TECNIACUSTICA GANDIA • 2006

OBTENCIÓN DE TEMPERAMENTOS CÍCLICOS MEDIANTE TÉCNICAS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

PACS: 43.75.Zz

Vicente Liern Carrión
Departamento de Matemática para la Economía y la Empresa.
Universidad de Valencia,
Av. Tarongers, s/n.
46071 Valencia.
Fax: 963 828 370.
E-mail: vicente.liern@uv.es

ABSTRACT

The cyclic temperaments provide an alternative approach to some tuning systems that present serious harmonic difficulties. When the system is generated by one interval it is easy to determine a temperament, but this does not work when more than one generator interval exists. We propose an algorithm that assigns a temperament in both cases. Some examples illustrating this situation are presented.

RESUMEN

Los temperamentos cíclicos son una alternativa de consenso para algunos sistemas de afinación que presentan serias dificultades armónicas. Cuando los sistemas están generados por un único intervalo es relativamente sencillo determinar un temperamento asociado a él; sin embargo, cuando el sistema está generado por más de un intervalo la situación no está resuelta. En este trabajo proponemos un algoritmo que asigna un temperamento en todos los casos y presentamos algunos ejemplos que ilustran esta situación.

1. INTRODUCCIÓN

Desde que la escuela pitagórica fijó las bases numéricas para la obtención de la afinación musical, ha habido muchos autores que han analizado los sistemas de afinación desde un punto de vista matemático[1]. A partir de ellos, por ejemplo, la determinación de las notas afinadas se ha reducido al ámbito de una octava y se ha extrapolado sus frecuencias al resto de ellas o se ha podido determinar explícitamente las diferencias entre algunos intervalos (Goldáraz, 1992) que, de otro modo eran determinadas de oído.

Los métodos de aproximación numérica han tratado con éxito los sistemas de afinación generados por un único intervalo, como ocurre con el sistema pitagórico obtenido a partir de la quinta natural. En éstos, si el intervalo generador es α, para encontrar un temperamento cíclico que aproxime al sistema de afinación, basta con encontrar una fracción *p/q* que aproxime lo suficiente al intervalo α para que las notas del sistema de afinación original y del temperamento

[1] Benson (2005) es una magnífica referencia para analizar las propiedades matemáticas de los sistemas de afinación.

que lo aproxima puedan ser identificadas. De hecho, el siguiente resultado proporciona una condición suficiente para garantizar la bondad de esta aproximación (véase, por ejemplo, Hall and Josíc , 2001, Liern 2005).

Teorema 1: Sea S un sistema de afinación de n notas generado por el intervalo α. Dado un número racional p/q de manera que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2},$$

el temperamento $T = \{2^{k/q}, \quad k = 0, 2, ..., n-1\}$ está asociado a S y las notas homólogas de ambos sistemas distan menos de 1/2q.

Así, por ejemplo, a partir del sistema pitagórico, generado por la quinta natural, 3/2, podemos obtener el temperamento igual de 12 notas si consideramos la fracción 7/12, porque

$$\left|\log_2\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{12}\right| < \frac{1}{2 \bullet 12^2}$$

o el temperamento de Holder si la fracción considerada es 31/53, puesto que

$$\left|\log_2\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{31}{53}\right| < \frac{1}{2 \bullet 53^2}.$$

Sin embargo, cuando el sistema de afinación está generado por varios intervalos, esta asignación de temperamentos no es tan sencilla. Por ejemplo, en la justa entonación, o de los físicos, generada por los intervalos de quinta (3/2) y tercera (5/4), no existe un consenso sobre cuál sería el temperamento asociado (Chailley, Challan 1965, Benson 2005). A partir de finales de los años cuarenta (Barbour, 1948; Rosser 1950) se publican trabajos cuyo objetivo es obtener fracciones que aproximen a ambos intervalos. Básicamente la idea es encontrar fracciones p_1/q y p_2/q de manera que

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) \approx \frac{p_1}{q} \qquad \log_2\left(\frac{5}{4}\right) \approx \frac{p_2}{q}$$

Como el denominador de ambas fracciones es el mismo, *q*, ya tenemos determinado el número de notas por octava. Sin embargo, para obtener p_1/q y p_2/q son necesarias técnicas complejas de fracciones continuas (Barbour, 1948; Baker, 1984; Ivorra, 2002) y aún así no se pueden resolver todos los casos. Surge así una cuestión que creemos que merece ser analizada con mayor detalle.

