

## ESTUDIO VIBROACÚSTICO DE UNA ESTRUCTURA CILÍNDRICA ENTRE DOS FLUIDOS

PACS: 43.40.Rj

Segovia-Eulogio, E.G.<sup>1</sup>; Rodrigo-Saura, F. Javier<sup>2</sup>; Carbajo-San-Martín, Jesús<sup>1</sup>; Poveda-Martínez, Pedro<sup>3</sup>; Ramis-Soriano, Jaime<sup>3</sup>.

<sup>1</sup>DIC. Universidad de Alicante. Carretera San Vicente del Raspeig, s/n, 03080, San Vicente del Raspeig, España {enrique.gonzalo@ua.es}

<sup>2</sup>Sociedad Anónima de Electrónica Submarina. Crta. Algameca, s/n, 30205, Cartagena, Murcia, España {f.rodrido@electronica-submarina.com}

<sup>3</sup>DFISTS Universidad de Alicante. Carretera San Vicente del Raspeig, s/n, 03080, San Vicente del Raspeig, España {jesus.carbajo,pedro.poveda@ua.es; jramis@ua.es; juagonru@ua.es}

**Palabras Clave:** Acústica estructural, vibraciones, atenuación

### ABSTRACT

In this work, a study to compare the level of vibration on the inner and the outer part of a cylinder with two different fluids is carried out. The problem is addressed by solving the equations using cylindrical coordinates. There is only spatial dependence of the coordinate  $r$  and there is only the radial component of displacement, velocity and acceleration.

### RESUMEN

En este trabajo se lleva a cabo un estudio para comparar el nivel de vibración en la parte interior y en la parte exterior de un cilindro teniendo dos con fluidos distintos. El problema se aborda resolviendo las ecuaciones empleando coordenadas cilíndricas. Sólo hay dependencia espacial de la coordenada  $r$  y sólo existe la componente radial de desplazamiento, velocidad y aceleración.

### 1. INTRODUCCIÓN

Una de las técnicas para el control del ruido emitido por buques se lleva a cabo mediante la medida de vibración del casco que debe hacerse en la parte interior y, normalmente, mediante acelerómetros. En este trabajo se presenta un modelo analítico para el estudio de la vibración de una estructura cilíndrica entre dos fluidos. Se trata de comprobar hasta qué punto la vibración (aceleración) en la cara interior es igual a la del exterior.

Para acercarnos al problema real, se considera la geometría de la figura 1, la cual resulta abordable analíticamente.

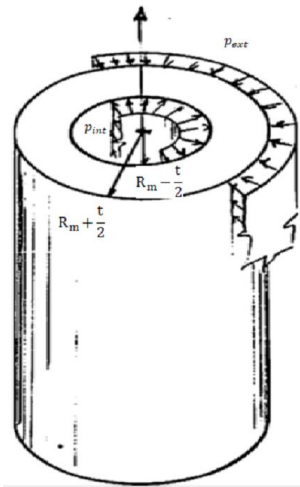


Figura 1. Geometría del problema considerado.

| Variable o parámetro independiente dimensional | Descripción   | Variable o parámetro independiente adimensional     |
|--|---|---|
| $R_m$  | Radio medio de la pared cilíndrica  | Empleada en variables adimensionales                |
| $c_2$  | Velocidad del sonido en el fluido exterior  | Empleada en variables adimensionales                |
| $\rho_2$                                       | Densidad del fluido exterior  | Empleada en variables adimensionales                |
| $t$  | Espesor de la pared cilíndrica  | $\epsilon_t = t/R_m$                                |
| $\rho$   | Densidad del material de la pared cilíndrica  | $\epsilon_\rho = \rho/\rho_2$                       |
| $c_L = \sqrt{\frac{M}{\rho}}$                  | Velocidad de las ondas longitudinales en el material de la pared cilíndrica ( $M$ es el módulo de onda P del material de la pared cilíndrica)                 | $\epsilon_{c_L} = c_L/c_2$                          |
| $c_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$                  | Velocidad de las ondas transversales en el material de la pared cilíndrica ( $G$ es el módulo de elasticidad transversal del material de la pared cilíndrica) | $\epsilon_{c_S} = c_S/c_2$                          |
| $r$  | Coordenada cilíndrica radial  | $\epsilon_r = r/R_m$                                |
| $\omega = 2\pi f$                              | Frecuencia circular (rad/s)   | $\epsilon_\omega = \frac{\omega R_m}{c_2}$          |
| $c_1$  | Velocidad del sonido en el fluido interior  | $\epsilon_{c_1} = c_1/c_2$                          |
| $\rho_1$                                       | Densidad del fluido interior  | $\epsilon_{\rho_1} = \rho_1/\rho_2$                 |
| $p_{int}$                                      | Presión (uniforme) sobre superficie interna de la pared cilíndrica $p_{int}e^{j\omega t}$   | $\epsilon_{p_{int}} = \frac{p_{int}}{\rho_2 c_2^2}$ |
| $p_{ext}$                                      | Presión (uniforme) sobre superficie externa de la pared cilíndrica $p_{ext}e^{j\omega t}$   | $\epsilon_{p_{ext}} = \frac{p_{ext}}{\rho_2 c_2^2}$ |

