

## CARACTERIZACIÓN DE LA CAMPANA DE UNA TROMPETA MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

PACS: 43.75.Fg

Alaman, Xavier; Picó, Rubén; Redondo, Javier  
Escuela Politécnica Superior de Gandía. Universidad Politécnica de Valencia  
Carretera Nazaret-Oliva s/n.  
Grao de Gandía (Spain)  
Tel: 962 849 300  
Fax: 962 849 313  
E-Mail: xaalpui@epsg.upv.es

### ABSTRACT

From an acoustic point of view, the main feature of wind instruments is the air column as the air column is the resonator. The air has a mass and elastic behaviour and the wall vibration has a negligible effect in its sonority [1].

The aim of this work is to study the acoustic behaviour of a trumpet bell. The Finite Element Method has been used to simulate the air cavity of the bell. The analytical study of simpler resonators with a well-known acoustic behaviour as cylinders or cones permits to understand the trumpet bell. This work is concerned to study the vibrations of the air column in trumpet bell and its input acoustic impedance.

### RESUMEN

Una de las características de los instrumentos de viento, desde el punto de vista acústico, es que la columna de aire actúa como resonador. El aire tiene un comportamiento tipo masa y elástico de forma que la vibración de las paredes del instrumento influye poco en su sonoridad [1].

El interés de este trabajo dirige su atención en el estudio del comportamiento acústico de la campana de una trompeta, cedida por la firma Stomvi, atendiendo a su forma, con el objetivo de obtener su distribución modal y verificar las aproximaciones que otros autores han sugerido. Se ha utilizado para ello el método de elementos finitos para la simulación numérica de la cavidad de aire en la campana. Igualmente se ha realizado un estudio analítico comparativo de diversos resonadores con perfiles más sencillos de comportamiento acústico conocido. En ellos se considera, con muy buena aproximación, la propagación de ondas planas. El presente trabajo se ha centrado en el estudio de las vibraciones del aire de la campana y de su importancia para el sonido del instrumento así como en el estudio de la impedancia acústica de entrada.

## INTRODUCCIÓN

En este estudio se presentan en primer lugar una revisión de la propagación sonora en resonadores. La magnitud que permite caracterizar el comportamiento acústico del instrumento es la impedancia acústica de entrada [2]. Así, se presenta la dependencia de la impedancia con el perfil del resonador para varios casos sencillos conocidos: resonador de perfil cilíndrico cerrado y abierto y de perfil cónico. Finalmente se comparan estos resultados con los simulados en la campana de una trompeta.

## PRINCIPIOS GENERALES

La ecuación de Helmholtz describe la propagación de las ondas armónicas sonoras en un medio tridimensional. En su forma diferencial presenta solución analítica para algunos problemas particulares:

$$(\nabla^2 + k^2)p = 0 \quad [1]$$

donde  $p$  es la presión y  $k$  el número de onda.

De los once sistemas de coordenadas que separan la ecuación de onda, sólo tiene solución analítica, que conduce a la solución totalmente uniparamétrica, en el caso de las coordenadas esféricas, cilíndricas y cartesianas. Las campanas quedan, en general, excluidos del tratamiento uniparamétrico. En el caso que la campana no se aleje mucho del perfil cónico o cilíndrico, el tratamiento uniparamétrico plantea la posibilidad de que exista una solución aproximada uniparamétrica para el estudio de la propagación de ondas por su interior.

Webster propuso un modelo de solución uniparamétrica exacta de la ecuación de onda aproximada en la que considera que los frentes de onda dentro de una campana son planos y en consecuencia no son perpendiculares al perfil. Posteriormente Benade i Jansson [3] propusieron un nuevo modelo en el que establecían la existencia de superficies equipotenciales esféricas perpendiculares al perfil y al eje de la campana. El año 1993 Keefe, Agulló i Barjau [4] propusieron un nuevo modelo basado en la existencia de superficies equipotenciales perpendiculares al perfil, pero de geometría arbitraria. El resultado de estos últimos autores lleva a una ecuación que a pesar de ser analítica necesita forzosamente de una resolución numérica. En nuestro estudio emplearemos el método de elementos finitos para analizar el comportamiento acústico del cuerpo del instrumento.

