

MÉTODOS EXACTOS Y ROBUSTOS PARA LA MEDIDA DE PARÁMETROS MODALES DE SISTEMAS SDOF EN UN AMPLIO RANGO DE AMORTIGUAMIENTO

PACS: 43.20.Ye ; 43.40.At ; 43.40.Yq

Francisco Simón¹
David K. Anthony²

Instituto de Acústica (Consejo de Investigaciones Científicas)
C/ Serrano 144
28006 Madrid, Spain.

Tel: +34 91 561 8806

¹ E-mail: psimon@ia.cetef.csic.es

² E-mail: iaca344@ia.cetef.csic.es

Resumen

Hay estrategias de medida que evalúan parámetros modales de sistemas SDOF sin error sistemático, e incluso para amortiguamiento viscoso o histerético. Además, un sistema de SDOF es una idealización; en la realidad suelen existir otras resonancias, o en muchos casos se aplican medidas de base SDOF a sistemas con más resonancias que están alejadas en frecuencia de la resonancia bajo estudio. Aquí, se estudian diferentes estrategias para medir parámetros modales basadas en cuatro métodos sencillos y comunes. Usando estas estrategias se puede medir o la frecuencia natural o el amortiguamiento con exactitud, y se evalúan cuales de ellas son más robustas frente a la presencia de una resonancia secundaria.

Palabras-clave: ensayo de vibraciones, alto amortiguamiento, análisis modal, robustez

Abstract

Measurement strategies exist that allow the determination of modal parameters of a SDOF system without systematic error, including for viscous or hysteretic damping. A SDOF system is an idealization; in practice usually other resonances exist, or sometimes SDOF methods are applied to a resonance that is distant in frequency from other resonances. Here, different measurement strategies, using four simple and commonly used methods, are studied. Those that measure modal parameters exactly are evaluated in the presence of a secondary resonance to determine the robustness of each strategy.

Keywords: vibration testing, heavy damping, modal analysis, robustness

1. Introducción

Para la medida de parámetros modales sin errores sistemáticos, especialmente para sistemas SDOF no ligeramente amortiguados, es necesario aplicar un método exacto a la respuesta espectral del sistema con un parámetro adecuado. Esto, además, puede depender de si el amortiguamiento es viscoso o histerético, como se ha mostrado para dos métodos en [1] y luego para cuatro en [2]. Los métodos considerados fueron aquellos que determinan los parámetros modales a partir de: la magnitud del espectro (abs), las partes real e imaginaria del espectro (Re y Im), y mediante el método de Nyquist (Nyq). El método de Nyquist mide una frecuencia que está definida por la tasa de mayor barrido alrededor de la circunferencia del círculo de Nyquist, la cual se define matemáticamente como $\max(d\theta/d\omega^2)$. Estos cuatro métodos se describen en detalle en las referencias citadas y en [3]. Uno de tales métodos aplicado a un parámetro concreto de la respuesta es lo que aquí se denomina una *estrategia de medida*.

Comparaciones entre resultados de diferentes estrategias se pueden utilizar para identificar el tipo de amortiguamiento del sistema, y así se podría escoger el valor de una medida que no tiene error sistemático [1,2].

Sin embargo, muchos sistemas SDOF no son en realidad de un grado de libertad. Esto puede ser porque un sistema SDOF es en realidad una idealización, aunque es posible diseñar sistemas que acercan a este ideal (sobretudo para el estudio de los propios sistemas SDOF), o cuando se aplican técnicas de medida a sistemas que se conoce que son de más de un grado de libertad, y se aplica la técnica a resonancias aisladas. En ambos casos será mejor usar métodos cuyos resultados no estén tan influidos por las otras resonancias.

Este artículo presenta un breve estudio orientado a distinguir entre las distintas estrategias para sistemas SDOF cuyas resultados son más robustos frente a su aplicación a sistemas no verdaderamente SDOF. No se pretende hacer un análisis exhaustivo, sino uno que al menos indicara qué técnicas pueden ser más fiables que otras.