Tabla 1: Variables y parámetros independientes

Se van a resolver las ecuaciones empleando las variables descritas en las tablas 1, 2 y 3, mediante coordenadas cilíndricas por tratarse de un problema de deformación plana axisimétrico (sólo hay dependencia espacial de la coordenada  $r$  y sólo existe la componente radial de desplazamiento, velocidad y aceleración).

| Variable o parámetro dependiente dimensional | Descripción  | Variable o parámetro dependiente adimensional   |
|--|--|---|
| $p$  | Presión en los fluidos $p(r, t) = p(r)e^{j\omega t}$   | $\epsilon_p = \frac{p}{\rho_2 c_2^2}$   |
| $\sigma_r$                                   | Tensión radial en interior de la pared cilíndrica $\sigma_r(r)e^{j\omega t}$                                     | $\epsilon_\sigma = \frac{\sigma_r}{\rho_2 c_2^2}$   |
| $u$  | Desplazamientos en fluidos e interior de la pared cilíndrica $u(r)e^{j\omega t}$                                 | $\epsilon_u = u/R_m$  |
| $a$  | Aceleración en fluidos e interior de la pared cilíndrica $a(r, t) = a(r)e^{j\omega t}$                           | $\epsilon_a = \frac{aR_m}{c_2^2}$   |
| $M$  | Módulo de onda P del material de la pared cilíndrica $M = c_L^2 \rho$  | $\frac{M}{\rho_2 c_2^2} = \epsilon_\rho \epsilon_{c_L}^2$   |
| $G$  | Módulo elasticidad transversal del material de la pared cilíndrica $G = c_S^2 \rho$                              | $\frac{G}{\rho_2 c_2^2} = \epsilon_\rho \epsilon_{c_S}^2$   |
| $\lambda$                                    | Primer parámetro de Lamé del material de la pared cilíndrica $\lambda = M - 2G = (c_L^2 - 2c_S^2)\rho$           | $\frac{\lambda}{\rho_2 c_2^2} = \frac{M - 2G}{\rho_2 c_2^2} = \epsilon_\rho (\epsilon_{c_L}^2 - 2\epsilon_{c_S}^2)$ |
| $n_{R_m, c_2}$                               | Número de veces que la longitud de las ondas acústicas del fluido exterior están contenidas en la longitud $R_m$ | $n_{R_m, c_2} = \frac{f R_m}{c_2} = \frac{\epsilon_\omega}{2\pi}$   |
| $f$  | Frecuencia en ciclos por segundo (Hz)  | $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c_2 n_{R_m, c_2}}{R_m}$  |

Tabla 2: Variables y parámetros independientes

| Constante de las soluciones de las E.D. | Descripción  | Constante adimensional de las solución de las E.D. |
|---|--|--|
| $F_1$                                   | Primera constante de la solución de la presión en el fluido interior   | $\epsilon_1 = \frac{F_1}{\rho_2 c_2^2}$            |
| $F_2$                                   | Segunda constante de la solución de la presión en el fluido interior   | $\epsilon_2 = \frac{F_2}{\rho_2 c_2^2}$            |
| $F_3$                                   | Primera constante de la solución de la presión en el fluido exterior   | $\epsilon_3 = \frac{F_3}{\rho_2 c_2^2}$            |
| $F_4$                                   | Segunda constante de la solución de la presión en el fluido exterior   | $\epsilon_4 = \frac{F_4}{\rho_2 c_2^2}$            |
| $F_5$                                   | Primera constante de la solución de la tensión y la aceleración en la pared cilíndrica (no aparece en pared delgada) | $\epsilon_5 = \frac{F_5}{R_m}$                     |
| $F_6$                                   | Segunda constante de la solución de la tensión y la aceleración en la pared cilíndrica (no aparece en pared delgada) | $\epsilon_6 = \frac{F_6}{R_m}$                     |

