

## Excitabilidad en ultrasonido generado por magnetostricción

V. Sánchez-Morcillo, J. Martínez-Mora, J. Redondo, V. Espinosa, F. Camarena

*Grupo DISAO. Escuela Politécnica Superior de Gandía. Crta Nazaret-Oliva s/n. 46730 Grao de Gandía.*

[victorsm@fis.upv.es](mailto:victorsm@fis.upv.es)

**RESUMEN:** La generación paramétrica de ultrasonidos mediante la interacción magnetoelástica en el núcleo de un material ferromagnético constituye actualmente un tema de gran interés en la investigación en acústica no lineal, y es el fundamento de importantes aplicaciones, principalmente en conjugación de fase (WPC). Para la descripción teórica del sistema, se ha propuesto un modelo dinámico teniendo en cuenta dos posibles mecanismos de no linealidad: histéresis magnética e interacción magneto-acústica. En este trabajo hemos realizado el análisis de estabilidad de las soluciones estacionarias. El análisis revela la existencia de soluciones oscilatorias, consecuencia de una bifurcación de Hopf en el sistema. La dinámica de los campos es quasi-armónica cerca del punto de bifurcación. Disminuyendo el bombeo se observa un escenario más complejo. Primero, el campo acústico experimenta auto-pulsaciones, es decir, los ultrasonidos son emitidos en forma de pulsos de gran amplitud con gran separación temporal. Por debajo del umbral, se observa un comportamiento dinámico denominado excitabilidad: pequeñas perturbaciones de las soluciones en equilibrio, pero por encima de un cierto valor umbral, son amplificadas, y el sistema responde emitiendo un pulso acústico tras el cual regresa al estado de equilibrio.

**ABSTRACT:** The parametric generation of ultrasound resulting from magnetoelastic interactions in the core of a ferromagnetic material driven by an alternating magnetic field is an active subject of research in nonlinear acoustics, and the basis of important applications, mainly the wave phase conjugation. For the theoretical description of this system, a dynamical model taking into account both magnetic and acoustic nonlinearities has been proposed. In this work we have performed the stability analysis of the stationary solutions. The analysis reveals the existence of oscillatory solutions, which are a consequence of a Hopf bifurcation in the system. The dynamics of the fields is quasi-harmonic near the bifurcation point. Decreasing the pumping a more complex scenario is observed. First, the acoustic field experiences self-pulsations, i.e., the ultrasound is emitted in the form of bursts of high amplitude with a large separation in time. Below the threshold, where the parametric wave is not excited, we observe a dynamical behaviour which is called excitability: weak perturbations of the equilibrium (null) solution, but above a given threshold value, are amplified, and the medium emits an acoustic pulse which relaxes to the equilibrium state.

### 1. INTRODUCCION

La magnetostricción es un fenómeno esencialmente no lineal mediante el que se producen deformaciones en ciertos materiales bajo la acción de campos magnéticos. La mayoría de las aplicaciones de este fenómeno utilizan campos magnéticos de pequeña amplitud, haciendo uso únicamente de sus propiedades lineales, como es el caso de los transductores magnetostrictivos. La consideración de no linealidades en la descripción de estos procesos permite el descubrimiento de nuevos fenómenos, como por ejemplo la conjugación paramétrica de fase (WPC), siendo este actualmente un activo campo de investigación con aplicaciones en microscopía acústica [1], imagen por armónicos [2], etc. Una revisión de la



teoría del WPC y de los métodos utilizados se encuentra en [3]. Existe a su vez un elevado interés en el desarrollo de transductores magnetostrictivos que trabajen a elevadas potencias, donde los efectos no lineales deben ser tenidos en cuenta. La investigación en este campo avanza en paralelo con el descubrimiento de nuevos materiales magnéticos con altos valores de magnetostricción.

Por otra parte, los fenómenos paramétricos como el mencionado aparecen en diferentes campos de la ciencia no lineal, presentando características comunes, como son la biestabilidad, las autopulsaciones y el caos entre otras. Estas analogías han motivado nuestra investigación de fenómenos dinámicos complejos en sistemas magnetoacústicos excitados paraméricamente.

## 2. MODELO

El sistema considerado consiste en un circuito RLC en serie excitado por una fuente de tensión alterna a frecuencia  $2\omega$  y amplitud variable  $\varepsilon$ . La bobina tiene densidad de espiras  $n$ , sección transversal  $S$  y longitud  $l$ , y contiene una cerámica ferromagnética que es el origen de las no linealidades. Además, el material actúa a modo de resonador acústico de alta calidad si sus caras son lo suficientemente planas. Un modelo teórico de este sistema ha sido obtenido para el caso resonante en [4].

El sistema presenta dos tipos de no linealidad. La primera tiene su origen en la interacción magnetoacústica, que aparece a través de procesos de interacción fonón-magnón. En el dispositivo expuesto, la generación de ultrasonidos tiene lugar a la mitad de la frecuencia de bombeo. Este proceso se representa, en general, mediante una densidad lagrangiana de la forma  $L_{int} = \alpha_{ijk} H_i u_j u_k$  [4], donde  $u_k$  es la componente del desplazamiento acústico en la dirección  $k$  ( $k=x,y,z$ ) y  $\alpha$  es un tensor.

