

DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS MODALES DE SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD CON ALTO AMORTIGUAMIENTO

Francisco Simón¹, David K. Anthony²

^{1,2} Instituto de Acústica, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, C/ Serrano 144, 28006 Madrid, Spain.
(¹ iasch18@ia.cetef.csic.es, ² iaca344@ia.cetef.csic.es)

Resumen

Hay relativamente poca literatura relacionada con la determinación de parámetros modales de sistemas con un grado de libertad, SDOF, con amortiguamiento medio o alto. Tradicionalmente se han realizado simplificaciones para amortiguamientos pequeños, que permiten el estudio teórico de cada método. Sin embargo, en el caso de gran amortiguamiento esto no es posible y se debe proceder de forma heurística. En lo que respecta a la determinación de parámetros modales de capas elásticas diseñadas para la reducción del ruido de impactos en los edificios, aquí se presentan algunos métodos habituales, evaluados numéricamente para sistemas SDOF con amortiguamiento viscoso y no viscoso. Las especificaciones dependen a menudo del tipo de amortiguamiento que debe ser conocido –o estimado– de antemano, mediante comparación entre medidas obtenidas por diferentes métodos.

Palabras-clave: ensayos de vibración, análisis modal, SDOF, alto amortiguamiento.

Abstract

There is relatively little literature concerned with modal parameter determination for highly damped single degree of freedom systems (SDOF). Traditionally, simplifications are made on the grounds of light damping have allowed theoretical study of each measurement method. However, for non-light damping this is often not possible and one must proceed on a heuristic basis. Using the measurement of modal parameters used to characterize resilient layers for impact transmission reduction within buildings, some common measurement methods are evaluated numerically for an SDOF system with viscous and non-viscous damping. Their performance often depends on the type of damping, which must be known, or gleaned before using method performance comparisons.

Keywords: vibration testing, modal analysis, SDOF system, high damping.

1 Introducción

La mayoría del trabajo publicado en la literatura científica sobre la determinación de parámetros modales trata de sistemas que tienen poco amortiguamiento, o sistemas de amortiguamiento ligero. Por otro lado cuando se construye un modelo vibratorio de un sistema, ya sea un sistema de un grado de libertad (*single-degree-of-freedom* – SDOF) o el análisis de un modo aislado en un sistema de múltiples grados de libertad, casi siempre se utiliza un modelo de amortiguamiento viscoso. En los casos de sistemas de amortiguamiento ligero, es suficiente usar el modelo viscoso ya que sólo se necesita tener en cuenta una pérdida de la energía del sistema –en la que el mecanismo por el que la

perde no presenta una diferencia significativa. El amortiguamiento viscoso modela la acción amortiguadora del flujo en un medio (por ejemplo, aire o líquido), pero hay sistemas en los que no hay ningún flujo y la acción amortiguadora viene dada por la compresión de sólidos elásticos. Este tipo de amortiguamiento se suele llamar “histerético” (*hysteretic*), aunque aquí se lo llamará amortiguamiento independiente de la frecuencia (FI – *frequency independent damping*).

Cuando se estudian sistemas con amortiguamiento más alto, los que aquí se llaman sistemas de amortiguamiento no ligero, es necesario saber el tipo de amortiguamiento que poseen para aplicar métodos más exactos para la determinación de los parámetros modales. Sin embargo, en muchos casos no se sabe exactamente qué tipo de amortiguamiento está operando. Esto puede ser debido a que no se puede distinguir físicamente entre estos dos tipos de amortiguamiento, a que no se puede identificar ningún amortiguamiento descrito por esos dos tipos, o a que parece que coexistan los dos tipos de amortiguamiento y no se sepa si uno es dominante.

Hay tres frecuencias modales que se puede asociar a un sistema SDOF. La frecuencia natural, f_n , es normalmente la más utilizada y expresa la frecuencia de oscilación sin pérdida de energía. Las otras dos son la frecuencia amortiguada, f_d , que es la frecuencia de oscilación de un sistema con amortiguamiento, y la frecuencia de resonancia, f_r , que es la frecuencia de respuesta máxima de un sistema. Estas dos se relacionan con f_n mediante

$$f_d = f_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad , \quad f_r = f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad , \quad (1a,b)$$

donde ζ es el factor de amortiguamiento, definido más abajo.