2. SISTEMAS DE AFINACIÓN

Antes de exponer el método que proponemos para obtener temperamentos asociados a cualquier sistema de afinación necesitamos introducir alguna notación.

Definición 1: Sea f_1/f_2 un intervalo y $\alpha = |\log_2(f_1/f_2)|$. Llamamos sistema de afinación generado por α al conjunto

$$S_\alpha = \{2^{c_n} \mid \mathrm{c_n} = \alpha n - \lfloor \alpha n \rfloor,\ \mathrm{n} \in \mathrm{Z}\} \subset [1,2[$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera por defecto de *x*.

Cuando los sistemas están generados por más de un intervalo es necesario especificar cuántas veces aparece cada intervalo:

Definición 2: Sean $\mathrm{A} = \{\alpha_i\}_{i=1}^k \subset [0,1[$ y una familia de funciones $f_i : Z \to Z,\ 1 \le i \le k.$ Llamamos sistema de afinación generado por los intervalos $\{2^{\alpha_i}\}_{i=1}^k$ (o simplemente por $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$) y $F = \{f_i\}_{i=1}^k$ al conjunto

$$S_\alpha = \left\{ 2^{c_n} \;\middle|\; c_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n) - \left\lfloor \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n) \right\rfloor,\ n \in Z \right\} \subset [1,2[\,.$$

Si todos los elementos del sistema de afinación son números racionales decimos que es una afinación, mientras que si alguno de ellos es un número irracional decimos que es un temperamento.

3. ALGORITMO PARA OBTENER TEMPERAMENTOS CÍCLICOS

Supongamos un sistema de afinación *S* que está generado por los intervalos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K$. Como hemos expuesto en la introducción, nuestro objetivo es conseguir fracciones p_i/q que garanticen la idoneidad de los temperamentos que asociaremos a *S*, es decir que disten de cada intervalo generador a lo sumo una pequeña cantidad épsilon:

$$\left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \in, \qquad i=1, 2,\ldots, k. \tag{1}$$

Para mantener la analogía con el caso de un único intervalo generador vamos a expresar la desigualdad (1) de la forma siguiente:

$$\left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{c}{q^2}, \qquad i=1, 2,\ldots, k. \tag{2}$$

donde c es una constante no negativa.

Nuestra propuesta consiste en resolver el modelo de programación matemática siguiente:

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & c & \\ \text{s.a}: & \left| q^2\alpha_i - qp_i \right| \leq c, & 1 \leq i \leq k \\ & p_i, q \in Z, & 1 \leq i \leq k \\ & p_i, q \geq 0, & 1 \leq i \leq k \end{array} \tag{3}$$

La factibilidad de (3) está asegurada por el siguiente resultado de Dirichlet:

Teorema 1: *Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ son números reales y, al menos uno de ellos es irracional, entonces hay infinitas maneras de elegir un denominador q y numeradores $p_1, p_2, \ldots, p_k$ de manera que las aproximaciones*

$$\frac{p_1}{q} \approx \alpha_1,\ \frac{p_2}{q} \approx \alpha_2,\ \cdots,\ \frac{p_k}{q} \approx \alpha_k \tag{4}$$

verifican

$$\left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^{1+1/k}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{5}$$

Además, la segunda restricción[2] de (3) garantiza que si ($p_1,\ldots, p_k, p_1,\ldots, p_k$, c) es una solución factible de (3) se satisface

$$\left| \alpha_i - p_i / q \right| < q^{-1-1/k}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

A partir del modelo (3) podemos construir un algoritmo que permite designar qué temperamentos cíclicos pueden ser asociados al sistema de afinación S.

Método para obtener temperamentos cíclicos[3]

Dado un sistema de afinación *S* generado por los intervalos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K$, expresamos en forma de algoritmo nuestra propuesta:

---

[2] En general la restricción $c \leq q^{(k-1)/k}$ resulta innecesaria en el modelo (3).

[3] Todas los pasos del algoritmo pueden ser resueltos utilizando MS Excel.

PASO 1: Determinar las funciones f_1(n), f_2(n), …, f_k(n) que determinan la aparición de los intervalos.