Tabla 3: Constantes de las soluciones de las ecuaciones diferenciales

## 2. PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

### 2.1. Ecuación De Las Ondas Sonoras En El Fluido Interior

La ecuación de las ondas en el fluido interior puede obtenerse a partir de la ecuación 1 como:

$$\frac{\omega^2 p(r)}{c_1^2} + p''(r) + \frac{p'(r)}{r} = 0 \quad (1)$$

cuya solución en variables adimensionales, tras operar y considerar continuidad cuando  $r \rightarrow 0$ , es:

$$\begin{aligned}\epsilon_p &= \epsilon_1 \left( H_0^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) + H_0^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) \right) \\ \epsilon_a &= \frac{\epsilon_\omega \epsilon_1}{\epsilon_{\rho_1} \epsilon_{c_1}} \left( H_1^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) + H_1^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) \right)\end{aligned}\quad (2)$$

Siendo  $H_a^{(1)}(x)$  y  $H_a^{(2)}(x)$  las funciones de Hankel de primera y segunda especie (y orden a), respectivamente.

## 2.2. Ecuación De Las Ondas Sonoras En El Fluido Exterior ([1], [2] y [3]):

Para el caso del fluido exterior, la expresión de las ondas sonoras vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\omega^2 p(r)}{c_2^2} + p''(r) + \frac{p'(r)}{r} = 0 \quad (3)$$

cuya solución, en variables adimensionales, tras operar y considerar que como este dominio exterior se extiende hasta  $r \rightarrow \infty$ , las ondas no pueden llegar a reflejarse y no puede haber ondas cuya velocidad sea negativa, es:

$$\begin{aligned}\epsilon_p &= \epsilon_4 H_0^{(2)}(\epsilon_r \epsilon_\omega) \\ \epsilon_a &= \epsilon_4 \epsilon_\omega H_1^{(2)}(\epsilon_r \epsilon_\omega)\end{aligned}\quad (4)$$

## 2.3. Ecuación Fundamental de la Elasticidad o Ecuación de Navier-Lamé en la pared (Sólo En Pared Gruesa)

La siguiente expresión corresponde a la ecuación fundamental de la elasticidad:

$$Mr^2 u''(r) + Mr u'(r) + u(r) (\rho r^2 \omega^2 - M) = 0 \quad (5)$$

cuya solución, en variables adimensionales, es de la forma:

$$\begin{aligned}\epsilon_a &= -\epsilon_\omega^2 \left( \epsilon_5 H_1^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right) + \epsilon_6 H_1^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right) \right) \\ \epsilon_\sigma &= \epsilon_5 \epsilon_\rho \left( \frac{\epsilon_\omega \epsilon_{c_L} \left( H_0^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right) - H_2^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right) \right)}{2} + \frac{(\epsilon_{c_L}^2 - 2\epsilon_{c_S}^2) H_1^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right)}{\epsilon_r} \right) \\ &\quad + \epsilon_6 \epsilon_\rho \left( \frac{\epsilon_\omega \epsilon_{c_L} \left( H_0^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right) - H_2^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right) \right)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\epsilon_{c_L}^2 - 2\epsilon_{c_S}^2) H_1^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right)}{\epsilon_r} \right)\end{aligned}\quad (6)$$

#### 2.4. Determinación de las constantes para el caso de una pared gruesa.

Debido a la existencia de cuatro constantes:  $\epsilon_1, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6$ ; se necesitan cuatro ecuaciones para resolver el sistema:

- Ecuación 1 pared gruesa: es la ecuación de equilibrio en el contorno correspondiente a la superficie cilíndrica interior de la pared cilíndrica,  $r = R_m - t/2$ , (la tensión de compresión en la superficie cilíndrica interior del sólido pared cilíndrica es igual a la suma de la presión del fluido interno más la presión  $p_{int}$  uniforme ejercida).
- Ecuación 2 pared gruesa: es la ecuación de continuidad de la aceleración en  $r = R_m - t/2$ , es decir, en el contacto entre el fluido interior y la superficie cilíndrica interior de la pared cilíndrica.
- Ecuación 3 pared gruesa: corresponde a la ecuación de equilibrio en el contorno correspondiente a la superficie cilíndrica exterior de la pared cilíndrica,  $r = R_m + t/2$ , (la tensión de compresión en la superficie cilíndrica exterior del sólido pared cilíndrica es igual a la suma de la presión del fluido externo más la presión  $p_{ext}$  uniforme ejercida).
- Ecuación 4 pared gruesa: se obtiene al aplicar la continuidad de la aceleración en  $r = R_m + t/2$ , es decir, en el contacto entre el fluido exterior y la superficie cilíndrica exterior de la pared cilíndricas.

A partir del sistema lineal de cuatro ecuaciones se obtienen los valores de  $\epsilon_1, \epsilon_4, \epsilon_5$  y  $\epsilon_6$  en función de  $\epsilon_t, \epsilon_\omega, \epsilon_{c_1}, \epsilon_{\rho_1}, \epsilon_\rho, \epsilon_{c_L}$  y  $\epsilon_{c_S}$ .

Aplicando la información anterior al caso de pared gruesa, es posible obtener la solución deseada en forma adimensional tal y como se detalla a continuación.

$$- \text{ Fluido interior } \left( 0 < \epsilon_r = \frac{r}{R_m} \leq \frac{R_m - \frac{t}{2}}{R_m} = 1 - \frac{\epsilon_t}{2} \right):$$

$$\epsilon_p = \epsilon_1 \left( H_0^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) + H_0^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) \right) \quad (7)$$

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_\omega \epsilon_1}{\epsilon_{\rho_1} \epsilon_{c_1}} \left( H_1^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) + H_1^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) \right)$$

$$- \text{ Pared cilíndrica } \left( 1 - \frac{\epsilon_t}{2} \leq \epsilon_r \leq 1 + \frac{\epsilon_t}{2} \right):$$

$$\epsilon_\sigma = \epsilon_5 \epsilon_\rho \left( \frac{\epsilon_\omega \epsilon_{c_L} \left( H_0^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right) - H_2^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right) \right)}{2} + \frac{(\epsilon_{c_L}^2 - 2\epsilon_{c_S}^2) H_1^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right)}{\epsilon_r} \right) \quad (8a)$$

$$+ \epsilon_6 \epsilon_\rho \left( \frac{\epsilon_\omega \epsilon_{c_L} \left( H_0^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right) - H_2^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right) \right)}{2} \right.$$

$$\left. + \frac{(\epsilon_{c_L}^2 - 2\epsilon_{c_S}^2) H_1^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right)}{\epsilon_r} \right)$$

$$\epsilon_a = -\epsilon_\omega^2 \left( \epsilon_5 H_1^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right) + \epsilon_6 H_1^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_L}} \right) \right) \quad (8b)$$

- Fluido exterior ( $1 + \frac{\epsilon_t}{2} \leq \epsilon_r < \infty$ ):

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \epsilon_4 H_0^{(2)}(\epsilon_r \epsilon_\omega) \\ \epsilon_a &= \epsilon_4 \epsilon_\omega H_1^{(2)}(\epsilon_r \epsilon_\omega) \end{aligned} \quad (9)$$

## 2.5. Determinación de las constantes para el caso de una pared delgada.

En el caso de una pared delgada, existen dos constantes en la expresión:  $\epsilon_1, \epsilon_4$ ; por lo que serán necesarias dos ecuaciones para resolver el sistema.

- Ecuación 1 pared delgada. Se obtiene de aplicar la continuidad de la aceleración en  $r = R_m$ , es decir, en el contacto entre el fluido interior, la pared cilíndrica y el fluido exterior (la pared cilíndrica no representa ningún dominio en  $r$  al considerarla pared delgada).
- Ecuación 2 pared delgada. Ecuación de equilibrio en la lámina correspondiente a la pared delgada en  $r = R_m$  (la lámina está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas internas a la lámina, la fuerza de inercia, las fuerzas debidas a las presiones  $p_{int}$  y  $p_{ext}$  ejercidas y las fuerzas debidas a la presión de los fluidos internos y externas).