## IMPEDANCIA DE ENTRADA

Para caracterizar espectralmente un instrumento es necesario realizar un estudio de la impedancia acústica del mismo. Esta magnitud describe, por tanto, las propiedades resonantes del instrumento. Se puede calcular como el cociente de presión y la velocidad volumétrica en la entrada del instrumento:

$$Z(x) = \frac{P(x)}{v(x)} \Big|_{x=0} \quad [2]$$

A continuación estudiaremos las propiedades acústicas de propagación de ondas sonoras en los resonadores suponiendo que no hay pérdidas en la propagación de las ondas sonoras.

### Instrumentos de perfil cilíndrico

Si el cilindro está abierto por sus dos extremos, la impedancia en el extremo abierto es nula  $Z(x=L)=0$  ya que la presión es casi nula (aproximación a bajas frecuencias). Por el contrario, la velocidad volumétrica es cero en el caso del cilindro cerrado y la impedancia

diverge  $Z(x=L) \rightarrow \infty$ . En ambos casos la impedancia de entrada es conocida y tiene una expresión sencilla:

$$\text{Cilindro abierto: } Z_{en}^a = jZ_0 \tan(kl) \quad [3]$$

$$\text{Cilindro cerrado: } Z_{en}^c = jZ_0 \cot(kl) \quad [4]$$

donde  $Z_0$  es la impedancia característica ( $Z_0 = \rho c/S$ ),  $l$  es el punto del eje axial donde se calcula la impedancia y  $L$  es la longitud axial del cilindro. Dichas expresiones [3] [4] son una aproximación de ondas planas válida a bajas frecuencias cuyo límite superior viene marcado por [11].

Los máximos de la impedancia proporcionan información relevante sobre los modos naturales de vibración de la estructura [5]. En particular, definen las frecuencias de resonancia características de la misma. En los casos descritos anteriormente, encontramos que las frecuencias propias para el cilindro abierto y el cerrado son armónicos naturales e impares respectivamente:

$$\text{Cilindro abierto : } f_n^a = \frac{nc}{2L} \quad [5]$$

$$\text{Cilindro cerrado : } f_n^c = (2n-1) \cdot \frac{c}{4L} \quad [6]$$

donde  $n$  es un número entero,  $c$  la velocidad del sonido en el aire y  $L$  la longitud axial del cilindro.

### Instrumentos de perfil cónico

El efecto principal de la conicidad en el comportamiento modal de la columna de aire es que el modo fundamental y los primeros modos aumentan en frecuencia [3]. La expresión aproximada de las frecuencias propias para el cono cerrado es:

$$\text{Cono cerrado : } f_n^c \approx (2n-1) \cdot \frac{c}{4L} \sqrt{1 + \left(\frac{8}{\pi^2}\right) \left(\frac{L}{x_0}\right) \left(\frac{1}{2n-1}\right)^2} \quad [7]$$

donde  $x_0$  es la longitud de truncamiento del cono. Se puede ver que en ambas expresiones, el cono converge a un cilindro ( $x_0 \rightarrow \infty$ ) o si consideramos armónicos elevados ( $n \rightarrow \infty$ ) las expresiones anteriores son idénticas a las del cilindro abierto y cerrado, [5] y [6] respectivamente.

### SIMULACIÓN NUMÉRICA

La geometría de la campana de una trompeta es compleja (figura 1) y no existe una solución sencilla para su impedancia acústica de entrada. Por esta razón, el estudio del comportamiento acústico de la campana se ha realizado por medio de simulaciones numéricas mediante el Método de Elementos Finitos.