En esta ponencia se presenta una manera de determinar el tipo de amortiguamiento que opera en un sistema mediante comparación entre medidas de parámetros modales usando dos métodos de medición con la respuesta de un sistema expresado en desplazamiento y en velocidad. Esto permite medir correctamente la frecuencia natural pero también usar un método adecuado de determinar el amortiguamiento.

Las frecuencias circulares y sus correspondientes frecuencias angulares se denotarán por f y ω con el mismo sufijo. Los parámetros temporales se expresarán en minúsculas, mientras que sus correspondientes magnitudes en frecuencia se expresarán en mayúsculas.

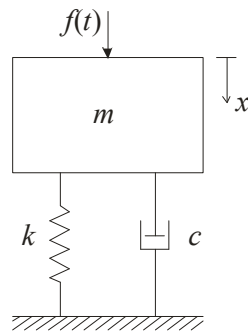


Figura 1 – Sistema SDOF con masa (m) constante de muelle (k) y coeficiente de amortiguamiento (c).

2 Sistema SDOF con dos modelos de amortiguamiento

2.1 Modelo SDOF con amortiguamiento de tipo viscoso

La respuesta de un sistema de SDOF con amortiguamiento viscoso, a una excitación de fuerza, F , véase Figura 1, se puede conseguir en muchos textos, por ejemplo [1, 2, 3], y todas son equivalentes a

$$X(\omega) = \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta\omega_n\omega} \quad (2)$$

donde m es la masa rígida. La frecuencia natural (f_n) y el coeficiente de amortiguamiento (ζ) son

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (3a,b)$$

donde k es la rigidez del muelle y c la constante de amortiguamiento viscoso. Se puede calcular la respuesta en velocidad aplicando la propiedad generalizada de la transformada de Fourier, y es

$$V^{<q>}(\omega) = j\omega X^{<q>}(\omega) \quad (4)$$

donde $<q>$ es “v” en este caso representando el amortiguamiento viscoso. Hay que señalar que el sistema se puede excitar con un señal de banda ancha y continua (por ejemplo, ruido aleatorio o una banda de frecuencia) o por un señal impulsiva. Siempre que en ambos casos los anchos de banda de la excitación sean comparables [4].

2.2 Modelo SDOF con amortiguamiento de tipo “histeretico” (FI)

Existen textos que estudian también sistemas SDOF con amortiguamiento FI (o *hysteretic*), por ejemplo [2], en ellos se hace que el término complejo del denominador sea independiente de la frecuencia. En una forma sencilla, la respuesta del desplazamiento en frecuencia es

$$X^{FI}(\omega) = \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + jh} \quad (5)$$

donde h es el factor de pérdidas histerético. Se puede obtener una equivalencia (en la resonancia) entre éste y ζ_{eq} (amortiguamiento viscoso) según [2]

$$\zeta_{eq} = \frac{h}{2\omega_n^2} \quad ; \quad h_{eq} = 2\zeta\omega_n^2 \quad (6)$$

También, se puede convertir la respuesta en frecuencia a velocidad usando la eqn (4) y en este caso $<q>$ es “FI”.

2.3 Uso de espectro generalizado

Para poder aplicar los métodos de determinación, que serán descritos adelante, sobre la respuesta en desplazamiento y velocidad, conviene definir un espectro generalizado, S como

$$S_{<p>}^{<q>}(\omega) = \begin{cases} X^{<q>}(\omega) & , \quad p = x \\ -jV^{<q>}(\omega) & , \quad p = v \end{cases} \quad (7)$$

donde el parámetro de medida $\langle p \rangle = \{x, v\}$ (desplazamiento o velocidad respectivamente), y $\langle q \rangle$ ha sido definido anteriormente. Se observa que para $p = v$ el espectro se corrige con un factor de $-j$, que intercambia la partes real e imaginaria de la respuesta. Pero no hay ninguna corrección por frecuencia.

2.4 Los métodos de evaluación de parámetros modales

Se usan dos métodos bastante conocidos para evaluar los parámetros modales. Las frecuencias y valores de amortiguamiento se identifican por el método de extracción y no por la identidad de las frecuencias modales (f_n , f_d y f_r) y se mostrará su exactitud en la medida de sistemas con amortiguamiento no ligero. Las medidas del amortiguamiento por los dos métodos son medidas exactas, normalmente se suelen usar versiones aproximadas válidas para amortiguamiento ligero, pero ese no es nuestro caso.

