al efecto Doppler se obtienen también dos armónicos centrados en la frecuencia de excitación distanciados en ambas direcciones del eje frecuencial por la frecuencia de oscilación del contorno reflectante.

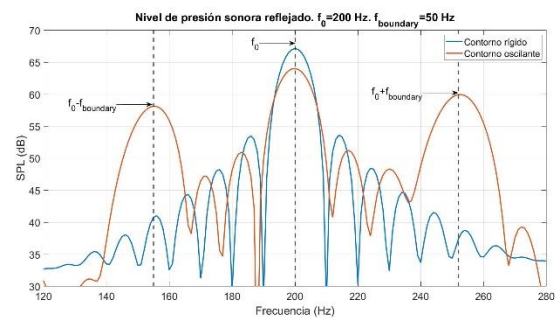


Figura 5. Nivel de presión sonora reflejado obtenido mediante simulaciones con condición de contorno dependiente del tiempo de un tubo rígido (azul) y un tubo con pared final oscilante (naranja). La onda incidente tiene una frecuencia central f_0 de 200 Hz mientras que la pared oscila a una frecuencia $f_{boundary}$ de 50 Hz.

Una vez comprobado el correcto funcionamiento de las simulaciones con condición de contorno variable, se procede a realizar el estudio de resonadores de Helmholtz con un volumen oscilante. Se observa la absorción acústica producida por dicho resonador, diseñador para absorber a una frecuencia de 200 Hz, con una pared final que oscila a 150 Hz con una amplitud de 1 mm. Se compara la absorción obtenida con la fase inicial de la oscilación del contorno final del resonador (figuras 6 y 7).

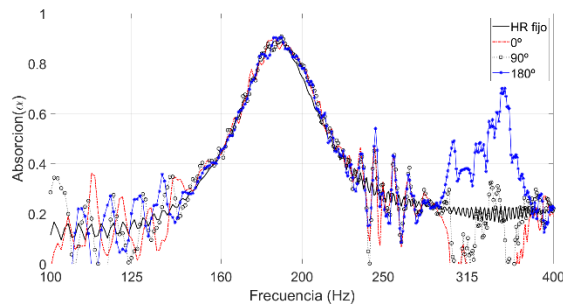


Figura 6. Coeficiente de absorción obtenido mediante simulaciones para un HR con una frecuencia de resonancia de 200 Hz. Se muestran los resultados para el HR fijo (línea negra) junto con la absorción obtenida para tres casos de HR variables: fase inicial de oscilación de 0° (rojo), 90° (puntos negros) y 180° (azul). La pared del HR oscila a 150 Hz con una amplitud de 1 mm.

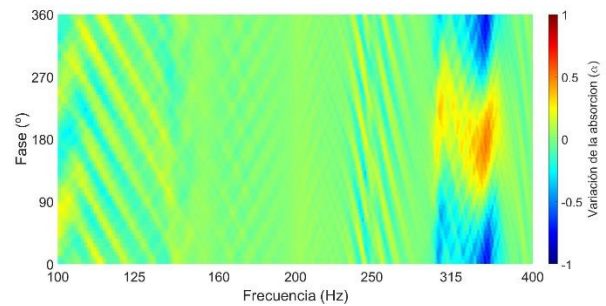


Figura 8. Variación del coeficiente de absorción obtenido a partir de los HR variables con respecto a la absorción proporcionada por el caso del HR fijo. Las zonas en rojo indican un aumento del coeficiente de absorción para cada frecuencia y fase inicial de oscilación. Las zonas en azul muestran una disminución de la absorción. La pared del HR oscila a 150 Hz con una amplitud de 1 mm.

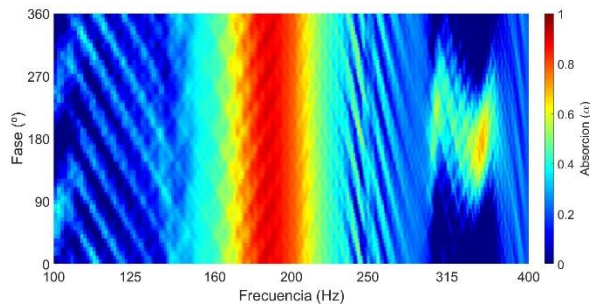


Figura 7. Coeficiente de absorción con respecto a la frecuencia y la fase inicial de oscilación de un HR con frecuencia de resonancia de 200 Hz. La pared del HR oscila a 150 Hz con una amplitud de 1 mm.

