

MODELADO DE LOS ERRORES DE DISCRETIZACIÓN EN LA MEDIDA DEL AMORTIGUAMIENTO MEDIANTE PROPIEDADES ESTADÍSTICAS LOCALES

PACS: 43.20.Ye ; 43.40.At ; 43.40.Yq

David K. Anthony

CAEND – UPM / CSIC (*antiguamente: Instituto de Acústica, CSIC*)

C/ Serrano 144

28006 Madrid, Spain.

Tel: +34 91 561 8806

E-mail: iaca344@ia.cetef.csic.es

Resumen

El valor del amortiguamiento de un sistema SDOF se puede obtener exactamente mediante la medida de tres frecuencias de la parte real de la receptancia. Debido a la discretización del eje de frecuencia, cada frecuencia evaluada puede sufrir errores. La especificación de los errores de cada una de ellas no es problemático, pero si lo es la especificación del amortiguamiento. Previamente se ha mostrado como especificar los errores por intervalos de confianza, suponiendo independencia entre cada error. Aquí se explica por qué hay que tratar los errores de forma estadística, y además se muestra la validez de la suposición de independencia de los errores en cada frecuencia.

Palabras-clave: ensayos de vibraciones, análisis modal, amortiguamiento, errores de medición

Abstract

The value of damping of a SDOF system can be obtained by evaluating three frequencies using the real part of the receptance. Due to the quantization of the frequency axis, each evaluated frequency can suffer errors. The error specification for each individual frequency is straightforward; however the error specification for the damping value is complex. Using the assumption that the errors are independent, a specification in terms of confidence intervals has previously been shown. Here, it is explained why the errors should be represented on a statistical basis, and the validity of the error independence assumption is also shown.

Keywords: vibration testing, modal analysis, damping, measurement errors

1. Introducción

Cuando en la práctica se evalúa el amortiguamiento de un sistema SDOF a través de la evaluación de tres frecuencias, la evaluación de cada una de ellas presenta errores debido a la discretización del eje de frecuencia. Su efecto a cada frecuencia es fácil de analizar, sin embargo, su efecto en la evaluación del amortiguamiento es más complejo. Recientemente, el autor ha presentado cómo expresar los errores en términos de intervalos de confianza usando un modelo que asume que los errores de cada una de las tres frecuencias son independientes [1]. Aquí, se explica i) porque hay que representar los errores de forma estadística, y ii) se muestra la validez de la suposición de independencia.

En este trabajo las frecuencias se expresan en forma circular o angular según convenga y se sobrentiende que el mismo subíndice representa la misma frecuencia.

2. Determinando el amortiguamiento de la parte real de la receptancia

El uso de la parte real de la receptancia es ventajoso ya que permite determinar la frecuencia natural del sistema directamente y con exactitud, independiente de si el parámetro de la respuesta del sistema está basado en el desplazamiento, la velocidad o la acelerancia [2]. Además se puede determinar el amortiguamiento de la receptancia independientemente del tipo del amortiguamiento [2]. Aunque, aquí se trata el caso del amortiguamiento viscoso, los resultados obtenidos se pueden aplicar igualmente a sistemas con amortiguamiento del tipo histerético. La receptancia de un sistema SDOF con amortiguamiento viscoso y con frecuencia natural ω_n es:

$$G_x(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta\omega_n\omega} \quad (1)$$

donde m es la masa rígida y ζ el factor de amortiguamiento viscoso. Si se determina el amortiguamiento a partir de la parte real de la receptancia, y usando un eje de frecuencia normalizado con ω_n , el espectro es:

$$\text{Re}\left\{G_x\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\} = \frac{1}{m} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (2)$$

Normalizar el eje de frecuencia de esta manera, permite que los resultados sean independientes de un valor de f_n específico. Una respuesta típica se muestra en la Figura 1 para una sistema con: $m = 1$, $\zeta = 0.01$ y $f_n = 50.3$ Hz. El amortiguamiento se puede medir evaluando la frecuencia del máximo y del mínimo, f_a y f_b (también se muestran en la Figura 1). Usando versiones de las tres frecuencias normalizadas ($\beta = f_b / f_n$, $\alpha = f_a / f_n$), ζ_{Re} se calcula como:

$$\zeta_{Re}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{4} \quad (3)$$

A partir de ahora por simplificar la notación, ζ_{Re} se denotará simplemente como ζ . Se comprueba por diferenciación de (2), que las frecuencias f_a y f_b son:

$$f_a = f_n \sqrt{1 - 2\zeta} \quad , \quad f_b = f_n \sqrt{1 + 2\zeta} \quad (4a,b)$$

De esta manera, se puede definir la respuesta en receptancia de un sistema utilizando sólo dos de las variables en (4), salvo el factor $1/m$. En este artículo se definirá un sistema en términos de ζ y f_n , aunque cuando se usa un eje de frecuencia normalizado el sistema está definido solamente por ζ .