2.4.1 El método: “Peak Picking” (PP)

El método Peak Picking (PP) [1,2,3,5] determina los parámetros modales de la magnitud de la respuesta del sistema, S . La frecuencia modal evaluada, f_{pp} , se determina como la frecuencia donde ocurre la magnitud máxima, así

$$f_{pp} : |S(f_{pp})| = \max |S(f)| . \quad (8)$$

El valor de amortiguamiento, ζ_{pp} , se evalúa de f_{pp} y las frecuencias de mitad potencia a cada lado del máximo, como

$$\zeta_{pp} = \frac{f_u^2 - f_l^2}{4f_{pp}^2} , \quad (9)$$

donde f_u , f_l y f_{pp} se muestran en la Figura 2.

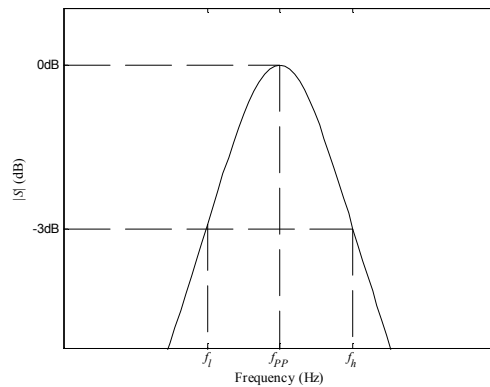


Figura 2 – Definición de las frecuencias f_{pp} , f_u y f_l que se usan en el método PP.

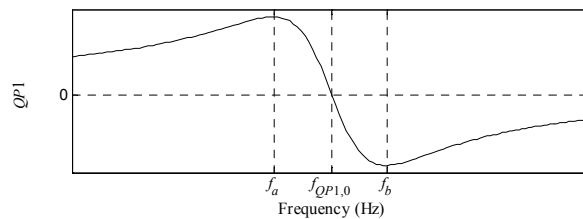


Figura 3 – Definición de las frecuencias $f_{QP1,0}$, f_a y f_b que se usan en el método QP1,0.

2.4.2 El método: “corte de la parte real del espectro con el eje de abscisas” (QP1,0)

En este método la frecuencia modal, $f_{QP1,0}$, se define como la frecuencia donde el valor de la parte real es igual a cero [3], así

$$QP1(\omega) = \text{Re}\{S_{<p>}^{<q>}(\omega)\} \quad , \quad f_{QP1,0} : QP1(f_{QP1,0}) = 0 . \quad (10a,b)$$

El amortiguamiento, $\zeta_{QP1,0}$, se calcula a partir de las frecuencias donde la parte real de la respuesta es máxima y mínima, como se muestra en la Figura 3. $\zeta_{QP1,0}$ se definen como

$$\zeta_{QP1,0} = \frac{f_b^2 - f_a^2}{4(f_{QP1,0})^2} . \quad (11)$$

3 Evaluación de los modelos de extracción de parámetros modales

3.1 Evaluación de la frecuencia medida con el tipo del amortiguamiento

Para evaluar la precisión en la obtención de f_n mediante los métodos PP y QP1,0 a partir de las respuestas en desplazamiento o en velocidad, para sistemas con cada uno de los tipos de amortiguamiento se puede seguir un procedimiento teórico o numérico. En este caso se usó un modelo numérico para generar respuestas de cada parámetro, en desplazamiento o velocidad, por un sistema con cada tipo de amortiguamiento. La frecuencia medida en cada caso se normalizó a f_n , y se hizo sobre valores de amortiguamiento de ζ ó ζ_{eq} entre 0 y 1. Aquí se introduce un notación en la que el parámetro de la respuesta es un sufijo del parámetro modal, por ejemplo, $f_{pp}:X$ significa la frecuencia evaluada por el método PP con la respuesta del sistema en desplazamiento.

La Figura 4 muestra que para sistemas con amortiguamiento viscoso las medidas $f_{pp}:V$, $f_{QP1,0}:X$ y $f_{QP1,0}:V$ evalúan f_n correctamente, mientras que $f_{pp}:X$ subestima f_n , ya que como viene descrito en los libros de teoría éste valor mide f_r . Por otro lado la Figura 5 muestra que para sistemas con amortiguamiento del tipo FI $f_{pp}:X$, $f_{QP1,0}:X$ y $f_{QP1,0}:V$ evalúan correctamente f_n , mientras que $f_{pp}:V$ la sobrestima f_n .