Se puede observar que la absorción producida por un HR con volumen oscilante depende de la fase inicial de la oscilación de dicho volumen. Para casos como el de una fase inicial de 180° se observa una mayor absorción en frecuencias superiores a la frecuencia de resonancia del resonador, mientras que en el caso de 90° se observa un empeoramiento. En la figura 8, se observa la variación con respecto al caso del resonador con volumen fijo con respecto a la fase inicial de la oscilación del contorno.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha estudiado la implementación de sistemas acústicos variables en el tiempo mediante condiciones de contorno utilizando la admitancia de entrada de dicho sistema.

Se observa una mejora en las propiedades de absorción de los resonadores variable en el tiempo para ciertas fases iniciales de la oscilación.

Cabe destacar que las simulaciones mediante FDTD de los sistemas estáticos coinciden con los resultados obtenidos mediante el método de la matriz de transferencia.

En futuros trabajos, se estudiará la influencia de la disposición, frecuencia de oscilación y fase de varios resonadores para la creación de metamateriales variables en el tiempo. Además, se mejorará la metodología de generación y variación temporal de los filtros necesarios para la implementación de las condiciones de contorno, buscando generar modelos complejos y estables.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Economía e Innovación (MINECO) y la Unión Europea FEDER (proyecto PID2019-109175GB-C22 y PID2022-138321NB-C22).

7. REFERENCIAS

- [1] A. G. Hayrapetyan, K. K. Grigoryan, R. G. Petrosyan, y S. Fritzsche, «Propagation of sound waves through a spatially homogeneous but smoothly time-dependent medium», *Ann. Phys.*, vol. 333, pp. 47-65, 2013, doi: 10.1016/j.aop.2013.02.014.
- [2] C. Caloz y Z.-L. Deck-Léger, «Spacetime Metamaterials, Part I: General Concepts», *IEEE Trans. Antennas Propag.*, n.º 68, pp. 1569-1582, 2020, doi: 10.1109/TAP.2019.2944225.
- [3] N. Krauss y J. Paulose, «Nondispersive One-Way Signal Amplification in Sonic Metamaterials», *Phys. Rev.*, vol. 16, n.º 024020, 2022, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.17.024020>.
- [4] A. Zaikin, «A nonlinear model of the helmholtz resonator with a Movable Wall», *Acoust. Phys.*, vol. 42, n.º 3, pp. 329-333, 1996.
- [5] D. Zhao, C. A. Barrow, A. S. Morgans, y J. Carrote, «Acoustic Damping of a Helmholtz Resonator with an Oscillating Volume», *AIAA J.*, vol. 47, n.º 7, jul. 2009, doi: <https://doi.org/10.2514/1.39704>.
- [6] K. S. Yee, «Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media», *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-14, n.º 3, may 1966, doi: 10.1109/TAP.1966.1138693.
- [7] R. Picó, J. Redondo, y V. J. Sánchez-Morcillo, «Wave propagation in a time-varying elastic medium». 53º congreso Español de Acústica. XII congreso Ibérico de acústica, 2022. [En línea]. Disponible en: <https://documentacion.sea-acustica.es/publicaciones/Elche22/ID-108.pdf>
- [8] Botteldooren, Dick, «Finite-difference time-domain simulation of low-frequency room acoustic problems», *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 98, pp. 3302-3308, 1995, doi: <https://doi.org/10.1121/1.413817>.
- [9] N. Jiménez, O. Umnova, y J.-P. Groby, *Acoustic Waves in Periodic Structures, Metamaterials and Porous Media*, vol. 143. en *Topics in Applied Physics*, vol. 143. Springer.
- [10] D. P. Jena, J. Dandsena, y V. G. Jayakumari, «Demonstration of effective acoustic properties of different configurations of Helmholtz resonators», *Appl. Acoust.*, n.º 155, pp. 371-382, 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2019.06.004>.
- [11] A. Dell, A. Krynkina, y K. V. Horoshenkov, «The use of the transfer matrix method to predict the effective properties of acoustical systems», *Appl. Acoust.*, vol. 182, n.º 108259, 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2021.108259>.
- [12] L. E. Kinsler, A. R. Frey, Alan. B. Coppens, y J. V. Sanders, *Fundamentals of acoustics*, Fourth. en John Wiley & Sons.
- [13] F. Wefers y M. Vorländer, «Efficient time-varying FIR filtering using crossfading implemented in the DFT domain», *Forum Acusticum*, 2014.
- [14] G. Michel, «The generalized Doppler effect for surface waves», *Lett. J. Explor. Front. Phys.*, vol. 116, n.º 44002, 2016, doi: 10.1209/0295-5075/116/44002.
- [15] Stinson, Michael R, «The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape», *Acoust. Soc. Am.*, p. 10, sep. 1990, doi: 10.1121/1.400379.