En la práctica las medidas de un sistema se realizan usando un eje de frecuencia discretizado, con un espaciado entre valores Δf , como también se muestra en la Figura 1 donde $\Delta f = 1/3$ Hz. Esto conduce a errores en la evaluación de cada frecuencia, donde se evalúa cada una de ellas como el valor discretizado más cercano. Por eso, la evaluación del amortiguamiento también sufre errores. Ahora se estudian estos errores.

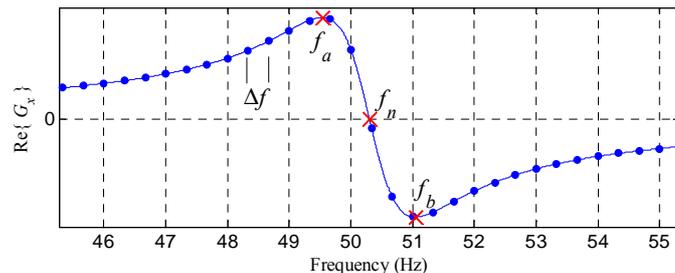


Figura 1. Respuesta de $\text{Re}\{G_x\}$ con la frecuencia para el sistema descrito en el texto. Se muestran f_a , f_b y f_n (×) y los valores discretos del eje de frecuencia discretizado (●).

3. Modelado de la discretización en frecuencia y los errores exactos

Cuando se evalúa una cierta frecuencia, $f_{\langle \bullet \rangle}$, bajo discretización, el valor evaluado es $\tilde{f}_{\langle \bullet \rangle}$. El error sufrido es e donde Δf es el intervalo en frecuencia de la discretización. Usando variables normalizadas, el error al usar $\tilde{f}_{\langle \bullet \rangle}$ en vez de $f_{\langle \bullet \rangle}$ es:

$$e\left(\frac{\tilde{f}_{\langle \bullet \rangle}}{f_n}, \frac{\Delta f}{f_n}\right) = \frac{\tilde{f}_{\langle \bullet \rangle}}{f_n} - \frac{f_{\langle \bullet \rangle}}{f_n}, \quad (5)$$

por lo tanto la frecuencia discretizada se puede escribir como:

$$\frac{\tilde{f}_{\langle \bullet \rangle}}{f_n} = \frac{f_{\langle \bullet \rangle}}{f_n} + e\left(\frac{\tilde{f}_{\langle \bullet \rangle}}{f_n}, \frac{\Delta f}{f_n}\right). \quad (6)$$

Asumiendo una discretización que no da ningún error a frecuencia cero, el error se puede expresar como:

$$e\left(\frac{\tilde{f}_{\langle \bullet \rangle}}{f_n}, \frac{\Delta f}{f_n}\right) = -\text{rem}\left(\frac{f_{\langle \bullet \rangle}}{f_n} + \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f_n}, \frac{\Delta f}{f_n}\right) + \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f_n}. \quad (7)$$

La función $\text{rem}(a,b)$ da el resto positivo de $a \pmod{b}$. e es una función de f y $\Delta f/f_n$, y presenta una dependencia con la frecuencia del tipo onda "diente de sierra" (en inglés - "sawtooth") con rango $\{-0.5, 0.5\} \times \Delta f/f_n$ y periodo $\Delta f/f_n$. Esto se muestra en la Figura 2 para un caso específico.

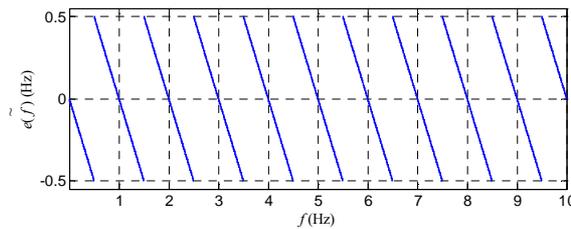


Figura 2. Función de error debido a la discretización $e(f)$ con $\Delta f = 1\text{Hz}$.