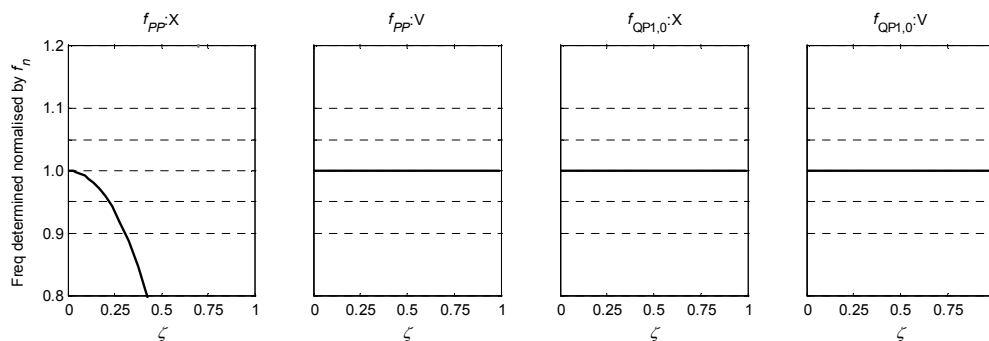


Figura 4 – Exactitud de la evaluación de la frecuencia f_n de un sistema SDOF con amortiguamiento viscoso, cuando se mide mediante los dos métodos descritos tanto en desplazamiento como en velocidad.

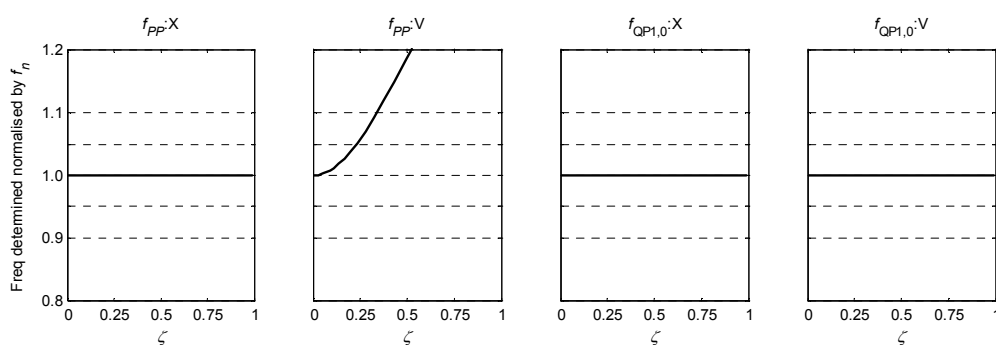


Figura 5 – Exactitud de la evaluación de la frecuencia f_n de un sistema SDOF con amortiguamiento FI , cuando se mide mediante los dos métodos descritos tanto en desplazamiento como en velocidad.

Así, siempre que el sistema tiene amortiguamiento no-ligero, será diferencias entre las frecuencias evaluadas que se puede resumir como patrones, véase la Tabla 1. La adhesión de las frecuencias realizadas dejar el tipo de amortiguamiento que tiene el sistema ser determinada.

Tabla 1 – Los patrones entre las frecuencias evaluadas para un sistema de amortiguamiento no-ligero de cada tipo del amortiguamiento, los cuales dejan este ser determinado.

Tipo del amortiguamiento	Frecuencia evaluada por método			
	$f_{PP}:X$	$f_{PP}:V$	$f_{QP1,0}:X$	$f_{QP1,0}:V$
Viscoso	$< f_n$	$= f_n$	$= f_n$	$= f_n$
FI	$= f_n$	$> f_n$	$= f_n$	$= f_n$

3.2 Evaluación del amortiguamiento en función de su tipo

También se puede evaluar la precisión de cada método para cada parámetro de respuesta y cada tipo del amortiguamiento. Este análisis es más complejo, se trabaja con tres frecuencias, y sólo se puede proceder usando análisis numérico. Se generaron respuestas de sistemas variando dentro de un rango de valores f_n y ζ (ó ζ_{eq}). La precisión se muestra mediante el valor del amortiguamiento calculado normalizado al valor verdadero. Para cada valor de f_n se presenta el valor mínimo y máximo evaluado sobre intervalo de ζ . Hay una variación a bajos valores debida a la alineación fortuita de los valores de frecuencia discretos utilizados.

