

VENTAJAS DEL USO DE LA PARTE REAL DEL ESPECTRO PARA LA MEDIDA DE LOS PARÁMETROS MODALES FRENTE A ERRORES DE FASE

PACS: 43.20.Ye ; 43.40.At ; 43.40.Yq

David K. Anthony

Instituto de Acústica (Consejo de Investigaciones Científicas)

C/ Serrano 144

28006 Madrid, Spain.

Tel: +34 91 561 8806

E-mail: iaca344@ia.cetef.csic.es

Resumen

El uso de la parte real del espectro permite la medida exacta de la frecuencia natural de un sistema utilizando cualquier parámetro de respuesta y también la medida del amortiguamiento viscoso o histerético a través de la receptancia, incluso si el amortiguamiento es no ligero. Sin embargo, este método es muy sensible a errores de fase que pueden ser producidos por los filtros (aparentemente sin consecuencia) en los canales de medición, o por errores en la alineación temporal en medidas monocanal. En este trabajo se presentan métodos para detectar y corregir estos errores de forma que se pueda aprovechar toda la potencia de este método en la medida de parámetros modales.

Palabras-clave: ensayos de vibraciones, alto amortiguamiento, análisis modal

Abstract

The use of the real part of the spectrum allows an exact measurement of the natural frequency of a system regardless of the response parameter used. Additionally, it also measures the damping for both viscous- or hysteretic-damped systems, even for non-light damping. However, this method is sensitive to phase errors that can be produced either by the use of apparently inconsequential measurement channel filtering, or by alignment errors for single channel measurements. Here, methods are presented to correct this type of error so that the full potential of this measurement technique can be realised.

Keywords: vibration testing, heavy damping, modal analysis

1. Introducción

La frecuencia natural (f_n) y el amortiguamiento (ζ) son dos parámetros del sistema que suelen requerir alguna estimación. Entre muchos métodos comunes y simples para aplicar están el Peak Picking (PP), la parte real (Re-P) o imaginaria (Im-P), y el método de Nyquist. Para medir los parámetros sin errores sistemáticos, y especialmente para sistemas no-ligeramente amortiguados, es necesario aplicar un método exacto según el tipo de amortiguamiento, y aplicado al parámetro de respuesta adecuado [1]. El método Re-P tiene la gran ventaja de que permite medir la f_n independientemente del parámetro en que está basado el espectro de la respuesta (aceleración, velocidad, desplazamiento), y además permite medir el amortiguamiento sin error sistemático para sistemas con amortiguamiento de tipo viscoso o histerético. Además, todo esto sigue siendo válido para sistemas no-ligeramente amortiguados. Sin embargo, los métodos Re-P y Im-P son sensibles a errores de fase, los cuales pueden ocurrir por la aplicación de filtros en los canales de medida. También para medidas mediante excitación impulsiva la mala alineación de la parte impulsiva en la señal de aceleración con el origen temporal causa errores equivalentes.

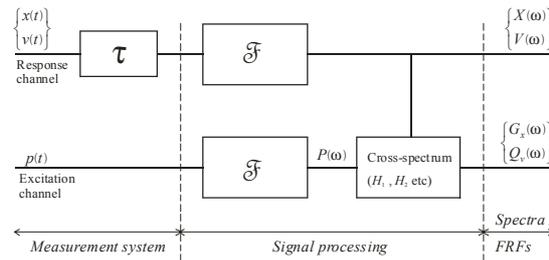


Figura 1. Sistema de medida de dos canales, con entradas temporales, fase diferencial (τ) y la conversión al dominio espectral mediante la transformada de Fourier (\mathcal{F}).

Un sistema de medición típico se muestra en la Figura 1 donde se muestran las señales temporales de las respuestas $x(t)$ y $v(t)$, y la de la respuesta $p(t)$. Los parámetros modales se pueden medir usando medidas de 1 ó 2 canales. Se suelen usar medidas de 2 canales, con excitación continua o impulsiva, normalizando la respuesta con la señal de excitación. Para excitación impulsiva, y si la señal de excitación no está disponible, se puede proceder si el ancho de banda de $p(t)$ es suficientemente amplio y si la parte impulsiva de la respuesta está alineada en tiempo correctamente.