El valor discretizado de ζ se denota como $\tilde{\zeta}$, y se puede escribir el error como

$$e\left(\frac{\tilde{\zeta}}{f_n}, \frac{\Delta f}{f_n}\right) = \frac{\tilde{\beta}^2 - \tilde{\alpha}^2}{4 \times \tilde{I}} - \zeta, \quad (8)$$

(de aquí en adelante se asumirá el argumento $\Delta f/f_n$). El símbolo \tilde{I} representa el valor de la frecuencia natural *evaluada* y normalizada con su valor verdadero (\tilde{f}_n/f_n), estando su valor entre los límites: $1 \pm 0.5 \Delta f/f_n$. En la Figura 3 se muestran los errores $e(\tilde{f}_a)$ y $e(\tilde{f}_b)$ en función de ζ . Se ve que para valores de ζ próximos o iguales a cero los gradientes de las funciones son de igual magnitud y signo opuesto, pero según aumenta ζ el gradiente de $e(\tilde{f}_a)$ aumenta fuertemente mientras que el de $e(\tilde{f}_b)$ disminuye ligeramente.

En la Figura 3 también se muestra $e(\tilde{\zeta})$ en función de ζ para $\Delta f/f_n = 1/50$. Aquí, por simplicidad, solo se consideran errores de $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\alpha}$, coincidiendo por lo tanto el valor verdadero de f_n con el de una frecuencia discretizada ($f_n = \tilde{f}_n$). Se ve que la función no es sencilla, pudiéndose describir en tres niveles. Primero, la función esta compuesta de ciclos cuya forma aproximada es del tipo diente de sierra, aunque dichos ciclos no son iguales. Segundo, este patrón de ciclos se repite de una manera periódica. Tercero, sobre el rango de ζ , la forma de los ciclos y su periodicidad cambia gradualmente. Aquí la resolución usada no es fina, usándose para dar claridad al gráfico. Para resoluciones más finas el periodo de los ciclos se disminuye.

De lo anterior se deduce que se puede calcular el error para valores específicos de ζ y $\Delta f / f_n$. Sin embargo, es obvio que la forma de la función de error es muy sensible a cambios en ζ o $\Delta f / f_n$. Si se comete un pequeño error en especificar uno de los parámetros el error predicho no será válido, ya que puede ser bastante distinto (especialmente cerca de una discontinuidad). Además, esta manera de calcular errores no permite calcular un error usando valores de estos parámetros estimados o aproximados, lo cual puede ser necesario hacer para especificar el valor de Δf necesario para conseguir un cierto error, o predecir valores de error aproximados usando valores de ζ especulativos. Estas desventajas conducen a expresar los errores en otra manera.

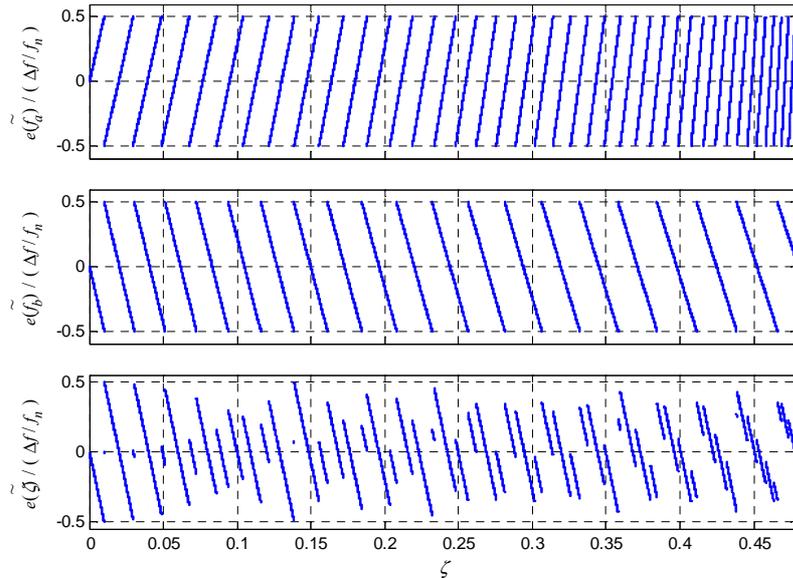


Figura 3. Funciones de error a) $e(\tilde{f}_a)$ y $e(\tilde{f}_b)$, y el error en la evaluación de $e(\tilde{\zeta})$ para $e(\tilde{f}_n) = 0$, todos en función de ζ para un sistema de medida con $f_n = 50.3$ Hz y $\Delta f = 1/3$.