La Figura 6 muestra que para sistemas con amortiguamiento viscoso, solamente $\zeta_{QP1,0}:X$ obtiene correctamente el amortiguamiento, pero solo para un intervalo limitado, hasta $\zeta \approx 0.5$. Esto se debe a que no todas las (tres) frecuencias necesarias para el cálculo son identificables de la respuesta. Los otros métodos sobrestiman ζ con errores significativos que incluso a valores bajos de ζ , especialmente $\zeta_{PP}:X$. La Figura 7 muestra que $\zeta_{QP1,0}:X$ evalúa el amortiguamiento para sistemas con amortiguamiento del tipo FI correctamente, y también $\zeta_{PP}:X$. Los otros métodos subestiman el valor de ζ_{eq} , siendo $\zeta_{PP}:V$ el que obtiene peores resultados. Dado que la precisión del método $\zeta_{PP}:X$ depende del tipo del amortiguamiento, es importante saber el tipo de amortiguamiento antes de aplicar un método concreto de evaluación. Sin embargo hay que destacar que el método $\zeta_{QP1,0}:X$ es exacto (hasta $\zeta \approx 0.5$) independientemente del tipo de amortiguamiento del material.

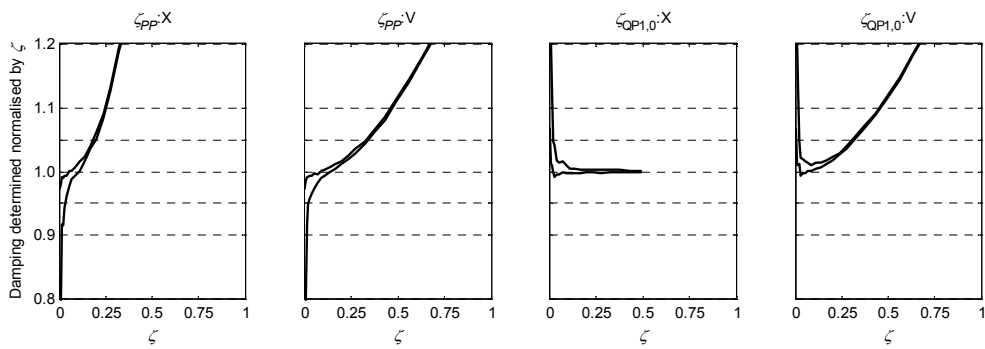


Figura 6 – Exactitud de la evaluación del amortiguamiento ζ de un sistema SDOF con amortiguamiento viscoso, cuando se mide mediante los dos métodos descritos tanto en desplazamiento como en velocidad.

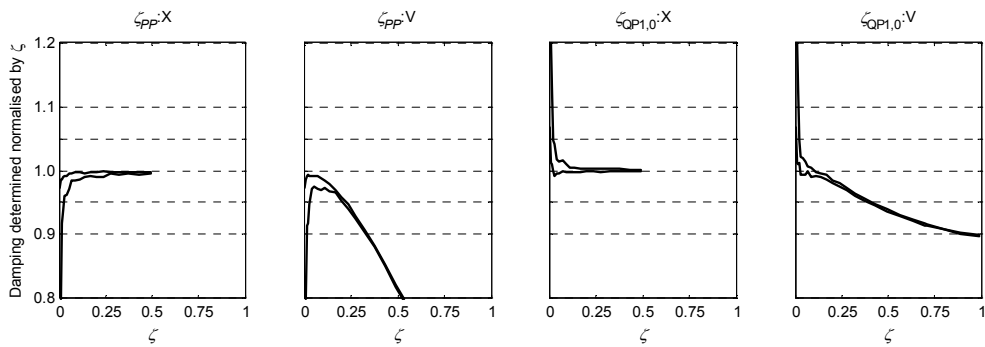


Figura 7 – Exactitud de la evaluación del amortiguamiento ζ_{eq} de un sistema SDOF con amortiguamiento FI , cuando se mide mediante los dos métodos descritos tanto en desplazamiento como en velocidad.

4 Sistema experimental

El sistema experimental se muestra en la Figura 8, y se basa en el sistema usado para la caracterización de capas elásticas empleadas para reducir el ruido de impacto en la edificación [6]. 288 respuestas de 3 segundos de duración fueron grabadas usando un sistema de adquisición con frecuencia de muestreo de 16 399Hz. El parámetro medido fue la aceleración que se convierte a velocidad y desplazamiento por integración temporal.