PASO 2: Resolver el programa de programación matemática

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c \\ \text{s.a}: & \left|q^2\alpha_i - qp_i\right| \le c, \qquad 1 \le i \le k \\ & p_i, q \ge 0, \quad p_i, q \in Z \\ & l_0 \le q \le u_0 \end{array} \tag{6}$$

donde l_o y u_o son cotas inferiores y superiores al número mínimo y máximo de notas admitidas en una octava.

PASO 3: Sustituir los valores α_i por p_i/q para i=1, 2, …, k.
PASO 4: Obtener un temperamento cíclico T^q asociado a *S*.

4. APLICACIÓN A LA JUSTA ENTONACIÓN

Cuando se habla de justa entonación no se hace referencia a un único sistema de afinación (Goldáraz, 1992 ; Piles, 1982). Sin embargo, todos presentan la característica común de estar generados por los intervalos de quinta y tercera naturales dados por 3/2 y 5/4 respectivamente. En este caso, de acuerdo con la Definición 2, tendríamos

$$\alpha_1 = \log_2(3/2),\ \alpha_2 = \log_2(5/4)\ .$$

Para no tener que ir distinguiendo casos, a partir de ahora sólo haremos referencia al sistema de Zarlino (Piles, 1982).

PASO 1: Las funciones f_1(n), f_2(n) que determinan la aparición de los intervalos vienen dadas[4] por

$$f_1(n) = n - 1 - 4\left(\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+3}{7} \right\rfloor\right),\ \ f_2(n) = \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+3}{7} \right\rfloor$$

(véanse Piles 1982, Liern 2005)

PASO 2: Resolver el programa de programación matemática

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c \\ \text{s.a}: & \left|q^2\alpha_1 - qp\right| \le c \\ & \left|q^2\alpha_2 - qr\right| \le c \\ & p, q, r \in \mathrm{Z} \\ & p,q,r \ge 0 \\ & l_0 \le q \le u_0 \end{array}$$

Si fijamos como cota superior u_0=1200 y como cota inferior l_o=2, los resultados obtenidos son:

	q	**p_1**	**p_2**	**c**	$\lvert\alpha_1 - p_1/q\rvert$	$\lvert\alpha_2 - p_2/q\rvert$	c/q^2	$1/q^2$
$q \ge 2$	**2**	**1**	**1**	0.7122876	0.8496250x10^{-1}	0.1780719	0.1780719	0.2500000
$q \ge 3$	**3**	**2**	**1**	0.7353375	0.8170417x10^{-1}	0.1140524x10^{-1}	0.8170417x10^{-1}	0.1111111
$q \ge 4$	**4**	**2**	**1**	1.359400	0.8496250x10^{-1}	0.7192809x10^{-1}	0.8496250x10^{-1}	0.6250000x10^{-1}
$q \ge 5$	**12**	**7**	**4**	1.642354	0.1629167x10^{-2}	0.1140524x10^{-1}	0.1140524x10^{-1}	0.6944444x10^{-2}

[4] En Piles (1982) se presenta una descripción muy clara de cómo obtener la justa entonación a partir de la afinación pitagórica sustituyendo algunos de las quintas naturales, 3/2, por quintas sintónicas, 40/27. Las funciones f_1 y f_2 recogen precisamente en qué lugares deben ser sustituidas unas quintas por otras.

$q \geq 13$	**19**	**11**	**6**	2.216042	0.6015132×10^{-2}	0.6138621×10^{-2}	0.6138621×10^{-2}	0.2770083×10^{-2}
$q \geq 20$	**22**	**13**	**7**	2.878150	0.5946590×10^{-2}	0.3746277×10^{-2}	0.5946590×10^{-2}	0.2066116×10^{-2}
$q \geq 23$	**118**	**69**	**38**	3.017860	0.2167380×10^{-3}	0.1058034×10^{-3}	0.2167380×10^{-3}	0.7183602×10^{-4}
$q \geq 119$	**171**	**100**	**55**	8.499423	0.1671791×10^{-3}	0.2906680×10^{-3}	0.2906680×10^{-3}	0.3419856×10^{-4}
$q \geq 172$	**236**	**138**	**76**	12.07144	0.2167380×10^{-3}	0.1058034×10^{-3}	0.2167380×10^{-3}	0.1795461×10^{-4}
$q \geq 173$	**612**	**358**	**197**	12.23637	0.4819540×10^{-5}	0.3267005×10^{-4}	0.3267005×10^{-4}	0.2669913×10^{-5}

Es decir que si queremos un temperamento cíclico con mayor precisión que el de 12 notas (que en este caso no es demasiado apropiado), deberíamos recurrir al de 19, 22, 118, 171, 236 o 612 notas. Evidentemente, el número de notas admitidas en una octava juega un papel fundamental en la determinación del temperamento idóneo, por tanto la utilidad de temperamentos con 118 notas, o más, por octava sería cuestionable. A continuación expresamos los resultados obtenidos para los temperamentos de 12 y 19 notas.