Aquí se estudia el efecto de los errores de fase y se presentan dos técnicas para corregirlos o evitarlos. En este artículo se distingue entre los valores verdaderos de parámetros y medidas de ellos por el símbolo “^”, y también se usa la siguiente notación por ejemplo: $\hat{f}(PP\{Q_v^v\})$ representar la frecuencia medida por el método PP aplicada al espectro indicado. Finalmente, las frecuencias se expresan en forma circular o angular y se entiende que con el mismo subíndice se representa la misma frecuencia. Se usan versiones de estos espectros basados en las repuesta de velocidad y aceleración que son corregidas por fase así que mantienen las mismas características de las partes real e imaginaria de la respuesta basada en desplazamiento, G_x . Se nombran Q_v and Q_a , y son

$$Q_v(\omega) = \omega G_x(\omega) \quad , \quad Q_a(\omega) = \omega^2 G_x(\omega) . \quad (1a,b)$$

Este trabajo desarrollo algunos aspectos de un escrito publicado en Applied Acoustics [2].

2. La determinación de parámetros modales por diferentes tipos de espectro

2.1 La parte real del espectro

La parte real de la función de respuesta en términos del desplazamiento en frecuencia (FRF) de un sistema de un grado de libertad (SDOF) y con amortiguamiento viscoso, G_x^v , o con amortiguamiento del tipo histerético, G_x^h , se pueden expresar (normalizado con la fuerza):

$$\text{Re}\{G_x^v(\omega)\} = \frac{1}{m} \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \quad , \quad \text{Re}\{G_x^h(\omega)\} = \frac{1}{m} \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (\eta\omega_n^2)^2} , \quad (2a,b)$$

donde m es la masa rígida del sistema (que se considera igual a la unidad en los ejemplos siguientes). ω_n es la frecuencia natural y ζ es el factor de amortiguamiento viscoso y η es el factor de amortiguamiento estructural que se suele relacionarlo con ζ por su equivalencia a resonancia (ζ_{eq}) [3]

$$\zeta_{eq} = \eta/2 . \quad (3)$$

La respuesta espectral de G_x^v se puede encontrar en [3,4]. De (2) es claro que la frecuencia cuando $\text{Re}\{G_x(\omega)\} = 0$ es f_n . También aplicando (1), esta solución persiste para las otras

respuestas. Como la solución de $\text{Re}\{G_x(\omega)\} = 0$ no depende del denominador, tampoco es afectado por el tipo de amortiguamiento. Así, en general, $\hat{f}_n(\text{Re}\{\cdot\})$ define la f_n .

El amortiguamiento se puede medir también con el espectro real usando dos frecuencias adicionales situadas en los puntos máximo y mínimo de la respuesta G_x , f_a y f_b respectivamente. Juntos con f_n , se calcula ζ (or ζ_{eq}) como

$$\zeta = \frac{f_b^2 - f_a^2}{4f_n^2}. \quad (4)$$

Se verá que ésta mide ζ sin error sistemático, aunque se suele usar una versión aproximada, especialmente para sistema con amortiguamiento ligero [3]. f_a y f_b se identifican haciendo la derivada de (2) cero, y resolviendo las ecuaciones resultantes en ω^2 :

$$\omega^4 - 2\omega_n^2\omega^2 + \omega_n^4(1 - 4\zeta^2) = 0 \quad , \quad \omega^4 - 2\omega_n^2\omega^2 + \omega_n^4(1 - \eta^2) = 0, \quad (5a,b)$$

Aplicando la identidad (3) se puede ver por comparación de los términos constantes que las soluciones serán iguales independientemente del tipo de amortiguamiento. f_a y f_b son

$$f_a = f_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad , \quad f_b = f_n\sqrt{1 + 2\zeta^2}, \quad (6a,b)$$

y sustituyéndolas a (4) se ve que el amortiguamiento se determina exactamente hasta un valor de ζ de 0.5.