Aquí, las frecuencias se expresan en forma circular o angular y se entiende que con el mismo subíndice se representa la misma frecuencia. También se usa una notación donde el parámetro modal (f_n o ζ) medido tiene un subíndice que indica el método con el que se obtiene. Esto está seguido por el parámetro de la respuesta al que está aplicado (X ó V), y si es necesario, seguido por el tipo de amortiguamiento del sistema (dv ó dh). Por ejemplo: $f_{Im:X:dh}$ significa la frecuencia determinada por el método Im aplicado al espectro basado en X a una sistema con amortiguamiento histerético.

2. La medida de parámetros modales para sistemas no ligeramente amortiguados

Todos los métodos mencionados arriba miden los parámetros con bastante exactitud para sistemas ligeramente amortiguados, pero cuando el valor del amortiguamiento aumenta algunos métodos subestiman o sobreestiman los parámetros, y en algunos casos los parámetros siguen siendo medidos con error sistemático. La Tabla 1 detalla el rendimiento de los métodos aplicados a X y V . Las estrategias que miden el amortiguamiento exactamente (hasta un valor de $\zeta = 0.5$) se muestran en la Tabla 2 (estos resultados de derivan de [1,2]). Aquí se estudia las estrategias adecuadas para ver su sensibilidad frente a una segunda resonancia en el sistema.

Tipo de amortiguamiento	K_v	Estrategias para medir f_n							
		$f_{abs:X}$	$f_{abs:V}$	$f_{Re:X}$	$f_{Re:V}$	$f_{Im:X}$	$f_{Im:V}$	$f_{Nvg:X}$	$f_{Nvg:V}$
<i>viscoso</i>	1	$< f_n$	$= f_n$	$= f_n$	$= f_n$	$< f_n$	$= f_n$	$< f_n$	$< f_n$
<i>histerético</i>	0	$= f_n$	$> f_n$	$= f_n$	$= f_n$	$= f_n$	$> f_n$	$> f_n$	$> f_n$

Tabla 1. Rendimiento de las estrategias de f_n considerados para amortiguamiento viscoso y histerético [1,2].

Tipo de amortiguamiento	K_v	Estrategias para medir ζ (ó ζ_{eq})							
		$\zeta_{abs:X}$	$\zeta_{abs:V}$	$\zeta_{Re:X}$	$\zeta_{Re:V}$	$\zeta_{Im:X}$	$\zeta_{Im:V}$	$\zeta_{Nvg:X}$	$\zeta_{Nvg:V}$
<i>viscoso</i>	1			•					
<i>histerético</i>	0	•		•		•			

Tabla 2. Estrategias que miden ζ sin error sistemático hasta $\zeta = 0.5$.

3. Modelo de sistema de dos grados de libertad

La función de la respuesta en frecuencia, FRF, en términos de desplazamiento normalizado con la fuerza (la receptancia) de un sistema SDOF con amortiguamiento de tipo viscoso o histerético, y con frecuencia natural ω_n , es [1,2]:

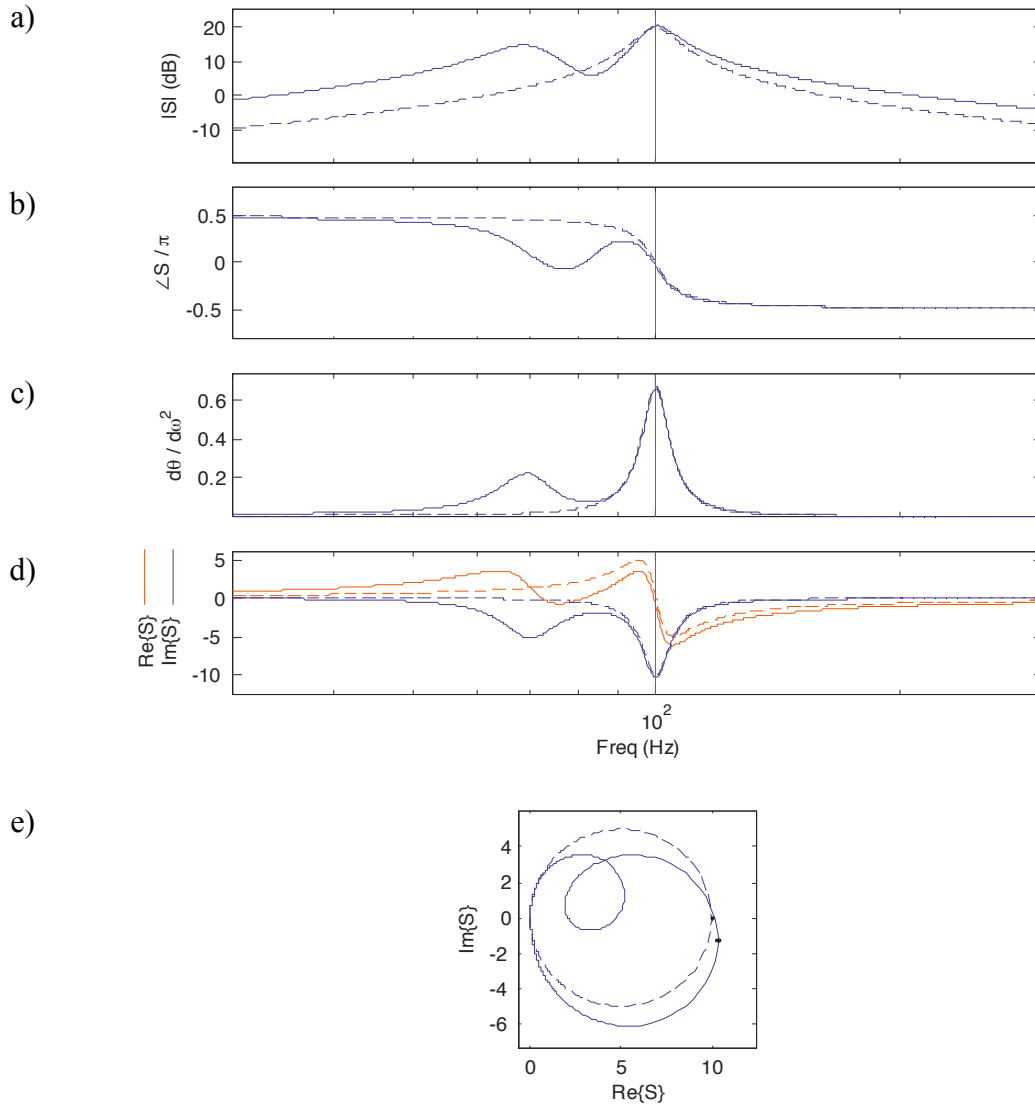


Figura 1. Espectro resultante de cada operador usado en la medida de los parámetros modales considerados aquí para Q , (línea discontinua) y para S (línea sólida). $f_{n_1} = 100$ Hz y se denota con una línea sólida vertical, o en e) por un punto.

$$G_x(\omega) = \frac{1}{m \omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta\omega_n\omega K_v + j\eta \omega_n^2 \bar{K}_v} \quad (1)$$

m es la masa rígida, ζ el factor de amortiguamiento viscoso y η el factor de amortiguamiento estructural (histerético). K_v es una variable Booleana que cuando es igual a "1" se selecciona el amortiguamiento viscoso, en caso contrario el amortiguamiento es histerético. El valor de ζ equivalente a η , ζ_{eq} , se define en la región de la resonancia [3]

$$\zeta_{eq} = \eta/2. \quad (2)$$

Aquí se procede en términos de ζ , pero para amortiguamiento histerético se puede relacionar con η mediante ζ_{eq} . Se pueden expresar la FRF también en términos de la velocidad o la aceleración por la propiedad generalizada de la transformada de Fourier. Sin embargo, aquí se usan los espectros, Q , que están basados en las repuestas de velocidad y aceleración y que

están corregidas por fase de forma que mantienen las mismas características de las partes real e imaginaria de la respuesta basada en desplazamiento, G_x . Se nombran Q_x , Q_v y Q_a , y son

$$Q_x(\omega) = G_x(\omega) \quad , \quad Q_v(\omega) = \omega G_x(\omega) \quad , \quad Q_a(\omega) = \omega^2 G_x(\omega) . \quad (3a,b,c)$$

