53º CONGRESO ESPAÑOL DE ACÚSTICA
XII CONGRESO IBÉRICO DE ACÚSTICA

SISTEMAS DE AFINACIÓN COMO ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS DE GRUPO

PACS: 43.75.−z, 02.20.-a.

Aguado Yáñez, María y Rivas Vargas, Ángel. Departamento de Física Teórica, Universidad Complutense de Madrid, Plaza de Ciencias, 1, Ciudad Universitaria, 28040, Madrid, España, 913944509, maguad02@ucm.es, anrivas@ucm.es.

Palabras Clave: sistema de afinación, grupo algebraico, temperamento igual, intervalo musical, simetrías.

ABSTRACT.

Within the area of musical acoustics, the evolution of western tuning systems can be studied through the perspective of mathematical and physical models, since a tuning system is a set of mathematical relations imposed on frequencies. In this document, the Pythagorean and mesotonic tunings, as well as the equal temperament, are characterised as group structures generated by their frequencies. The characterization will be first made using geometric curves, and then quantitative methods will be applied to make a numerical description. The results show that complexity decreases the more modern the systems are, which partly explains their historical evolution. Moreover, these models can be extended for further new systems, and are meant to be intuitive and visual for both scientists and musicians to understand the advantages and disadvantages of each system.

RESUMEN.

Dentro del la rama de la acústica musical, la evolución que han seguido los principales sistemas de afinación occidentales puede ser analizada a través de modelos físicos y matemáticos, dado que un sistema de afinación es un conjunto de relaciones matemáticas impuestas sobre frecuencias. Este trabajo caracteriza los sistemas pitagórico, mesotónico y el temperamento igual en base a la estructura de grupo generada por sus frecuencias. La caracterización se hace en primer lugar mediante curvas geométricas, y en segundo lugar mediante métodos cuantitativos que los describen numéricamente. Los resultados muestran que estos sistemas disminuyen en complejidad cuanto más modernos son, lo que explica, en parte, su evolución la histórica. Además los métodos empleados son igualmente aplicables a otros sistemas y pretenden ser intuitivos y visuales, de manera que tanto científicos como músicos comprendan las ventajas e inconvenientes de cada sistema de afinación.

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo ha consistido en el estudio de propiedades de algunos de los sistemas de afinación más relevantes de la historia de la música occidental modelizados como estructuras algebraicas de grupo. El objetivo es justificar su evolución histórica desde un punto de vista de simplicidad matemática, así como demostrar con modelos visuales e intuitivos las ventajas del sistema de afinación actual frente a los más antiguos. Los sistemas de afinación a tratar son el pitagórico, el mesotónico y el temperamento igual.

Un sistema de afinación es un conjunto de relaciones entre frecuencias que determina la longitud de los intervalos que hay entre las notas. El primer sistema de afinación que se utilizó en occidente fue desarrollado por Pitágoras (s. VI a.C.) [1]. El sistema pitagórico utiliza los intervalos de quinta y octava para generar todas sus notas. Las proporciones de la quinta y de la octava con respecto a una frecuencia de partida son 2:3 y 2:1 respectivamente. Así pues, el conjunto de notas de este sistema se puede definir a partir de una frecuencia fundamental ν como

$$\left(\frac{3}{2}\right)^a 2^b \cdot \nu \in P \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

El sistema pitagórico presenta problemas a la hora de componer obras musicales, ya que generar la octava de una nota ascendiendo por quintas no equivale en frecuencia a aplicar directamente una octava. Además, en este sistema los intervalos de tercera son demasiado disonantes, y aunque inicialmente la tercera no era muy relevante para la armonía, poco a poco fue ganando más presencia en las obras. Desde el s.XV y hasta la actualidad [1], se introdujeron en Europa nuevos sistemas que trataban de solventar estos problemas.