2.2 La parte imaginaria del espectro

La parte imaginaria de la respuesta en velocidad de un sistema con amortiguamiento viscoso y la parte imaginaria de la respuesta en desplazamiento con amortiguamiento histéretico son respectivamente:

$$\text{Im}\{Q_v^y(\omega)\} = \frac{-2\zeta\omega_n\omega^2}{m(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \quad , \quad \text{Im}\{G_x^h(\omega)\} = \frac{-\eta\omega_n^2}{m(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (\eta\omega_n^2)^2}. \quad (7 a,b)$$

Se comprueba que el mínimo de cada función ocurre en f_n , así ambos $\hat{f}_n(\text{Im}\{Q_v^y\})$ y $\hat{f}_n(\text{Im}\{G_x^h\})$ estiman f_n sin error sistemático. Este hecho se puede utilizar para corregir errores de fase, como se describe abajo.

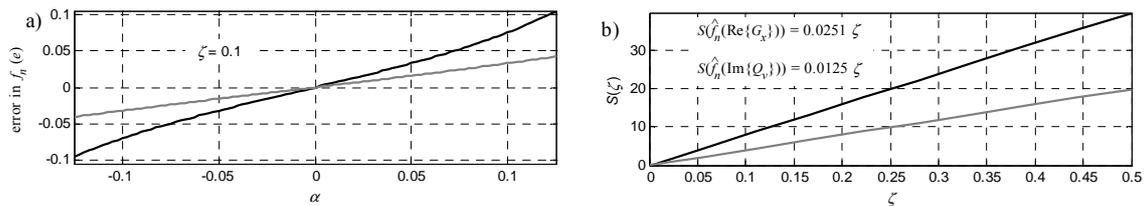


Figura 2. a) Error en la evaluación de f_n usando los métodos Re-P (—) y Im-P (---) en función de α , para un sistema con $\zeta = 0.1$. b) Sensibilidad (S) como función de ζ , para pequeño α .

3. Errores en la medida

Un filtro en un canal de medida, de tipo paso bajo y a frecuencias bajo la frecuencia de corte, tiene una característica de fase lineal con la frecuencia. Ésta es equivalente a un retraso (*group delay*) que tiene la misma consecuencia de errores en la alineación de la parte impulsiva de la repuesta, así errores procedentes de los dos fuente se puede tratar igualmente. Un retraso τ en tiempo es equivalente a multiplicar el espectro en frecuencia:

$$x(t - \tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega\tau} X(\omega). \quad (8)$$

τ se muestra en la Figura 1 y representa el retraso diferencial entre los dos canales. En la Figura 2 se muestra el error inducido en la medida de f_n por los métodos Re-P y Im-P donde el error se representa como error normalizado por el periodo natural de oscilación del sistema α

$$\alpha = \tau/T. \quad (9)$$

Alineando la respuesta temporal del la primera parte del impulso a $t=0$ de un impulso rectangular causará en error de $\varepsilon/2$, donde ε es el ancho del impulso. Se ve que Im-P es la mitad de sensible de Re-P, y para pequeños valores de α el error, e , es proporcional a α . Esto facilita el cálculo de la sensibilidad, S ,

$$S = e/\alpha, \quad (10)$$

que también se muestra en la Figura. Se observa que un valor de ε típico es 1ms, y es parecido al group delay debido a un filtro paso bajo tipo Butterworth, de orden 2 con una frecuencia de corte de 1kHz (1.5ms).