4. Uso de propiedades estadísticas locales de error

Para una sola frecuencia, si se conoce la alineación exacta con el eje de frecuencia discretizado, se puede calcular el error de forma exacta. Pero, si se especifica erróneamente dicho error no será válido y puede ser muy distinto. Por eso, se puede representar los errores a través de variables aleatorias y sus funciones de probabilidad. Estudiando el error $e\left(\frac{\tilde{f}_{\langle \bullet \rangle}}{f_n}, \frac{\Delta f}{f_n}\right)$ en la Figura 2, se ve que sobre cualquier intervalo de Δf , un cierto valor tiene la misma posibilidad de cualquier valor en su rango. Entonces se asigna una distribución uniforme por lo que la frecuencia evaluada se puede expresar como

$$\frac{\tilde{f}_{\langle \bullet \rangle}}{f_n} = \frac{f_{\langle \bullet \rangle}}{f_n} + \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f_n} U_{\langle \bullet \rangle}, \quad (9)$$

donde $U_{\langle \bullet \rangle}$ es una variable aleatoria con distribución uniforme y con rango $\{-1,1\}$. Se desea estudiar el error cometido al amortiguamiento, que es una función de tres frecuencias. Para emplear este modelo de incertidumbre de una frecuencia para cada una de las tres frecuencias, hay que mostrar que los errores tienen las mismas distribuciones e son independientes.

Hay que mostrar la independencia de las tres funciones de error: $e(\tilde{f}_a)$, $e(\tilde{f}_b)$ y $e(\tilde{f}_n)$. Sin embargo, f_n es un variable independiente que define el sistema – se lo puede asignar libremente, pero se puede estudiar la independencia de $e(\tilde{f}_n)$ y los dos otros errores. Las formas de las funciones de los errores se muestran en la Figura 3 para $e(\tilde{f}_a)$ y $e(\tilde{f}_b)$, y en la

Figura 2 para $e(\tilde{f}_n)$ donde $f_n = 1\text{Hz}$. En todos los casos el error es una función lineal con discontinuidades, la cuales dependen de los valores de ζ , f_n y Δf ; es decir que es una función lineal a tramos. Como la relación es por su naturaleza lineal se puede representar su grado de relación lineal usando el coeficiente de correlación de Pearson [3].

La correlación entre los errores de frecuencias f_a y f_b , $\rho_{a,b}$, se escribe como

$$\rho_{a,b}(\zeta_{\min}, \zeta_{\max}) = \text{corr}(e(f_a), e(f_b)) \Big|_{\zeta_{\min} < \zeta < \zeta_{\max}}, \quad (10)$$

donde se evalúa la correlación sobre el rango de ζ indicado. Los errores se calculan según la expresión dada en (7). A $\rho_{a,b}(\zeta_{\min}, \zeta_{\min})$ se le asigna el valor 1. En la Figura 4 se muestra $\rho_{a,b}$ para el caso de $e(f_n) = 0$ y para distintos valores de $\Delta f/f_n$. Aquí, $\zeta_{\min} = 0.01$, pero se encuentra que el resultado general no depende de este valor. Se ve que cuánto más fina es la resolución, más rápido disminuye la relación lineal según el rango de ζ crece. Las caídas no son monótonas, y se nota que aunque la caída para $\Delta f/f_n = 1/50$ es la más suave, cuando el rango aumenta $\rho_{a,b}$ pasa por una región de valores muy pequeños antes de subir y empezar la caída suave. Para valores de $e(f_n)$ que no son cero sino entre $\pm 0.5 \times \Delta f/f_n$, se encuentran resultados parecidos.