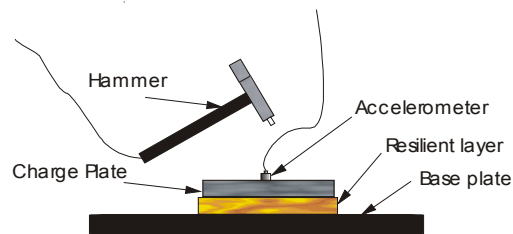


Figura 8 – Sistema experimental consistente en una masa de 8 kg (*Charge plate*) sobre una capa elástica. El sistema se excita verticalmente mediante un impacto, y la oscilación se mide con un acelerómetro.

5 Determinación de modelo de amortiguamiento por análisis estadístico

Para la determinación del modelo de amortiguamiento se procesaron los resultados de las series de las respuestas del sistema obtenidas experimentalmente. Como se ha dicho se fueron 288 respuestas divididas en varias series. De cada una de ellas se obtuvieron los parámetros modales –frecuencia de resonancia y amortiguamiento– según los dos procedimientos de extracción de parámetros antes descritos. Sin embargo en lo que sigue sólo se describirá el análisis realizado con la frecuencia de resonancia del sistema.

El proceso se llevó a cabo de forma automática. El conjunto de señales poseen variabilidades en la respuesta que hacen que no sean completamente homogéneas, estas disparidades hicieron que en el programa de cálculo se tuvieran en cuenta algunas excepciones, que fueron subsanadas cuando fue posible, en caso contrario, si el resultado presentaba dudas o no se podía obtener, se generaba un código de error y no se entregaba ningún resultado. De este proceso se obtuvieron 193 resultados válidos, que son los que se muestran a continuación.

En la Figura 9 se muestran los resultados mediante su histograma, en él ya se aprecia que $f_{PP \cdot X}$ se encuentra desplazado hacia la izquierda con respecto a los otros resultados y que su forma también es algo diferente. En la Figura 10 se puede apreciar mejor la variabilidad de la muestra de resultados de cada método de extracción de la frecuencia de resonancia y la posición relativa entre ellos.

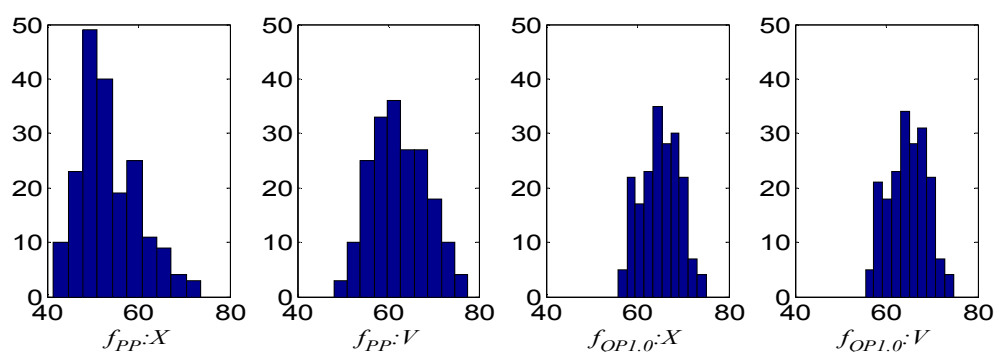


Figura 9 – Histograma de frecuencias de resonancia para cada uno de los métodos.

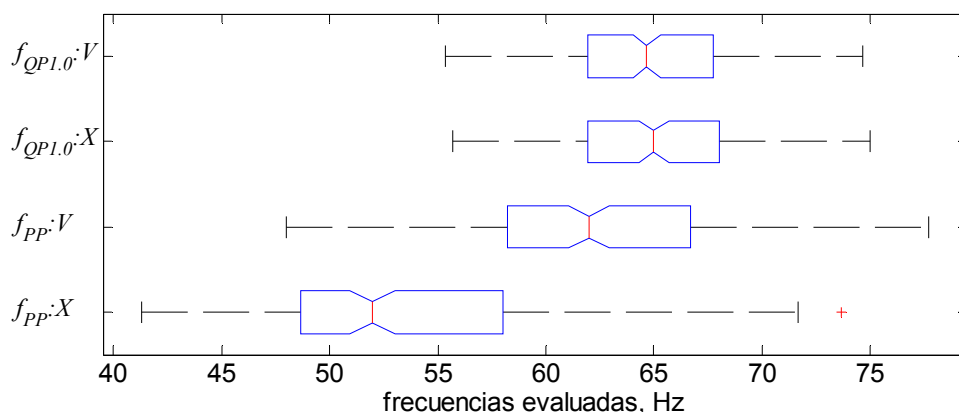


Figura 10 – Diagrama de cajas de la muestra de frecuencias evaluadas.