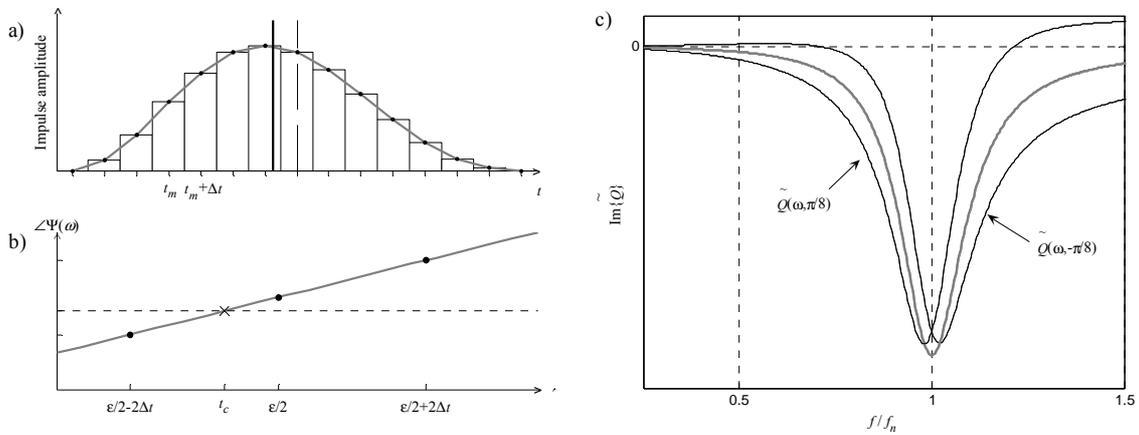


Figura 3. a) Ilustración de impulso asimétrico (—), la mitad de la anchura temporal (- - -) y el $zpsc$ (—). b) La definición de $zpsc$ por interpolación (•). c) $\text{Im}\{\tilde{Q}(\omega, \beta)\}$ para diferentes valores de β . ($\tilde{Q}(\omega, 0)$: —).

4. Reduciendo los errores de medida

Se presentan dos métodos para reducir los errores. El primero funciona mejor con medidas monocanal, y el segundo se puede usar con medidas de 1 ó 2 canales.

4.1 El centro espectral de fase cero (zero phase spectral centre, $zpsc$) de un impulso

La ubicación del $zpsc$ de un impulso no se puede definir fácilmente si el impulso no es de forma rectangular, o si no es de forma simétrica. Es necesario alinear el $zpsc$ del impulso de la respuesta en aceleración con el origen en tiempo para calcular el espectro correctamente. Supongamos que $i(t)$ representa o (i) la parte impulsiva y aislada de la repuesta de aceleración, o (ii) el impulso de la señal de fuerza (si está disponible) como se muestra en la Figura 3. El impulso se puede representar como M elementos rectangulares con anchura Δt , y a frecuencias mucho más bajas que $1/\Delta t$ la repuesta compuesta en magnitud y fase es

$$|I(\omega)| = \Delta t \sum_{\forall m} b_m, \quad \arg(I(\omega)) = -\sum_{\forall m} b_m \omega t_m. \quad (11a,b)$$

El $zpsc$ se define como el valor de t_c que hace la suma ponderada igual a cero, así

$$t_c : \sum_{\forall m} b_m \omega (t_m - t_c) = 0. \quad (12)$$

En la practica se puede estimar t_c como la mitad de la anchura del impulso \hat{t}_c , y calcular la fase, ϕ_a y ϕ_b en dos pasos de tiempo a cada lado

$$\{\phi_a, \phi_b\} = I(\omega)e^{-j\omega(t_c \mp 2\Delta t)}. \quad (13)$$

Como la fase es una función lineal de τ , el valor exacto de t_c se puede calcular por interpolación. Se observa que el cálculo de t_c no está limitado por la resolución temporal. Por eso no se traslada la señal en tiempo una cantidad t_c , sino que se corrige el espectro sin tratar \tilde{Q}_v en el dominio de tiempo:

$$e^{-j\omega t_c} \tilde{Q}_v(\omega) = Q_v(\omega) \quad \text{si} \quad \arg(e^{-j\omega t_c} \Psi(\omega)) = 0. \quad (14)$$

donde $\Psi(\omega)$ es el espectro del impulso.