La correlación entre $e(\tilde{f}_a)$ y $e(\tilde{f}_n)$ o $e(\tilde{f}_b)$ y $e(\tilde{f}_n)$ trata por ajustar el valor de f_n así que realiza todo el rango de error posible que se puede definir como:

$$\tilde{f}_n = (1 + \varepsilon) \quad , \quad -\frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f_n} < \varepsilon < \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f_n}. \quad (11)$$

Además, se define

$$\mu = \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad (12)$$

así que se puede definir el error como función con un argumento adicional, ε , usando μ como

$$e\left(\frac{\tilde{f}_{<>}}{f_n}, \frac{\Delta f}{f_n}, \varepsilon\right) = -\text{rem}\left(\frac{\tilde{f}_{<>}}{f_n} + \frac{1}{2} \mu(\varepsilon) \frac{\Delta f}{f_n}, \mu(\varepsilon) \frac{\Delta f}{f_n}\right) + \frac{1}{2} \mu(\varepsilon) \frac{\Delta f}{f_n}, \quad (13)$$

En (13) el valor de f_n se alinea exactamente con una frecuencia discretizada, o con otros términos $f_n = \tilde{f}_n$. Para mostrar la independencia de los errores con $e(\tilde{f}_n)$, hay que definir un sistema en términos de ζ y f_n , y calcular la correlación. En este caso, se calcula la correlación en una forma simétrica alrededor del f_n donde θ define el rango bipolar de ε . θ es entonces un argumento de ρ y tiene límites $\{-0.5, 0.5\} \times \Delta f/f_n$. $\rho_{a,n}$ se expresa explícitamente como:

$$\rho_{a,n}\left(\frac{\Delta f}{f_n}, \theta\right) = \text{corr}\left(e\left(\frac{\tilde{f}_a}{f_n}, \frac{\Delta f}{f_n}, \varepsilon\right), e(f_n)\right) \Big|_{-\theta < \varepsilon < \theta}, \quad (14)$$

y $\rho_{b,n}$ se define de forma equivalente por sustituir \tilde{f}_b por \tilde{f}_a . En la Figura 4 se representan gráficamente $\rho_{a,n}$ y $\rho_{b,n}$ por separado para sistemas con distintos valores de ζ . Primero, para $\Delta f/f_n = 1/50$, se ve que, en general, el rango de ε donde hay buena correlación disminuye según el valor de ζ aumenta, aunque la relación es más compleja. Para $\theta = 0.25$ es mayor que para un valor de 0.2. Para valores de ζ muy altos el rango es sólo un décimo del rango posible de ε . Para un sistema con valores de $\Delta f/f_n$ más altos (resolución poca fina) se ve que hay una buena correlación para todo el rango posible de ε , aunque disminuye un poco según ζ aumenta (hasta $|\varepsilon| < 0.3$ para $\zeta = 0.35$). Los casos mostrados son típicos, y se muestra que en general sólo se puede considerar los errores independientes con valores de θ no pequeños y para valores de Δf altos (resolución poca fina) y valores de ζ altos. Se mostrará en la siguiente sección que el error $e(\tilde{f}_n)$ sólo es significativo bajo esta condición.

5. El modelo de los errores para el amortiguamiento

Asumiendo que es válido modelar los errores de tres frecuencias como variables aleatorias e independientes de la forma $U_{<>}$, ya descrita, se puede representar el valor de amortiguamiento evaluado como una variable aleatoria, γ , donde

$$\gamma = \frac{\left(\beta + \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f_n} U_b\right)^2 - \left(\alpha + \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f_n} U_a\right)^2}{4\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f_n} U_n\right)^2}. \quad (15)$$

Aquí se calcula γ usando 1×10^6 muestras. Eliminando términos de superiores de segundo orden, se puede simplificar (15) hasta

$$\gamma \approx \zeta \left(1 - \frac{\Delta f}{f_n} U_n\right) + \frac{1}{4} \frac{\Delta f}{f_n} (\beta U_b - \alpha U_a) \left(1 - \frac{\Delta f}{f_n} U_n\right). \quad (16)$$

De esta ecuación se pueden extraer dos conclusiones importantes. Primero, que la variable U_n no influye cuando $\Delta f/f_n \ll 1$ ni para valores de ζ pequeños. Por esta razón la falta de independencia entre $e(\tilde{f}_a)$ y $e(\tilde{f}_n)$ o $e(\tilde{f}_b)$ y $e(\tilde{f}_n)$ en tales condiciones, como se describió en la sección anterior, no presente ningún problema para la suposición de independencia. Segundo, se ve que γ se compone mayoritariamente de dos o tres de las variables independientes dependiendo de ζ (de la cual también dependen α y β). Esto significa que la forma de la función de densidad de probabilidad (pdf – en inglés) de γ depende de ζ . Para valores próximos a cero es de forma triangular, según aumenta ζ pasa a ser de forma de campana, y luego está truncada en amplitud por la desigualdad entre α y β . También el rango de la pdf es proporcional al $\Delta f/f_n$. En la referencia [4] se muestran gráficamente la evolución de la pdf como función de ζ para dos valores de $\Delta f/f_n$. Como, al igual que entonces, no hay forma específica de calcular la pdf experimentalmente, y no es práctico calcularla teóricamente, ésta se evalúa la pdf de forma numérica [1].