Resolviendo el sistema, se obtienen los valores de  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_4$  en función de  $\epsilon_t, \epsilon_\omega, \epsilon_{c_1}, \epsilon_{\rho_1}, \epsilon_\rho, \epsilon_{c_L}$  y  $\epsilon_{c_S}$

La solución buscada en el caso de pared delgada vendrá dada por las siguientes expresiones:

- Fluido Interior ( $0 < \epsilon_r = \frac{r}{R_m} < 1$ ):

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \epsilon_1 \left( H_0^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) + H_0^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) \right) \\ \epsilon_a &= \frac{\epsilon_\omega \epsilon_1}{\epsilon_{\rho_1} \epsilon_{c_1}} \left( H_1^{(1)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) + H_1^{(2)} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

- Pared Cilíndrica ( $\epsilon_r = 1$ ):

En este caso, la aceleración se puede calcular por el lado del fluido interior o por el lado del fluido exterior:

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_\omega \epsilon_1}{\epsilon_{\rho_1} \epsilon_{c_1}} \left( H_1^{(1)} \left( \frac{\epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) + H_1^{(2)} \left( \frac{\epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) \right) = \epsilon_4 \epsilon_\omega H_1^{(2)}(\epsilon_\omega) \quad (11)$$

En cuanto a la presión, se distingue entre la presión de la pared cilíndrica por el lado del fluido interior (12) y la presión de la pared cilíndrica por el lado del fluido exterior (13):

$$\epsilon_{p-} = \epsilon_1 \left( H_0^{(1)} \left( \frac{\epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) + H_0^{(2)} \left( \frac{\epsilon_\omega}{\epsilon_{c_1}} \right) \right) \quad (12)$$

$$\epsilon_{p+} = \epsilon_4 H_0^{(2)}(\epsilon_\omega) \quad (13)$$

- Fluido Exterior ( $1 < \epsilon_r < \infty$ ):

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \epsilon_4 H_0^{(2)}(\epsilon_r \epsilon_\omega) \\ \epsilon_a &= \epsilon_4 \epsilon_\omega H_1^{(2)}(\epsilon_r \epsilon_\omega) \end{aligned} \quad (14)$$

### 3. RESULTADOS (APLICACIÓN A UN CASO CONCRETO).

Considerando en las paredes un material con las siguientes características mecánicas:  $\rho = 1600 \frac{Kg}{m^3}$ ,  $G = 4.4 GPa$  y  $M = 13.2 Gpa$ ; el fluido interno aire con  $\rho_1 = 1 \frac{Kg}{m^3}$   $c_1 = 346 \frac{m}{s}$ ; y el fluido externo agua, de  $\rho_2 = 1000 \frac{Kg}{m^3}$   $c_2 = 1500 \frac{m}{s}$ ; una presiones interna y externa de  $p_{INT} = 1 Pa$  y  $p_{EXT} = 0$ ; se obtiene la relación entre las aceleraciones de la superficie exterior e interior para los casos de pared gruesa y pared delgada.

- Pared gruesa:

La figura 2 muestra la relación obtenida entre las aceleraciones de la superficie exterior y la superficie interior para una pared gruesa. Para entender la mejor la relación entre la frecuencia  $f$  y  $n_{R_m, c_2}$  hay que tener en cuenta la identidad  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c_2 n_{R_m, c_2}}{R_m}$ . Si consideramos el valor utilizado de  $c_2 = 1500 \frac{m}{s}$  y un valor, por ejemplo, de  $R_m = 3 m$ , se obtiene  $f = 500 n_{R_m, c_2}$  Hz. A modo de ejemplo, para  $\epsilon_t = 0.05$  y  $f = 2000 Hz$ , se estaría cometiendo un error del 25% al considerar las dos aceleraciones iguales.