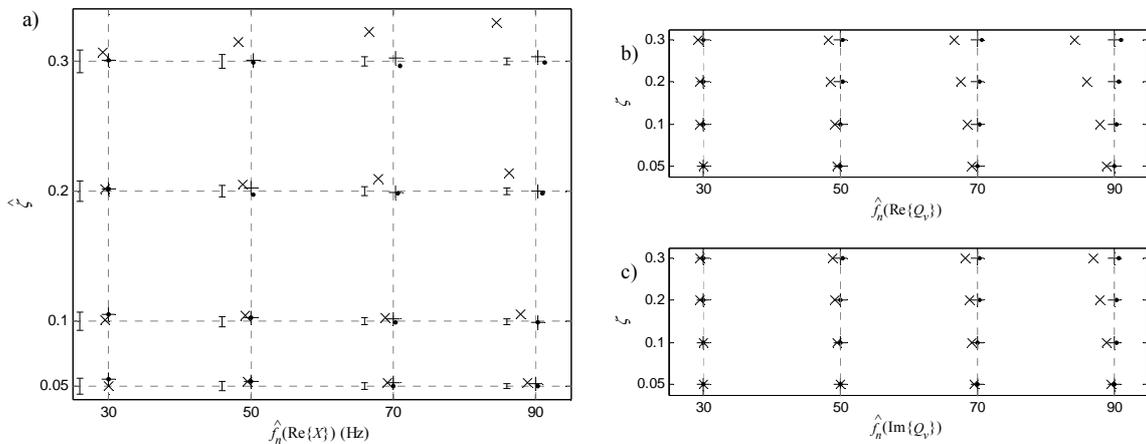


Figura 4. a) Evaluación de los parámetros con Re-P con las alineaciones: a_0 (\times), a_1 (\bullet), a_2 ($+$). a) \hat{f}_n y $\hat{\zeta}$ aplicando Re-P a X (las barras de error muestran el rango esperado de $\hat{\zeta}$ por discretización en cada caso), b) \hat{f}_n aplicando Re-P a V , c) \hat{f}_n aplicando Im-P a V .

4.2 Corrección automática usando la parte imaginaria

Una diferencia neta en retraso en cada canal de medida también resulta en una versión del espectro que tiene su característica en fase ajustada $\tilde{Q}(\omega, \beta)$ del espectro verdadero Q

$$\tilde{Q}(\omega, \beta) = e^{-j\omega\beta} Q(\omega). \quad (15)$$

donde β no se suele saber (con exactitud). Hay que encontrar la fase de corrección γ tal y como se puede corregir el espectro:

$$e^{j\omega\gamma} \tilde{Q}(\omega, \beta) = \hat{Q} \quad , \quad \gamma \rightarrow \beta \Rightarrow \hat{Q} \rightarrow Q. \quad (16a,b)$$

Primero, considerando un sistema con amortiguamiento viscoso, ya se ha mostrado que el mínimo de $\text{Im}\{Q_v\}$ ocurre a f_n . Aunque no es trivial mostrarlo matemáticamente (aunque se puede demostrar fácilmente con un modelo numérico, se dan más detalles en [2]), el valor mínimo de \tilde{Q} ocurre cuando $\beta = 0$, a cualquier otro valor cercano la frecuencia del máximo cambia de forma que el valor del pico siempre aumenta. Esto se ilustra en la Figura 3. De este modo, para encontrar γ hay que multiplicar el espectro con un vector unidad complejo con variable γ hasta que se alcanza el menor valor posible del mínimo de la parte. Aunque γ no está limitada por la resolución en frecuencia, la identidad del mínimo mismo sí está limitada por el valor discreto de la frecuencia más cercana. Para un sistema con amortiguamiento histerético, se pueden corregir errores de fase de forma parecida, pero usando $\text{Im}\{G_x^h\}$ en vez

de $\text{Im}\{Q_r\}$. Una vez encontrado el valor de γ , se puede aplicar a cualquier parámetro, no sólo a aquel en que se ha calculado. Este método de corrección se denota aquí como “Im-corr”, y los parámetros corregidos así tienen el superíndice “corr”.