Ahora se valida el modelo por comparación de las pdfs de errores usando casos específicos. Como se ve en la Figura 3, la forma de la función $e(\tilde{\zeta})$ es de forma pseudo-periódica, y conviene que se pueda estimar el pseudo-periodo de $e(\tilde{\zeta})$. Se puede mostrar que $e(\tilde{\zeta})$ se compone de la suma ponderada de $e(\tilde{f}_a)$ y $e(\tilde{f}_b)$, para un cierto valor de f_n :

$$e(\tilde{\zeta}) = \frac{1}{2} \left[\beta e\left(\frac{\tilde{f}_b}{f_n}\right) - \alpha e\left(\frac{\tilde{f}_a}{f_n}\right) \right] [1 - 2e(\tilde{I})]. \quad (17)$$

Así el pseudo-periodo se estima como el periodo más largo de las dos funciones de error, que es el de $e(\tilde{f}_b)$. Se puede calcular a través de su gradiente y rango que es τ_b :

$$\tau_b = \frac{\Delta f}{f_n} \sqrt{1 + 2\zeta}. \quad (18)$$

Esto se usa como base para encontrar un rango de ζ , pero como se verá, es necesario hacer pequeño ajustes en la práctica para conseguir una buena concordancia.

En la Figura 5 se muestra en la parte a) una comparación de la pdf calculado por el modelo y también la pdf de $e(\tilde{\zeta})$ calculado sobre el rango τ_b , correspondiente a $\zeta = 0.004$. En contraste a $e(\tilde{\zeta})$ en la Figura 3, ahora $e(\tilde{\zeta})$ es de valor múltiple. Esto es porque la valor de $e(\tilde{f}_n)$ se asigna a una variable aleatoria como en (9). Se ve que coinciden exactamente las dos pdfs cuando el rango es igual a $\tau_b/2$. Un resultado parecido se encuentra si se usa un rango de dos, tres o cuatro veces este rango. Usando un rango inferior a τ_b , se ve que la pdf ya no está completamente definida; hay valores de $\tilde{\zeta}$ en medio de la distribución donde la probabilidad es cero.

En la parte b) se repite este ejercicio para $\zeta = 0.04$. Ahora se consigue una buena aproximación de la pdf con $\tau_b/2$ (aunque la pdf de $e(\tilde{\zeta})$ está desplazada ligeramente a la izquierda), pero se la puede mejorar por ajuste este rango de matiz - aquí usando un factor de 0.96. Sin embargo hay dos valores de $\tilde{\zeta}$ donde la pdf está o subestimado o bien sobrestimado. Usando un rango de $0.96 \times \tau_b$ se encuentra una buena concordancia.

Finalmente en la parte c), para $\zeta = 0.4$, un rango de $\tau_b/2$ no es suficiente, pero sí es posible una buena aproximación usando un rango de τ_b , ya que aunque existe errores de forma

ondulada, la concordancia mejora según se aumenta el rango en un múltiplo entero. Se ve que con un rango de $10 \times \tau_b$ que hay buena concordancia, incluso en las colas de la distribución.

En general, se puede ver que hay una pdf que se puede asociar a $e(\zeta)$ sobre rangos de ζ . Es necesario tener un rango suficiente para que la pdf esté completamente descrita. Se puede ver que la pdf corresponde a esta región de ζ , como se toman rangos más largos o si se desplaza el rango en ζ , que la pdf es independiente del valor exacto de ζ , depende del rango de ζ . El rango mínimo necesario se puede estimar usando τ_b , aunque para valores pequeños de ζ la mitad de esto es suficiente. De vez en cuando hay que ajustar el rango por matices, sin embargo esto no es importante. Lo que es importante es que para un valor de ζ , hay un rango local donde la pdf de $e(\zeta)$ corresponde con el modelo que está basado en errores aleatorios e independientes. Como la pdf es una función que cambia de forma con ζ , si se toma un rango muy grande se calculará la pdf promedio sobre este rango, ya que se puede perder la selectividad al calcular la formas exactas y locales a valores de ζ . El rango sobre que la pdf representa está estimado por τ_b .