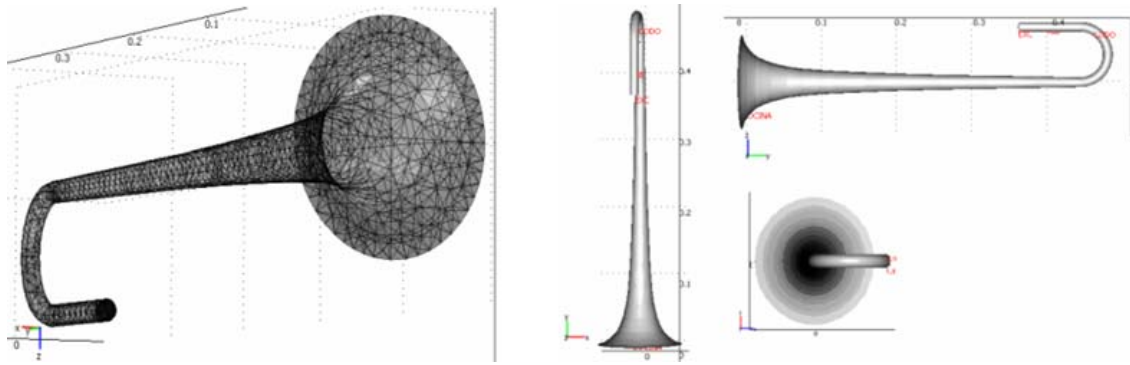


Figura 1: Geometría y malla de la campana de la trompeta simulada

La tabla 1 muestra las dimensiones de la campana y la figura 1 muestra la malla utilizada en la modelización de la campana de la trompeta a estudio.

<b>Longitud axial</b>	<b>0.63325m</b>
<b>Radio inicial</b>	<b>0.00635m</b>
<b>Radio final</b>	<b>0.0614m</b>

Tabla 1: Características geométricas de la campana de trompeta simulada

En la figura 2 se muestra la comparativa entre la impedancia de entrada de un cilindro de radio equivalente al radio mayor de la campana de la trompeta con el extremo a) cerrado y con el extremo b) abierto. Los máximos y los mínimos nos dan información sobre las frecuencias de resonancia del cilindro. Los máximos se corresponden con las frecuencias de resonancia del cilindro y los mínimos con las frecuencias de antiresonancia.

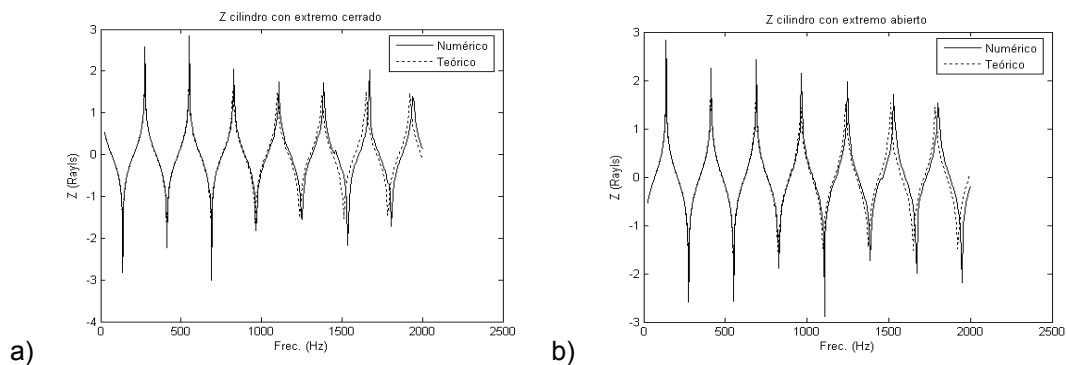


Figura 2: Impedancia acústica de entrada simulada y teórica de cilindro de radio  $r=0.0614$  con extremo: a) cerrado b) abierto.

Se puede ver que hasta 1500Hz aproximadamente hay un buen acuerdo entre la teoría y la simulación. A partir de esta frecuencia, la presencia de modos transversales deja de ser despreciable en la simulación provocando la separación entre el cálculo y la estimación teórica unidimensional. La hipótesis de la propagación de ondas planas es válida a bajas frecuencias [6], ya que el primer modo transversal se convierte en propagativo si

$$f_c > \frac{1.84 \cdot c}{2\pi \cdot a} \quad [11]$$

donde  $a$  es el radio extremo de salida de la campana. Según [11] la frecuencia de corte será inversamente proporcional al radio del extremo de la campana. En nuestro caso el valor de esta frecuencia es de 1630 Hz, lo cual explica la desviación entre el cálculo teórico y numérico.