A partir de estos datos se calcula el valor de la frecuencia de resonancia de cada uno de los métodos. En la Figura 11 se muestra el resultado, en el que se incluye la incertidumbre estimada con un nivel de confianza del 95 %. En ella se puede apreciar que el patrón de valores se corresponde con el debido a un sistema con amortiguamiento viscoso (compárese con las figuras 4 y 5). Los valores de $f_{PP:V}$, $f_{QP1,0:X}$ y $f_{QP1,0:V}$, son comparables entre sí –y corresponderían a f_n –, mientras que $f_{PP:X}$ muestra una diferencia significativa con ellos.

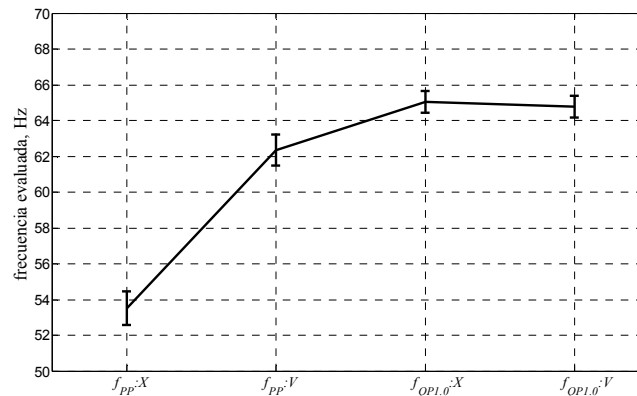


Figura 11 – Frecuencia evaluada para cada uno de los métodos utilizados. La barra vertical indica un intervalo con un nivel de confianza del 95 %.

6 Conclusiones

La determinación del tipo de amortiguamiento de un material es importante, sobre todo cuando se trabaja con materiales de amortiguamiento no ligero. Sin embargo su identificación no es fácil a partir de las magnitudes directas del sistema. Por otro lado existen distintos métodos de extracción de parámetros modales, cada uno de ellos se basa en principios distintos y además se pueden utilizar a partir de diferentes magnitudes de entrada. En este trabajo se muestra como a partir de dos de estos métodos –peak picking y corte de la parte real de la espectro con el eje de abscisas– y utilizando dos magnitudes de entrada diferentes –desplazamiento y velocidad– se pueden crear patrones basados en la frecuencia de resonancia del sistema, supuesto SDOF, que permiten identificar el tipo de amortiguamiento del material.

Además se ha aplicado este procedimiento a la identificación de un sistema mostrando su viabilidad. En un futuro próximo se espera ampliar este estudio para incluir más métodos que permitan una mayor precisión en la identificación de los mecanismos de amortiguamiento de un material de este tipo, ya que no es descartable que existan materiales en los que el mecanismo de disipación de energía sea mixto.

Agradecimientos

El segundo autor llevó a cabo este trabajo bajo un Permiso de Estancia de la institución nombrada. También queremos agradecer a Jesús Juan, catedrático de Estadística de la E.T.S.I. Industriales, UPM (Madrid) por sus comentarios, discusiones y ayuda prestada en el análisis estadístico llevado a cabo

para este trabajo. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto del Ministerio de Fomento de referencia C5 /2006.

Referencias

-
- [1] Fahy FJ , Walker JG (Eds.). *Fundamentals of noise and vibration*. Great Britain: E & FN Spon, 1998.
 - [2] Mierovitch L. *Fundamentals of vibrations*. Singapore:McGraw-Hill, 2001.
 - [3] Ewins DJ. *Modal Testing: theory, practice and application*. Great Britain: Research Studies Press Ltd, 2000.
 - [4] Anthony DK, Simón F. Generating “idealised” impulse response functions to improve or repair single degree of freedom measurements. *Applied Acoustics*.
(Available on-line 9 Sept 2008. doi:10.1016/j.apacoust.2008.07.008)
 - [5] de Silva CW (Ed). *Vibration damping, control and design*. Canada: CRC Press; 2007.
 - [6] EN 29052-1:1992 Acoustics – Determination of dynamic stiffness – Part 1: Materials used under floating floors in dwellings. 1992.