Como en realidad se está determinando el error mediante la distribución del error en una región local a un valor específico de ζ , se denomina a éste *el error local estadístico*. Ya se ha explicado por qué no es práctico calcular el error de un valor específico de ζ .

6. El uso de modelo para especificar los errores en medir amortiguamiento

Los errores en la medida del amortiguamiento frente de la discretización del eje de frecuencia se puede expresar de dos maneras. Primero, se puede calcular los valores extremos (mínimos y máximos). Esto ya ha sido presentado por el autor [4], y el tratamiento con errores que dependía de independencia está pos-validado en este trabajo. Sin embargo, como se ve de la forma de la pdf de ζ (en la Figura 5), no es muy probable que se encuentran errores tan grandes. Por eso, el autor también ha estudiado recientemente los errores en términos de límites de confianza, por ejemplo usando un intervalo de confianza de 75% [1]. Por un lado, esto permite expresar los límites de dicho intervalo de confianza dado el valor verdadero de ζ y $\Delta f / f_n \cdot \Delta f$ es una especificación del sistema de medición y f_n se puede evaluar fácilmente. Esto tiene utilidad en especificar el valor de Δf necesario para conseguir un cierto error máximo. Por otro lado, y quizás con una mayor utilidad práctica, aquel estudio permite la evaluación de los límites del intervalo de confianza del valor verdadero del sistema medida dado el valor evaluado (ζ que puede sufrir posible errores por discretización) y $\Delta f / f_n$. Por razones de espacio, no se puede resumir más de esta técnica aquí. Más detalles se encuentran en las referencias [1,4].

Agradecimientos

El autor realizó este trabajo durante un Permiso de Estancia en el IA-CSIC. Se agradece la ayuda de Jesús Juan del Laboratorio de Estadística (UPM) durante el desarrollo de este trabajo, y a Paco Simón y Carlos Sierra del IA-CSIC por su ayuda en la preparación del manuscrito. También se presenta este trabajo a TecniAcústica 2010 con el apoyo del proyecto del MICINN (BIA2009-11753).

Referencias

- [1] Anthony DK. Quantifying quantisation errors for damping measurements using confidence intervals. Internoise 2010, Lisboa, Portugal. 14-16 Junio 2010. Paper 570
- [2] Anthony DK, Simón F, Juan J. Determining material damping type by comparing modal frequency estimators. J. Acoust. Soc. Am. 126(3) EL86-EL92, 2009.
- [3] Navidi W. Estadística para ingenieros y científicos. (Traducido por A. E. Garcia Hernández) McGraw-Hill, México. 2006.
- [4] Anthony DK. Los errores de discretización en la medida del amortiguamiento mediante un método exacto para un sistema con amortiguamiento viscoso o histerético no ligero. TecniAcústica 2009, Cádiz, España. 23-25 Septiembre 2009.