Con el objetivo de evaluar el comportamiento modal de la campana de la trompeta, se presenta en la tabla 2 una comparativa de las frecuencias propias la campana de la trompeta a estudio con las de un cilindro de radio igual al radio de la salida del instrumento ( $R=0.0614$ ). En ella se puede ver que la relación entre los armónicos de la campana no se corresponde con los armónicos impares como en el caso del cilindro. Al igual que ocurre con el resonador cónico, a bajas frecuencias los modos propios de la campana se producen a mayor frecuencia que en el cilindro equivalente.

Comparación Trompeta con Cilindro cilíndrico				
Trompeta NUMÉRICO	Cilindro TEÓRICO	Trompeta NUMÉRICO	Cilindro TEÓRICO	Relación de frecuencias
Frec. (Hz)	Frec. (Hz)	Relación Armónica	Relación Armónica	(Cents)
179,5	135,4	1,0	1,0	487,9
437,7	412,5	2,4	3,0	102,6
714,7	683,3	4,0	5,0	78,0
991,8	960,3	5,5	7,1	55,8
1256,3	1237,4	7,0	9,1	26,2
1533,4	1514,5	8,5	11,2	21,5
1804,2	1785,3	10,1	13,2	18,2
2074,9	2062,3	11,6	15,2	10,5
2345,7	2333,1	13,1	17,2	9,3
2622,8	2610,2	14,6	19,3	8,3
2893,6	2887,3	16,1	21,3	3,8
3170,7	3158,1	17,7	23,3	6,9
3441,4	3435,1	19,2	25,4	3,2
3724,8	3712,2	20,8	27,4	5,9
3995,6	3989,3	22,3	29,5	2,7
4272,7	4260,1	23,8	31,5	5,1
4556,0	4537,2	25,4	33,5	7,2
4833,1	4807,9	26,9	35,5	9,1

Tabla 2: Frecuencias propias obtenidas de la simulación de la campana de la trompeta y un cilindro cilíndrico. Relación armónica y de frecuencias en cents

En la tabla 2 podemos observar que a partir de la frecuencia 1250 Hz las diferencias son aceptables dentro del margen de tolerancia en el diseño de un instrumento, pero para frecuencias inferiores las diferencias se incrementan a medida que las frecuencias disminuyen, esto es debido al efecto de la campana de la trompeta.

### Frecuencias propias cilindro-cono-trompeta

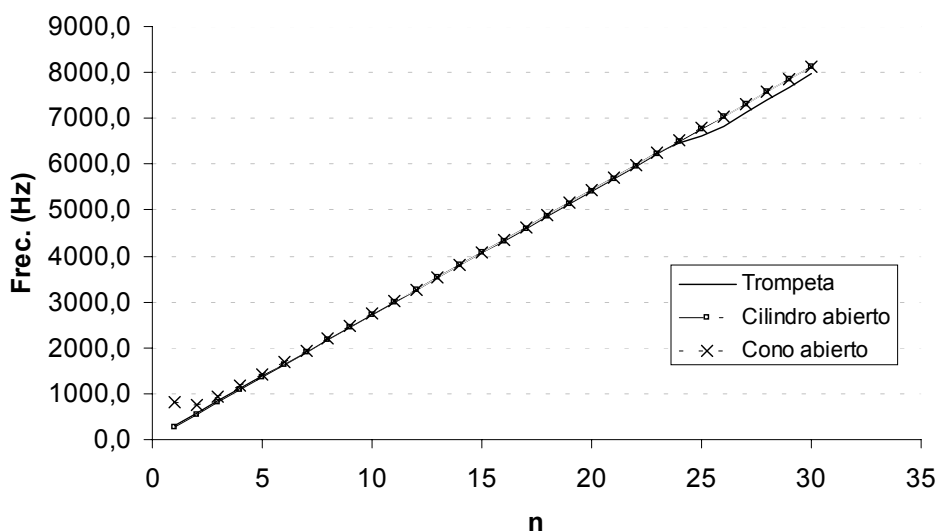


Figura 3: Frecuencias propias de diferentes resonadores (cilíndrico, cónico y campana de trompeta) en función del índice acústico modal.