PASOS 3 Y 4 : Las notas que aparecen son las siguientes

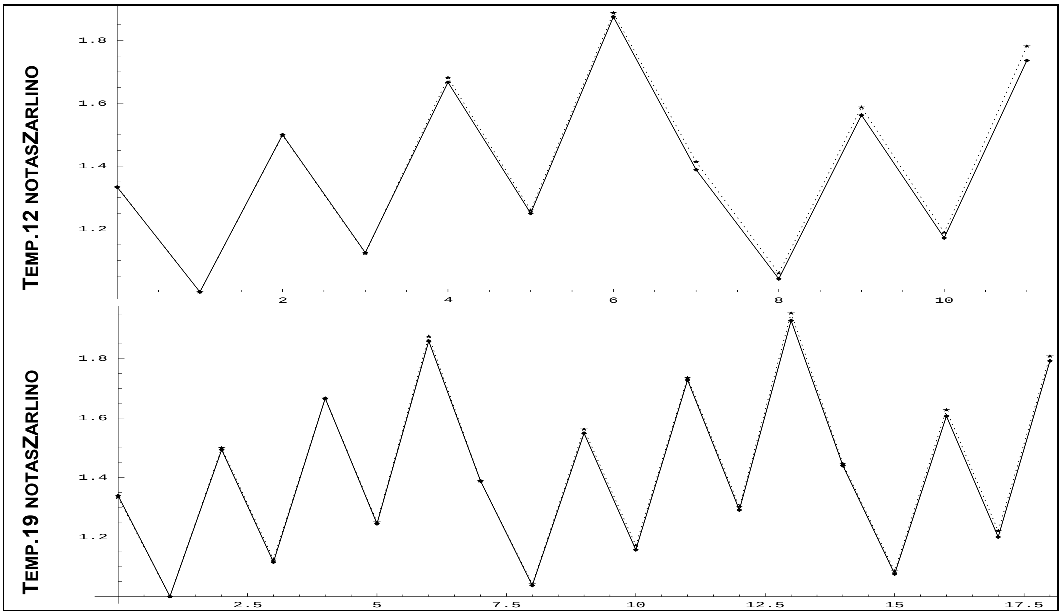
Temperamento de 12 notas

Bemoles		Naturales		Sostenidos	
		fa	$2^{5/12}$	fa#	$2^{6/12}$
		do	$2^{0/12}$	do#	$2^{1/12}$
sol^b	= *fa#*	sol	$2^{7/12}$	sol#	$2^{8/12}$
re^b	= *do#*	re	$2^{2/12}$	re#	$2^{3/12}$
la^b	= *sol#*	la	$2^{9/12}$	la#	$2^{10/12}$
mi^b	= *re#*	mi	$2^{4/12}$		
si^b	= *la#*	si	$2^{11/12}$		