Uno de estos nuevos sistemas fue el mesotónico, el cual mantiene prácticamente la misma estructura que el pitagórico salvo por la introducción de un nuevo grado de libertad, el parámetro k, que permite ajustar las quintas para variar ligeramente los intervalos, tal y como describe la ecuación (2).

$$\left(\frac{3}{2} - k\right)^a 2^b \cdot \nu \in M \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad k \in [0, 3/2). \tag{2}$$

Aunque el sistema mesotónico supone una mejora con respecto al pitagórico, ya que permite variar las quintas en favor del intervalo que se desee, este no permite beneficiar a todos los intervalos de forma simultánea de manera que todos puedan ser utilizados a la vez sin producir disonancias. El temperamento igual, que actualmente es sobre el cual se construyen la inmensa mayoría de obras musicales, sí logra conceder a todos los intervalos la misma relevancia sin generar disonancias. Es por este motivo por el que acabó desplazando al mesotónico. Este sistema establece 12 clases de equivalencia matemáticas separando las notas con un intervalo geométrico constante m, de manera que las relaciones en frecuencia entre las notas son siempre las mismas independientemente de la escala, así pues

$$m^a \cdot \nu \in I \quad \text{con } [a] \in \mathbb{Z}_{12} \quad \text{donde } a \sim a + 12. \tag{3}$$

En este trabajo se describen estos sistemas de afinación como estructuras de grupo. Esta estructura algebraica permite estudiar propiedades de los mismos que esclarecen y justifican su evolución histórica. Una vez planteados los grupos, se han utilizado modelos para realizar primero una interpretación geométrica de los grupos, y después una caracterización cuantitativa. La caracterización cuantitativa se ha realizado a su vez mediante dos métodos distintos que se explicarán posteriormente: el método de la función de distancia acumulada y el método del baricentro.

La demostración de que el sistema pitagórico y el temperamento igual son grupos ya se encuentra en la literatura; véase, por ejemplo, [2] y [3]. En este trabajo se introduce la demostración de que el sistema mesotónico forma también grupo, la cual se deduce directamente de la estructura de grupo del pitagórico por semejanza. No se han encontrado en la literatura, sin embargo, modelos similares a los de este trabajo para interpretar geométricamente los grupos o para caracterizarlos cuantitativamente.

2. METODOLOGÍA

2.1. Sistemas de afinación como grupos algebraicos

La música se basa en frecuencias que presentan simetrías, por lo que puede ser descrita como sistema físico, y al igual que ocurre en muchos otros campos de la física, los sistemas con simetrías forman a menudo estructuras de grupo [4].

El sistema pitagórico se puede describir mediante un grupo infinito G formado por combinaciones de quintas y octavas [2]. Cabe destacar que este grupo tiene dos subgrupos infinitos a su vez: el subgrupo de las quintas $(3/2)^a$ con $a \in \mathbb{Z}$ y el subgrupo de las octavas 2^b con $b \in \mathbb{Z}$. En secciones posteriores se analizará únicamente el primer subgrupo mencionado, ya que las octavas generan notas que se consideran equivalentes en música, por lo que estudiar las quintas será suficiente para extraer propiedades del grupo.

El sistema mesotónico también se puede describir como un grupo infinito, y tiene los mismos subgrupos que el sistema pitagórico, pues la única diferencia es un factor de ajuste k para los intervalos de quinta: $(3/2-k)^a$. En este caso también podemos fijarnos exclusivamente en las quintas para analizar el grupo. Las propiedades de este grupo se demuestran de forma directa y análoga al sistema anterior:

$$* \ Cierre\colon \ \left(\frac{3}{2}-k\right)^a 2^b \cdot \left(\frac{3}{2}-k\right)^c 2^d = \left(\frac{3}{2}-k\right)^e 2^f \ \in M.$$

$$* \ Elemento\ neutro\colon \ \left(\frac{3}{2}-k\right)^0 2^0 \cdot \left(\frac{3}{2}-k\right)^a 2^b = \left(\frac{3}{2}-k\right)^a 2^b \cdot \left(\frac{3}{2}-k\right)^0 2^0 = \left(\frac{3}{2}-k\right)^a 2^b.$$

$$* \ Asociatividad\colon \ \left(\frac{3}{2}-k\right)^a 2^b \left[\left(\frac{3}{2}-k\right)^c 2^d \cdot \left(\frac{3}{2}-k\right)^e 2^f\right] = \left[\left(\frac{3}{2}-k\right)^a 2^b \cdot \left(\frac{3}{2}-k\right)^c 2^d\right]\left(\frac{3}{2}-k\right)^e 2^f.$$

$$* \ Inversos\colon \ \left(\frac{3}{2}-k\right)^a 2^b \cdot \left(\frac{3}{2}-k\right)^{-a} 2^{-b} = 1. \qquad (4)$$