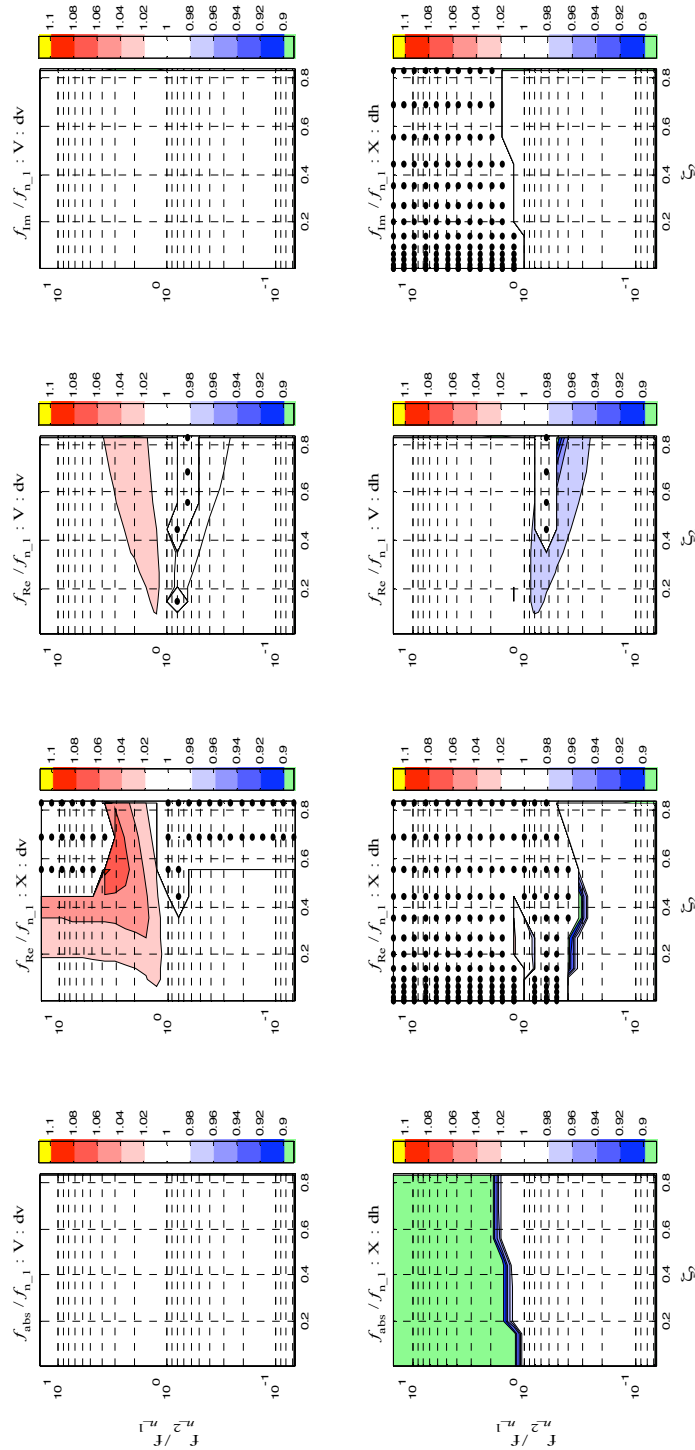


Figura 2. El cambio en la frecuencia evaluada para distintas estrategias exactas cuando $f_{n-1} = 200\text{Hz}$ y $\zeta_1 = 0.1$. Los puntos indican donde una medida válida no se pudo realizar.

Para construir un modelo de un sistema de dos grados de libertad, se suman las FRFs de dos sistemas expresadas en el mismo parámetro de respuesta, y se distingue entre los dos FRFs tanto en sus FRFs como sus parámetros modales (f_n y ζ) mediante el correspondiente subíndice. Así la FRF compuesta se define

$$S = Q_{\langle p \rangle - 1}(f_{n-1}, \zeta_1) + \beta Q_{\langle p \rangle - 2}(f_{n-2}, \zeta_2), \quad (4)$$

donde $\langle p \rangle$ es el parámetro de respuesta (x , v o a), el subíndice "1" define la repuesta principal y "2" la secundaria. La robustez se evalúa midiendo los parámetros de $Q_{\langle p \rangle - 1}$ para ver como están afectados por la presencia de $Q_{\langle p \rangle - 2}$. El parámetro β es un factor de escala que regula la magnitud de $Q_{\langle p \rangle - 2}$ frente a $Q_{\langle p \rangle - 1}$, y se define como

$$\beta = 0.5 \frac{\max(Q_{\langle p \rangle - 1})}{\max(Q_{\langle p \rangle - 2})}. \quad (5)$$