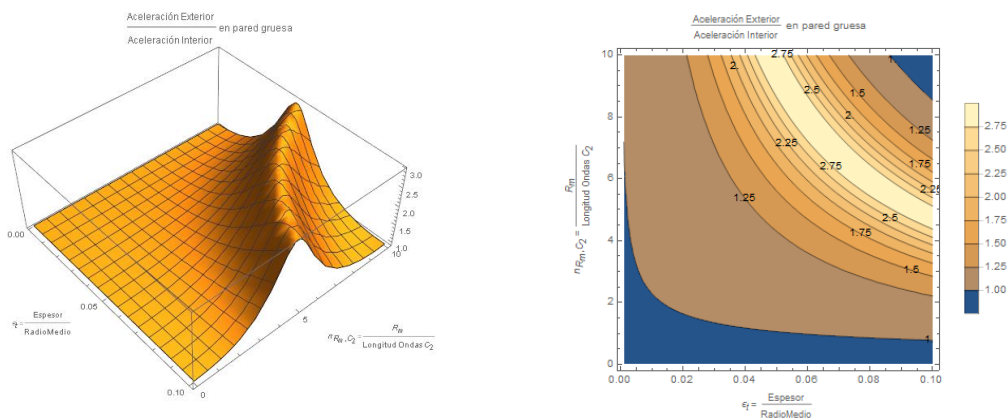


Figura 2. Relación entre las aceleraciones de la superficie exterior y la superficie Interior. Solución para pared gruesa. (Izq) 3D. (dch) Curvas de nivel.

- Pared delgada:

Con los datos empleados en el ejemplo del caso anterior ( $\epsilon_t = 0.05$  y  $f = 2000$  Hz), el error cometido al utilizar un modelo de lámina en lugar de un sólido 3D resultaría inferior al 4%.

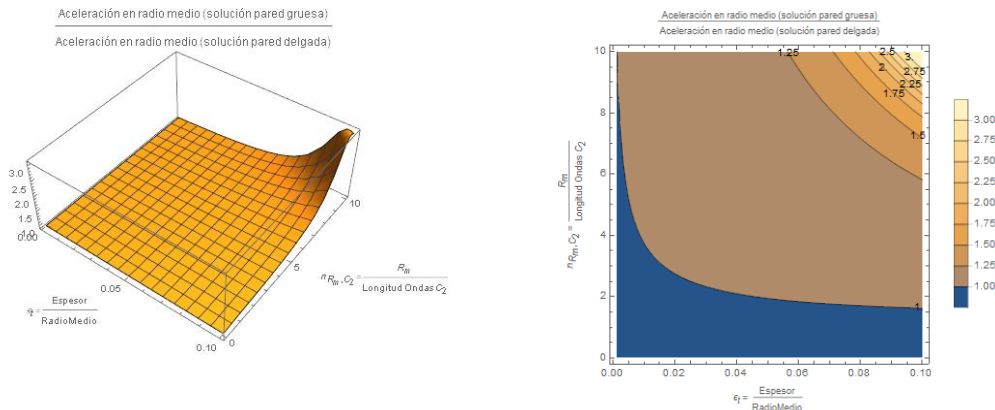


Figura 3. Relación entre las aceleraciones de la superficie exterior y la superficie Interior. Solución para pared delgada. (Izq) 3D. (dch) Curvas de nivel.

#### 4. CONCLUSIONES

Se ha llevado un estudio que permite cuantificar las diferencias de vibración (aceleración, velocidad o desplazamiento) de las partes interna y externa de un cilindro con aire en el interior y agua en el exterior. De esta forma, se tienen herramientas para ver si es posible considerar iguales las aceleraciones en las dos caras de un sólido de pequeño espesor y, en su caso, sustituir en un modelo numérico el sólido 3D por un modelo de lámina.

#### 5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Nilsson and B. Liu, *Vibro-Acoustics, Volume 1*, Second edition, Science Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015
- [2] A. Nilsson and B. Liu, *Vibro-Acoustics, Volume 2*, Second edition, Science Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016
- [3] A. Nilsson and B. Liu, *Vibro-Acoustics, Volume 3*, Second edition, Science Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016
- [4] A. C. Ugural, *Stresses in beams, plates, and Shells*, Third Edition, CRC Series in Computational Mechanics and Applied Analysis, CRC Press, Taylor and Francis Group, New York, 2009
- [5] S. Timoshenko and J.M. Goodier, *Theory of Elasticity*, Third edition, McGraw-Hill, New York, 1970