El temperamento igual se describe mediante el grupo cíclico abeliano de 12 elementos, donde el generador del grupo es $m = 2^{\frac{1}{12}}$, como resultado de dividir el intervalo de octava en 12 notas en progresión geométrica [3]. El intervalo de quinta en este temperamento se corresponde con m^7, que resulta ser además un generador de este grupo. Este hecho resulta muy útil para establecer comparaciones con los dos sistemas anteriores, ya que también podemos fijarnos únicamente en las quintas. En este caso no obviamos las octavas, como ocurre en los dos sistemas anteriores, ya que las propias quintas generan el grupo entero, así que no es necesario tener en cuenta esta equivalencia.

Las frecuencias que componen un sistema de afinación son el resultado de la acción de los elementos de los grupos sobre la frecuencia fundamental. Por tanto, los grupos describen las estructuras y simetrías de cada sistema pero no son equivalentes a dichos sistemas en cuanto a elementos.

2.2. Interpretación geométrica de los sistemas de afinación como estructuras de grupo

Es posible utilizar curvas geométricas para representar estos grupos, de manera que se pueda comprender mediante un método visual qué problemas ofrece cada sistema y por qué el temperamento igual es el más ventajoso. Las trayectorias curvas que se van a utilizar son espirales. La música encierra siempre cierta periodicidad al aumentar en frecuencia, pues cuando se parte de *do* y se asciende en una escala volvemos a llegar a *do* al cabo de 12 notas, y por ello resultan útiles las curvas concéntricas. Por otro lado, las espirales son curvas abiertas, infinitas, así que describen también adecuadamente el carácter infinito de los sistemas pitagórico y mesotónico. Para el temperamento igual, por el contrario, al establecerse clases de equivalencia no interesa asociarlo a una curva abierta e infinita. La curva ideal para describir este temperamento es el círculo, que en el fondo es una "espiral" de radio constante si se toma como un colapso en clases de equivalencia de los sistemas anteriores. A continuación, se plantea un modelo matemático que devuelve estas curvas geométricas (espirales o un círculo) dependiendo del sistema de afinación que se introduzca, siendo n cada una de las notas a través de las que iteran los elementos para un grupo dado:

$$\begin{cases} x = F(n)\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) \\ y = F(n)\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \text{ donde } F(n) = \frac{\nu(n)}{m^{7n}\cdot\nu} \rightarrow \begin{cases} \nu_P(n) = (3/2)^n\cdot\nu, \\ \nu_M(n) = (3/2 - k)^n\cdot\nu, \\ \nu_I(n) = m^{7n}\cdot\nu. \end{cases} \quad (5)$$

El ángulo aumenta en $\pi/6$ con cada iteración porque se corresponde con la doceava parte de un circulo, y las escalas son precisamente de 12 notas. La amplitud depende de la frecuencia para que el radio de la curva aumente al ascender, y está normalizada con respecto al temperamento igual para que en el caso de introducir las frecuencias de este sistema la curva resultante sea un círculo y no una espiral. Es importante destacar que para establecer una biyección adecuada entre las notas de los distintos sistemas, debemos normalizar al temperamento igual utilizando el generador m^{7n} (las quintas) y no simplemente n, ya que los temperamentos pitagórico y mesotónico generan sus frecuencias a través de quintas. Se ha escogido como nota fundamental a partir de la cual se aplican los intervalos la nota *do* con frecuencia 261.226Hz, más conocido como *do central* en música.

2.3. Caracterización cuantitativa de los sistemas de afinación como estructuras de grupo

Nótese que para $k_p = 0$ el sistema mesotónico coincide con el pitagórico. Del mismo modo, existe un valor de k_I para el cuál el sistema mesotónico coincide con el temperamento igual. Este valor de k_I se puede calcular teóricamente como se muestra a continuación:

$$\nu(n)\cdot\left(\frac{3}{2} - k\right)^n = m^{7n}\cdot\nu(n) \Rightarrow \frac{3}{2} - k_I = m^7 \Rightarrow k_I = \frac{3}{2} - 2^{\frac{1}{12}}. \quad (6)$$

Variar el parámetro k de manera que se acerque o se aleje de la situación ideal en clases de equivalencia del temperamento igual sugiere que el valor k_I calculado en (6) es un extremo relativo. Para estudiar este extremo, resulta útil asignar a las frecuencias de los temperamentos un ángulo en una circunferencia de radio unidad.