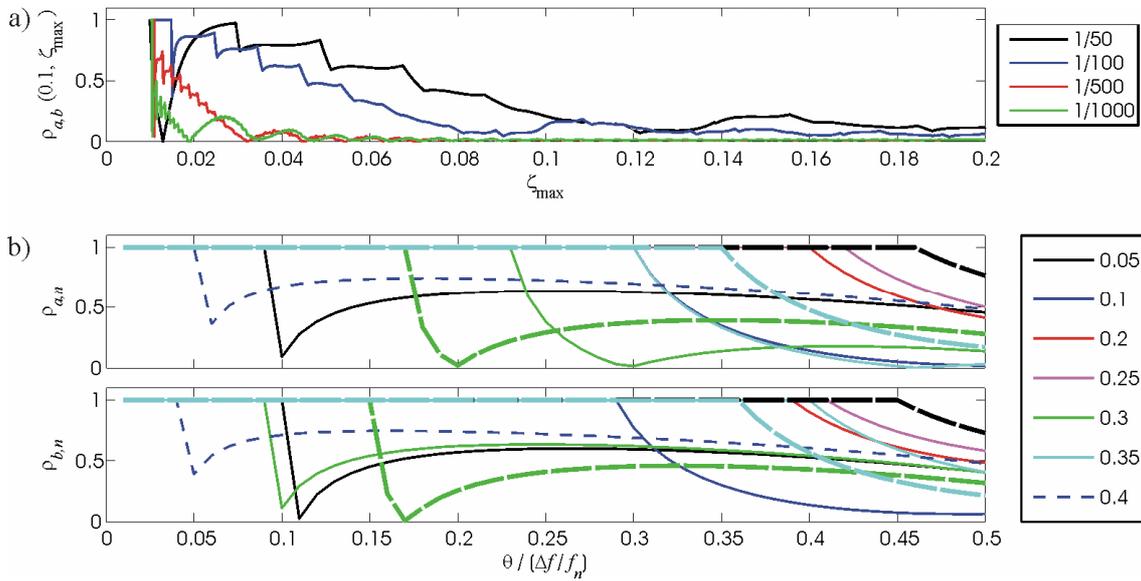


Figura 4. a) Función de correlación de $\rho_{a,b}$ en función de ζ_{\max} con valores de $\Delta f/f_n$ como indicados en el leyendo. b) Funciones $\rho_{a,n}$ y $\rho_{b,n}$ en función de θ normalizado con valores de ζ como indicados en el leyendo. Clave: línea delgada - $\Delta f/f_n = 1/50$; línea gruesa - $\Delta f/f_n = 1/500$.

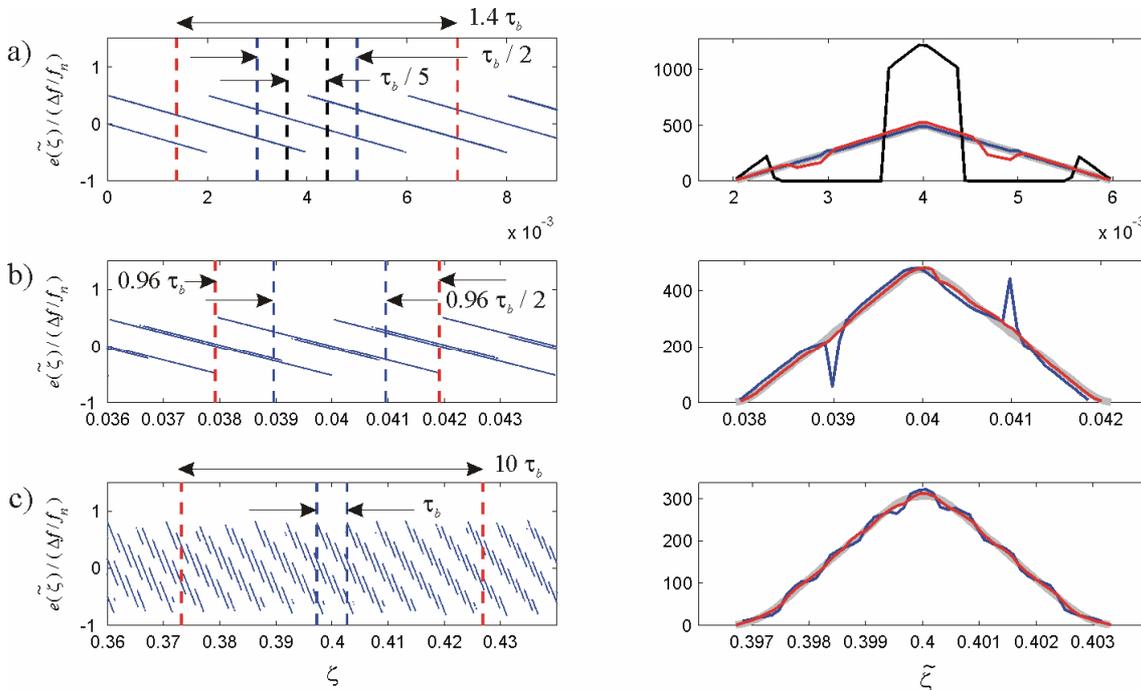


Figura 5. Histogramas de $e(\tilde{\zeta})$, para tres valores de ζ , correspondiente a rangos de ζ (que se indica por el mismo color que denota los límites que el histograma). La pdf calculado por el modelo, la variable \mathcal{Z} , se muestra por comparación (—).