Temperamento de 19 notas

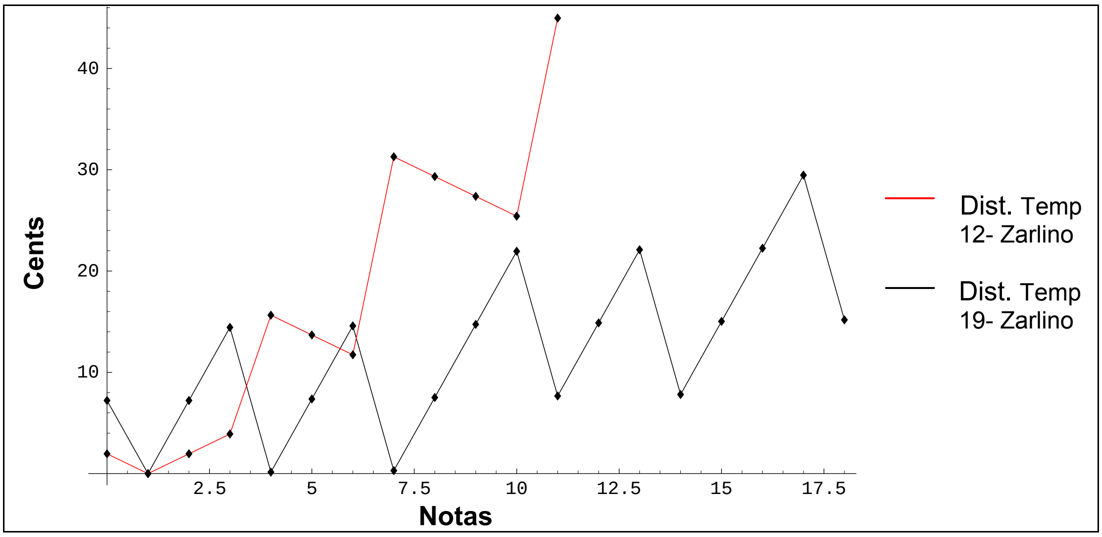
Bemoles		Naturales		Sostenidos	
		fa	$2^{8/19}$	fa#	$2^{9/19}$
do^b	$2^{18/19}$	do	$2^{0/19}$	do#	$2^{1/19}$
sol^b	$2^{10/19}$	sol	$2^{11/19}$	sol#	$2^{12/19}$
re^b	$2^{2/19}$	re	$2^{3/19}$	re#	$2^{4/19}$
la^b	$2^{13/19}$	la	$2^{14/19}$	la#	$2^{15/19}$
mi^b	$2^{5/19}$	mi	$2^{6/19}$	mi#	$2^{7/19}$
si^b	$2^{16/19}$	si	$2^{17/19}$		

En los dos gráficos siguientes se puede observar cómo aproximan al sistema de Zarlino los temperamentos de 12 y 19 notas.



Aunque a simple vista se aprecia que el temperamento de 19 notas resulta más adecuado para aproximar el sistema de Zarlino, creemos que puede resultar más útil representar las distancias, en cents, entre las notas del sistema temperado de 12 notas y el temperamento de 19 notas con respecto al de Zarlino:

Distancias entre las notas



A la vista de este gráfico, en el temperamento cíclico de 19 notas las distancias son menores que en el de 12 notas y por tanto aproxima mejor al sistema de Zarlino que el temperamento igual.

4. REFERENCIAS BIBILIOGRÁFICAS

A. Baker (1984), *A concise introduction to the theory of numbers.* Cambridge University Press.

J. M. Barbour (1948), *Music and ternary continued fractions*, The American Mathematical Monthly, 55, 545–555.

D. Benson (2005), *Mathematics and Music*, http://www.math.uga.edu/djb/index.html.

J. Chailley, H. Challan (1965), *Teorie complète de la musique,* Alphonse Leduc Éditions, Paris.

J. J. Goldáraz Gainza (1992), *Afinación y temperamento en la música occidental*, Alianza Editorial, Madrid.

R. W. Hall, K. Josíc (2001), *The Mathematics of Musical Instruments*, The American Mathematical Monthly, 108, 347–357.

J. Halusca (2000), *Equal Temperament and Pythagorean Tuning: a geometrical interpretation in the plane*, Fuzzy Sets and Systems, 114, 261–269.

C . Ivorra (2002), *Teoría de números*, Universidad de Valencia.

J. Lattard (1988), *Gammes et tempéraments musicaux,* Masson Éditions, Paris.

V. Liern (1994a), *La música y sus materiales: una ayuda para la clase de Matemáticas*. Suma, 14, 60–64.

V. Liern (1994b), *Métodos numéricos en música*, Epsilon, 30 51–60.

V. Liern (1994c), *Algoritmos matemáticos y afinación musical*, Educación Matemática, 6 45–55.

V. Liern (2005), *Fuzzy tuning systems: the mathematics of the musicians,* Fuzzy Sets and Systems150, 35–52.

J. J. Matras (1977), *Le son*, Presses Universitaires de France, Paris.

J. Piles Estellés (1982), *Intervalos y gamas*, Ediciones Piles, Valencia.

J. B. Rosser (1950), *Generalized ternary continued fractions*, The American Mathematical Monthly, 57, 528–535.