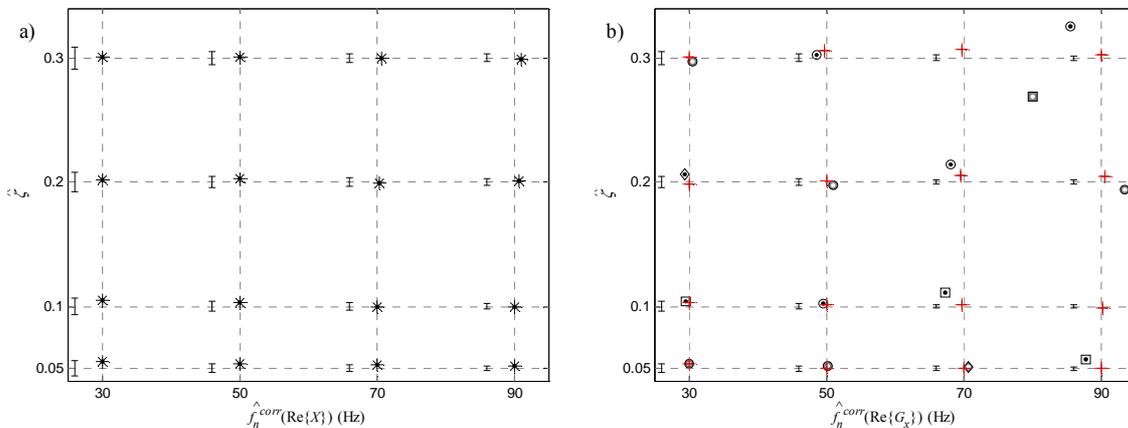


Figura 5.a) Evaluación de f_n y ζ aplicando el método Re-P a X con diferentes alineaciones temporales corregidas por Im-corr (clave como la Figura 4). b) Evaluación de f_n y ζ con excitación de barrida en frecuencia aplicando el método Re-P a G_x con un filtro paso bajo Butterworth de 1kHz aplicado a un canal. Clave: sin corrección (\bullet) con orden de filtro: 1- \circ , 2- \diamond , 4- \square símbolo en gris – filtro en la canal de excitación; en caso contrario en el canal de repuesta, y corregida por Im-corr ($+$).

5. Ilustración de corrección de alineamiento temporal correcto y Im-corr

Se usó un modelo numérico para simular las respuestas temporales de un sistema con amortiguamiento viscoso y con valores de sistema: $f_n = \{30\text{Hz}, 50\text{Hz}, 70\text{Hz}, 90\text{Hz}\}$ y $\zeta = \{0.05, 0.1, 0.2, 0.3\}$ y con un impulso rectangular de excitación de duración de 1ms. Se aplicaron tres alineamientos temporal, se alineó el origen de forma que: a_0 – con el principio del impulso; a_1 – con la mitad de la duración del impulso; a_2 – con el *zpsc*. Después, se calculo el espectro de desplazamiento (X) y velocidad (V) con $\Delta f = 1/3\text{Hz}$. En la Figura 4 se puede ver el error debido al uso de a_0 , y que la aplicación de a_1 mejora bastante, aunque existen errores en f_n y ζ . El uso de a_2 resuelve f_n exactamente en casi todos los casos. Parece que en algunos casos ζ ha empeorado, pero la corrección siempre sitúa el valor de ζ dentro del rango esperado por discretización. En la Figura 4 se observa que este resultado se repite con $\hat{f}(\text{Re}\{V\})$, y también con $\hat{f}(\text{Im}\{V\})$ donde los errores con a_0 son sólo la mitad debido a la reducción de sensibilidad tal y como se describe arriba.

En la Figura 5 se observa que el uso de Im-corr corrige bien las medidas independientemente de la alineación aplicada, aunque su exactitud está limitada con la resolución, como se ha descrito arriba. Finalmente, en la Figura 5 se ve la aplicación de un filtro a uno de los canales de medida. Se observa que el efecto de dicho filtro en las medidas, especialmente para valores de f_n y ζ altos, pero Im-corr corrige bien los errores debido al filtro.

Agradecimientos

Este trabajo se realizó durante un Permiso de Estancia en el instituto nombrado. Se agradece la ayuda de Francisco Simón del mismo instituto durante la preparación de este artículo.

Referencias

- [1] Anthony DK, Simón F, Juan J. Determining material damping type by comparing modal frequency estimators. JASA Express Letters. (Artículo aceptado 24/07/2007)
- [2] Anthony DK. Practical Improvements to real and imaginary spectral based modal parameter measurements of SDOF systems. Applied Acoustics 2009; 70(9); 1219-1225.
- [3] Ewins DJ. Modal Testing: theory, practice and application. Great Britain: Research Studies Press Ltd.; 2000
- [4] Anthony DK. Los errores de discretización en la medida del amortiguamiento mediante un método exacto para un sistema con amortiguamiento viscoso o histerético no ligero. TecniAcústica 2009, Cádiz, Spain.