En la figura 3 se comparan las frecuencias propias de la campana de la trompeta y dos resonadores cilíndrico y cónico de dimensiones equivalentes en función del índice modal. En la gráfica se distinguen tres comportamientos en la trompeta: 1) a bajas frecuencias, coincide con el comportamiento modal del cilindro, 2) a partir del séptimo modo (1900 Hz) los 3 resonadores presentan frecuencias propias muy similares y 3) entorno al modo 24 (6500 Hz) se observan diferencias importantes conforme la frecuencia aumenta con el cilindro y el cono. Podemos observar como a altas frecuencias la expresión del cono se aproxima a la del cilindro abierto.

## CONCLUSIONES Y AGRADECIMIENTOS

Los métodos analíticos proporcionan resultados válidos para problemas de geometría sencilla, pero no permiten explicar la propagación de ondas sonoras de elementos de sección variable. Las simulaciones numéricas con el método de elementos finitos de resonadores de sección cilíndrica muestran un buen acuerdo con los modelos teóricos en la estimación de las frecuencias propias. Este método se ha utilizado para analizar el comportamiento modal de la columna de aire de una estructura compleja como es la campana de una trompeta. Los resultados del cálculo numérico muestran que el comportamiento acústico modal de la campana de la trompeta es similar a bajas frecuencias al de un cilindro y a altas frecuencias presenta valores menores que el del cilindro y el cono.

Cuando comparamos los perfiles de las campanas de distintos instrumentos, vemos que es difícil cuantificar la importancia en las variaciones de geometría. Esta dificultad se debe principalmente al hecho de que muchos de los procesos de construcción son hechos de forma manual [7]. Finalmente no hay descripciones matemáticas para aplicar a las máquinas que dan la forma de la campana. Las formas que aplican estas máquinas son diseñadas individualmente y a menudo varían sólo un poco entre modelos. La caracterización es complicada por las diferentes técnicas que se usan para construir y dar forma a las campanas. El presente trabajo se ha realizado gracias al apoyo de Stomvi, empresa dedicada a la fabricación y venta de trompetas.

## REFERENCIAS

- [1] Keefe D. H.; "Woodwind air column models" Journal of Acoustical Society of America 88(1), Julio 1990
- [2] J.-P. Dalmont, C. J. Nederveen, N. Joly, 2001 Journal of Sound Vibration 244, 505-534 *Radiation Impedance of tubes with different flanges: Numerical and experimental investigations.*
- [3] A. H. Benade, E. V. Jansson. « On Plane and Spherical Waves in Horns with Nonuniform Flare I. Theory of Radiation, Resonance Frequencies, and Mode Conversion, Acustica 31(2): 80-98, 1974.
- [4] Keefe, D. H. ; Agulló, J. ; Barjau, A. (1993) "Theory of wave propagation in axisymmetric horns", Proceedings del SMAAC 1993. Stockholm.
- [5] R. Picó Vila, J. Gilbert, F. Gautier. Proceedings of the 7th CFA/DAGA, Strasbourg, France, 22 - 25 March 2004. Study of the input acoustic impedance of a vibrating cylindrical shell; consequences on clarinet-like instrument .T. Van Renterghem , D.
- [6] Munjal, M. L. (1987) "Acoustics of Ducts and Mufflers", John Wiley & Sons, New York
- [7] T.R. Moore, J.D. Kaplon, G. D. McDowall and K. A. Martin 2002 Journal of Sound Vibration 254, 777-786. *Vibrational modes of trumpet bells*