A las frecuencias del temperamento igual, como se subdivide la octava en doce partes iguales y surgen 12 clases de equivalencia, se les asignan los ángulos $n \cdot \pi/6$ bajo $\mathrm{mod}(12)$ para subdividir el círculo en 12 clases también. Para asignar ángulos a los sistemas pitagórico y mesotónico, hay que transformar en distancia de arco la diferencia en frecuencia entre el valor que asigna a una nota n cada uno de estos sistemas con respecto a su valor en el temperamento igual. Como la relación entre las frecuencias es geométrica y entre ángulos es aritmética, para calcular el ángulo que corresponde a una frecuencia con respecto a las clases del temperamento igual, se procede como

$$\frac{\log(\nu)}{\log(\nu_I)} = \frac{\alpha_I}{\alpha} \Rightarrow \frac{\log\left(2^{\frac{7n}{12}}\right)}{\log\left[(3/2-k)^n\right]} = \frac{\pi/6}{\alpha} \Rightarrow \alpha(n) = n \cdot \frac{\frac{\pi}{6}\log\left(\frac{3}{2}-k\right)}{\frac{7}{12}\log(2)}. \tag{7}$$

Utilizando la parametrización

$$\begin{cases} x = \cos[\alpha(n)]\,, \\ y = \sin[\alpha(n)]\,, \end{cases} \tag{8}$$

se pueden graficar los ángulos. Analizando las distancias de arco entre los ángulos bajo distintos sistemas y la simetría de cada uno de ellos, se puede cuantificar en función del parámetro k cuán cerca se encuentra el sistema del extremo relativo que representa la situación óptima en clases de equivalencia del temperamento igual, por lo que a continuación se explican los dos modelos que se han utilizado para estudiar cada uno de estos aspectos.

Para cuantificar los desplazamientos en distancia de arco de un sistema con valor k con respecto a las 12 clases de equivalencia, se plantea la función distancia acumulada d:

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^{\gamma(n-n_c)}} \cdot |\alpha(n) - \alpha_I(n)|. \tag{9}$$

Esta serie tendrá un valor distinto para cada k. La resta de ángulos equivale a restar distancias de arco ya que el radio de la circunferencia es 1. La función sigmoide se ha añadido para aportar un peso mayor a las frecuencias más bajas y para asegurar la convergencia de la serie. Variando el valor de γ y n_c se puede escoger el número n de notas a las que se quiere atribuir un mayor peso. El parámetro γ regula la pendiente de la sigmoide y el parámetro n_c impone el punto donde cambia la curvatura, es decir, el centro de la función. Teniendo en cuenta que el rango auditivo es de 20Hz a 20000Hz, lo que equivale aproximadamente a 10 octavas, resulta apropiado escoger un n_c tal que se completen 10 vueltas en el círculo. Cada octava son 12 notas, así que se ha de aportar mayor peso a las primeras 120 notas. Un valor apropiado para γ para que la curva no sea muy abrupta es 0.05.

Por otro lado, para estudiar la simetría de un sistema con respecto a las 12 clases equiespaciadas en el círculo, se plantea la función módulo de la posición del baricentro:

$$\vec{R} = \sum_{n=1}^{12n} \frac{(x_n, y_n)}{12} \Rightarrow R = \sqrt{x_{total}^2 + y_{total}^2}. \tag{10}$$

Cuanto menor es el valor de $\vec{R}$, mayor será la simetría del sistema, pues la distribución de puntos en el círculo está más equilibrada.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1. Interpretación geométrica de los sistemas de afinación como estructuras de grupo

Si representamos las curvas de (5) según aumentamos n para cada sistema se obtienen la siguientes gráficas:

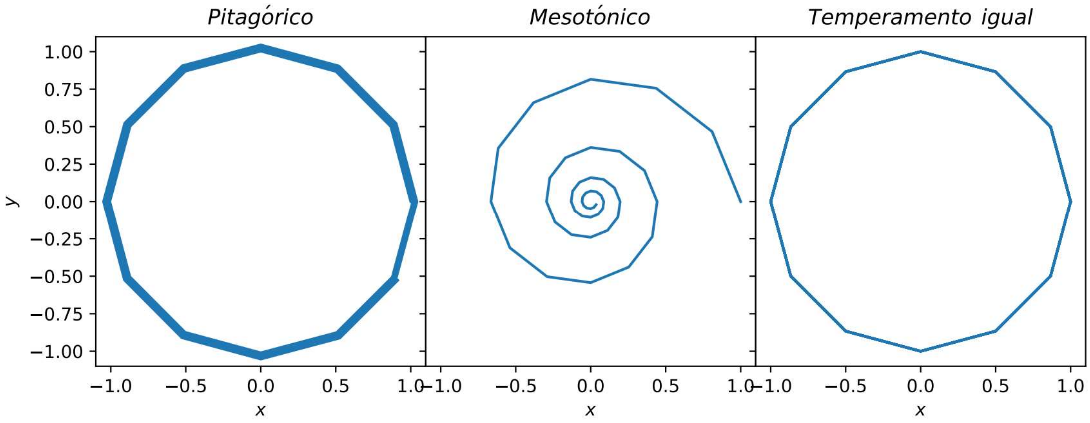

Figura 1 – representación en dos dimensiones de cada sistema de afinación según la parametrización en función de n, con $k = 0.1$ para el caso mesotónico. La nota fundamental con $n = 1$ sobre la cual se han generado los sistemas es el *do central*. Se han representado hasta $n = 48$ notas en cada caso (3 escalas de 12 notas).

Las gráficas correspondientes a los sistemas pitagórico y mesotónico son espirales en dos dimensiones, como se observa en la figura 1. Para apreciar que en el caso del sistema pitagórico se obtiene una espiral, nótese que la línea de la imagen del mesotónico es más gruesa porque se trata de una trayectoria abierta dando vueltas con un aumento lento del radio. El temperamento igual es, sin embargo, un dodecágono cerrado. Para la representación del sistema mesotónico se ha escogido $k = 0.1$, y lo que observamos es que difiere más del temperamento igual de lo que lo hace el pitagórico, cuando se supone que el mesotónico es una mejora y ha de parecerse más al igual. Esto se debe al valor de k escogido. Escogiendo un valor diferente de k podemos aproximarnos más al temperamento igual de lo que lo hace el pitagórico. En este caso se ha escogido una k que acentúe el crecimiento del radio en la espiral para hacer notable la variación en función de este parámetro.

Las frecuencias en música siguen progresiones geométricas y suelen crecer exponencialmente, ya que nuestro oído percibe logaritmos de estas frecuencias [5]. Es por este motivo por el que las espirales que modelan estos sistemas son logarítmicas, en las que el radio crece exponencialmente.

Con esta interpretación geométrica se puede apreciar de forma visual dónde reside la complejidad de los sistemas antiguos y por qué el temperamento igual es el sistema más sencillo. El círculo, de trayectoria cerrada, permite comprender mejor el colapso en clases de equivalencia.