En la Figura 1 se muestran diferentes estrategias de medida consideradas aplicadas al espectro de S con $p = v$, y también al espectro principal Q_{v-1} . Aquí $f_{n-1} = 100\text{Hz}$ y $\zeta_1 = 0.05$ y $f_{n-2} = 100\text{Hz}$ y $\zeta_2 = 0.1$ y el efecto de Q_{v-2} en cada espectro se puede ver. Es obvio que cuanto más cerca está la resonancia secundaria a la principal, mayor será el efecto. Además, está claro que la robustez de $Q_{\langle p \rangle - 1}$ aumenta con la disminución de ζ_1 frente a la misma respuesta secundaria.

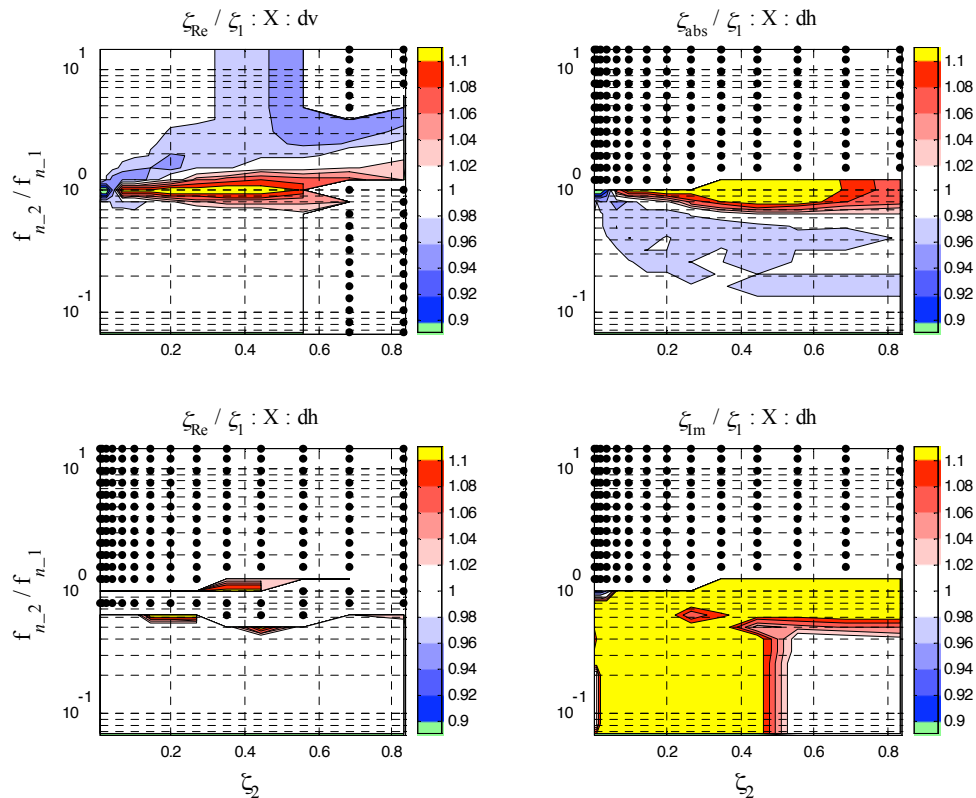


Figura 3. El cambio en el amortiguamiento evaluado para distintas estrategias exactas cuando $f_{n-1} = 200\text{Hz}$ y $\zeta_1 = 0.05$. Los puntos indican donde una medida válida no se pudo realizar.