3.3. Caracterización cuantitativa de los sistemas de afinación como estructuras de grupo

Graficando la parametrización (8) se obtiene la siguiente figura

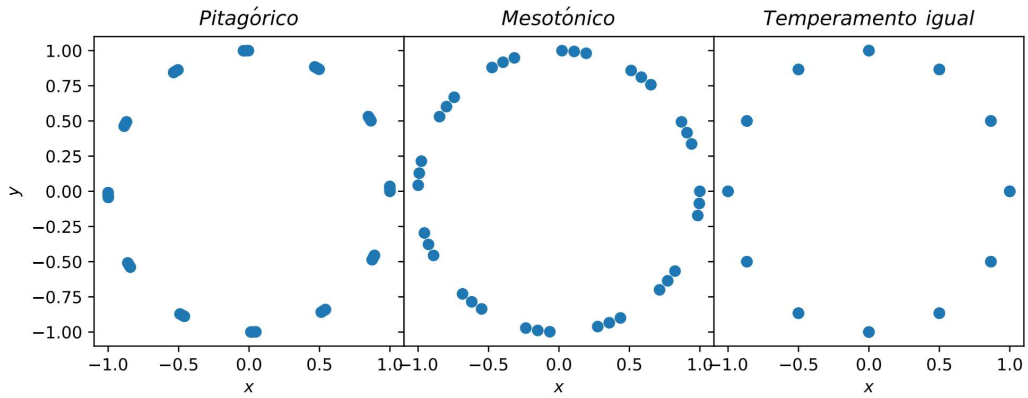

Figura 2 – representación de cada sistema de afinación mediante la parametrización $\alpha(n)$. El valor de k escogido para el mesotónico es $k = 0.01$. Se han tomado $n = 36$ notas (3 escalas). Se observa claramente que el temperamento igual tiene 12 clases definidas, y que los otros dos no. Para este valor de k el sistema mesotónico se desplaza más que el pitagórico con respecto a las clases del temperamento igual.

Aquí, se aprecia claramente la mayor simetría del temperamento igual y los desplazamientos en distancia de arco de los otros dos sistemas con respecto al temperamento igual. Representando a continuación la función distancia y el módulo del baricentro a partir de las ecuaciones (9) y (10) se obtiene

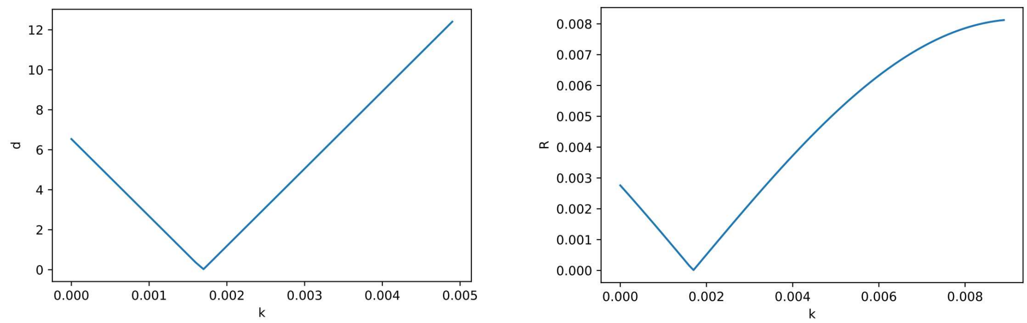

Figura 3 – representación de la distancia total en función de k entorno al mínimo a la izquierda, y del módulo de la posición del baricentro R con respecto a k para $n = 480$.

Se puede observar claramente el mínimo relativo que se había predicho teóricamente. El mínimo de estas funciones es trivialmente 0, ya que al introducir el temperamento igual no hay desplazamientos en distancia de arco y el sistema es completamente simétrico. El valor que lleva la función a cero es el calculado en la ecuación (6).

El valor de d y R para $k_p = 0$ se corresponde con el temperamento pitagórico, que es el extremo izquierdo de la función graficada. A partir de ese valor el sistema mesotónico disminuye su distancia relativa al temperamento igual hasta converger a él en $k_I = 1.5 - m^7 = 0.001694$, donde $m = 2^{\frac{1}{12}}$. Pasando este valor el sistema mesotónico se aleja de las clases de equivalencia a medida que k aumenta. Así pues, en estos modelos los parámetro d y R miden cuánto nos alejamos del valor ideal k_I del temperamento igual cuando nos desplazamos, y muestra gráficamente por qué el sistema mesotónico resulta ser una mejora con respecto al pitagórico.

En el caso del método del baricentro, a medida que n aumenta, aparece una dependencia en k que parece indicar que el sistema presenta simetría periódicamente. Sin embargo, tan solo el primer mínimo, el del temperamento igual en k_I, debe ser tenido en cuenta. En los mínimos consecutivos las notas del sistema no se agrupan en clases de equivalencia. Lo que ocurre en estos casos es que para ciertos múltiplos de 12 las asimetrías del sistema se compensan unas con otras de manera que el módulo de la posición del baricentro se anula. Se puede observar mejor este comportamiento si se grafican simultáneamente los valores de R para diferentes múltiplos de 12, como se muestra a continuación:

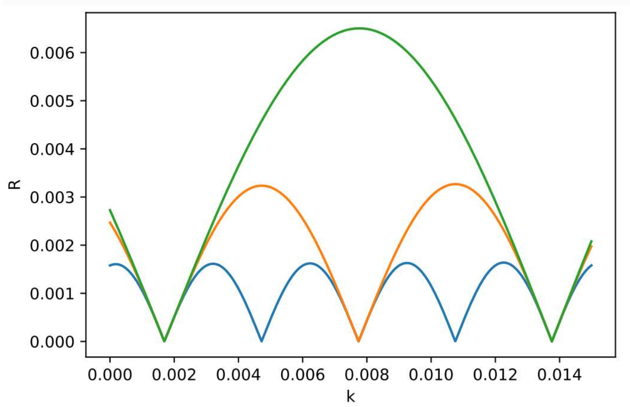

Figura 4 – representación del módulo de la posición del baricentro R con respecto a k para $n = 600$ (verde), $n = 1200$ (naranja) y $n = 2400$ (azul). Cuanto mayor es n, mayor número de mínimos presenta el sistema.

Aquí vemos cómo dependiendo del múltiplo de 12 del que se trate aparecen unos mínimos u otros, y tan solo el mínimo en k_I es común a todos los casos. El resto de mínimos solo aparecen cuando se compensan de alguna manera las asimetrías del sistema, sin recuperarse clases de equivalencia. En este sentido, se puede considerar que el método de la distancia acumulada es más efectivo, ya que no presenta esta periodicidad "accidental" en función de n.

4. CONCLUSIONES

Utilizar la estructura algebraica de grupo para estudiar sistemas de afinación ha permitido describirlos empleando distintos enfoques, tanto cuantitativos como cualitativos, de manera que se pueda explicar la evolución histórica que estos sistemas han seguido y la complejidad armónica de cada uno desde un punto de vista puramente matemático.

Las clases de equivalencia del temperamento igual representadas como un dodecágono cerrado y como 12 ángulos en el círculo son claramente mucho más simples y prácticas que las espirales infinitas cuyos correspondientes ángulos en el círculo no presentan la simetría de las 12 clases. Además, también es claro que la introducción del nuevo parámetro k por parte del sistema mesotónico con respecto al sistema pitagórico aporta una mejora significativa, y que variando este parámetro k podemos localizar el k_I óptimo del temperamento igual en el mínimo relativo. Así pues, estos modelos explican en parte por qué el sistema pitagórico quedó obsoleto, dando paso a los otros dos nuevos sistemas, y por qué el temperamento igual desplazó al sistema mesotónico.

Esta manera de entender la armonía aporta un soporte técnico a la música, y resulta ser una herramienta útil tanto para desarrollar nuevos sistemas de afinación como para estudiar otros tipos diferentes a los aquí estudiados. La estructura de grupo no solo está presente a nivel de relaciones entre notas, sino que también podemos encontrarla entre acordes, e incluso en progresiones [6]. Esto se debe a que la música posee simetrías a distintos niveles de abstracción. Modelos como los utilizados en este documento pueden extrapolarse a otros planos de la armonía. En concreto, este trabajo podría extenderse estudiando simultáneamente las espirales y los parámetros cuantitativos d y R de más de un centro tonal o frecuencia de partida. Esto aportaría una comprensión más profunda de las relaciones entre tonalidades.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se ha realizado gracias a la Facultad de Física de la Universidad Complutense de Madrid, desde la cual se aprobó la propuesta de tema para poder defenderlo como Trabajo de Fin de Grado.

REFERENCIAS

[1] Barbour, J.M. *Tuning and temperament: A historical survey*. Courier Corporation, 2004.

[2] Haluska, J. Equal Temperament and Pythagorean Tuning: a geometrical interpretation in the plane. *Fuzzy sets and systems*, 114 (2000) 261–2691998, pages 1-5.

[3] Zhang, A. The Framework of Music Theory as Represented with Groups. 2009, pages 1-10.

[4] Burnside, W. *Theory of groups of finite order*. The University Press, 1911.

[5] Haluska, J. *The mathematical theory of tone systems*, CRC Press, Orlando (EEUU), second edition, 2004, pages 4-6.

[6] Townsend, A. *Mathematics and music theory*. University College London (www. ucl. sneffel. com), 2011.