Para estudiar la sensibilidad en una forma más general, se mide el cambio en el parámetro modal medido de la resonancia principal estática, mientras la resonancia secundaria varía en f_n y ζ . Para ello, se fijaron $f_{n-1} = 200\text{Hz}$ y $\zeta_1 = 0.1$ y se varió f_{n-2} entre 13Hz y 3kHz en 25 pasos espaciados logarítmicamente. ζ_2 se varió entre 0.05 y 0.84 en 14 pasos espaciados cúbicamente. La Figura 2 muestra la frecuencia, medida por cada método, normalizada a 200Hz como función de f_{n-2}/f_{n-1} y de ζ_2 .

Primero considerando sistemas con amortiguamiento viscoso, se ve que las estrategias $f_{\text{abs}}:V$ y $f_{\text{im}}:V$ son las más robustas en ellas la evaluación de la frecuencia no varía en más del 1%. $f_{\text{re}}:X$ también es robusto, pero sólo cuando $f_{n-2} < f_{n-1}$, y esto se explica por el residuo a frecuencias por debajo de f_{n-2} que existe para la respuesta en X , aunque hasta $\zeta_2 > 0.4$ el error es pequeño. Por encima de este umbral no son posibles medidas válidas. $f_{\text{re}}:V$ es también bastante robusto, pero hay un área extenso en ζ_2 donde no es posible obtener medidas válidas.

Por otro lado, para sistemas con amortiguamiento histerético, se ve que $f_{\text{abs}}:X$ es muy robusto cuando $f_{n-2} < f_{n-1}$ por las mismas razones que para $f_{\text{re}}:X:dv$. $f_{\text{re}}:V$ es la mejor opción para este tipo de amortiguamiento, y $f_{\text{re}}:X$ y $f_{\text{im}}:X$ no ofrecen medidas válidas cuando $f_{n-2} < f_{n-1}$.

Finalmente, se repite este análisis para las estrategias que miden amortiguamiento exactamente, como se ve en la Figura 3. Aquí, se han cambiado ζ_2 a 0.05 ya que, en general, todas las estrategias de medida del amortiguamiento son más sensibles que para la medida de f_n . Como todas las estrategias son aplicadas en X hay errores o medidas inválidas cuando $f_{n-2} < f_{n-1}$ por las razones que se explicaron arriba. Sin embargo, la estrategia más robusta es $\zeta_{\text{re}}:X$, que sólo sufre errores de aproximadamente un 5% como máximo cuando $f_{n-2} \neq f_{n-1}$.

4. Resumen y conclusiones

En este trabajo se ha investigado el efecto de una resonancia secundaria en la medida de parámetros modales en un sistema SDOF. En la práctica sistemas SDOF verdaderos no existen y se han encontrado las estrategias de medida que son más robustas para evaluar la frecuencia natural (f_n) y al amortiguamiento (ζ) (tanto viscoso como histerético). En la evaluación de f_n las estrategias basadas en el espectro de la velocidad son las más robustas – en este parámetro no hay residuo ni por arriba ni por debajo de la resonancia secundaria. En la evaluación de ζ sólo estrategias basadas en el desplazamiento son exactas, y por esto aparece un residuo por debajo de la resonancia secundaria. Pero, para un sistema con amortiguamiento viscoso, la evaluación de la parte real es bastante robusto hasta valores de amortiguamiento de la resonancia secundaria bastante altos.

Este trabajo no pretende ser un análisis exhaustivo, por ejemplo no se ha considerado una fase arbitraria entre la resonancia principal y secundaria, pero sirve para distinguir como unas estrategias de medida son más robustos que otras.

Agradecimientos

El segundo autor realizó este trabajo durante un Permiso de Estancia en el IA-CSIC. Se agradece la ayuda de Jesús Juan del Laboratorio de Estadística durante el desarrollo de este trabajo. Este trabajo ha sido parcialmente apoyado por el proyecto del Ministerio de Fomento (C5/2006).

Referencias

- [1] Anthony DK, Simón F, Juan J. Determining material damping type by comparing modal frequency estimators. JASA Express Letters. (Artículo aceptado 24/07/2007)
- [2] Anthony DK, Simón F. The role of material damping type in determining modal parameters of non-lightly damped systems. Inter-noise. 23-26 Agosto, Ottawa, Canadá
- [3] Ewins DJ. Modal Testing: theory, practice and application. Great Britain: Research Studies Press Ltd.; 2000