La inducción magnética total  $H$  actuando sobre el material tiene tres contribuciones,

$$H = H_0 + H_q(t) + H_{int}(t), \quad (1)$$

donde  $H_0$  es un campo externo constante producido, por ejemplo, por un imán permanente que envuelve el material cerámico o una bobina por la que discurre una corriente constante,  $H_q(t)$  es un campo oscilante inducido por la corriente alterna en el circuito, y finalmente  $H_{int}$  es el campo producido por las deformaciones del material, resultante de la interacción magnetoacústica. De la densidad lagrangiana se obtiene, suponiendo ondas longitudinales propagándose en el eje  $z$ ,  $u_x = u_y = 0$ , el campo magnético inducido magnéticamente tiene la forma

$$H_{int} = -\alpha \frac{1}{V} \int u(\vec{r}, t)^2 dV, \quad (2)$$

donde  $\alpha = \alpha_{zzz}$  es una constante de acoplamiento y  $V$  es el volumen de la bobina.

La segunda fuente de no linealidad tiene su origen en la histéresis magnética del material. Esta puede expresarse, en el caso de baja saturación, en términos de una susceptibilidad no lineal de tercer orden

$$B = \mu H + \frac{1}{6} \mu_0 \chi H^3. \quad (3)$$

Con todo ello, la ecuación del circuito queda de la forma:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon \cos(2\omega t) + \mu n \alpha \frac{d}{dt} \int u^2 dV + \chi n^2 H_0 \alpha \frac{d}{dt} \left( \frac{dq}{dt} \int u^2 dV \right), \quad (4)$$

mientras que las ondas acústicas en el material evolucionan según la ecuación de ondas

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = \alpha \left( n \frac{dq}{dt} - \alpha \frac{1}{V} \int u^2 dV \right) u. \quad (5)$$

Consideramos soluciones quasi-harmónicas en eje, es decir, cuyas amplitudes varían lentamente con el tiempo. Estas son de la forma

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{2} [Q(t) \exp(2i\omega t) + c.c.] \\ u(z, t) &= \frac{1}{2} [U(t) \exp(i\omega t) + c.c.] \sin(kz) \end{aligned}, \quad (6)$$

donde  $k = m\pi/L$  son los modos propios del resonador,  $2\omega = 1/\sqrt{LC}$  es la frecuencia de excitación. A partir de (4) y (5) se obtiene que las amplitudes lentas evolucionan según las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= P - X + Y^2 + i\eta |Y|^2 X, \\ \frac{dY}{d\tau} &= -\gamma(Y - XY^*), \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $X$ ,  $Y$  y  $P$  son proporcionales a la carga en el condensador, amplitud del campo acústico y tensión del generador, respectivamente. El parámetro  $\gamma$  representa el cociente entre las pérdidas eléctricas (debidas a la resistencia) y acústicas (flujo de energía en el resonador). Finalmente,

$$\eta = \frac{4\mu_0 \omega H_0 \gamma_U \chi}{\alpha v^2 \mu} \quad (8)$$

es el parámetro de no linealidad.

### 3. SOLUCIONES ESTACIONARIAS Y SU ESTABILIDAD

Las ecuaciones (7) poseen dos tipos de soluciones estacionarias. Para valores pequeños del bombeo, el campo acústico subarmónico está ausente, y el sistema se encuentra en la solución trivial dada por  $X = P$ ,  $Y = 0$ . Para valores mayores del bombeo, el campo subarmónico se enciende, y los valores de la intensidad están dados por

$$|X|^2 = 1, \quad |Y|^2 = \frac{1 + \sqrt{P^2(1 + \eta^2) - \eta^2}}{1 + \eta^2}, \quad (9)$$

que existen para valores de bombeo mayores que un umbral crítico dado por

$$P_c = \sqrt{\frac{\eta^2}{1 + \eta^2}} \quad (10)$$

Se ha estudiado la estabilidad de las soluciones homogéneas (9), realizando un análisis lineal de estabilidad. En particular, el análisis revela que existe una inestabilidad de Hopf (que da lugar a soluciones oscilatorias) cuando

$$0 = 4\eta^4(\gamma - 1)|Y|^8 + 2\eta^2(\gamma + 1)^2|Y|^6 + \eta^2(4\gamma^3 - 3\gamma - 3)|Y|^4 + 2(\gamma + 1)^2(2\gamma + 1)|Y|^2 - (2\gamma + 1)^2 \quad (11)$$

En la Figura 1 se muestra el diagrama de bifurcación de las amplitudes de los campos en función del bombeo  $P$ , para  $\gamma = 0.1$  y  $\eta = 0.65$ . Nótese que las soluciones son dinámicas por debajo del valor crítico de bombeo ( $P_{\text{hopf}} = 2.23$  en este caso).

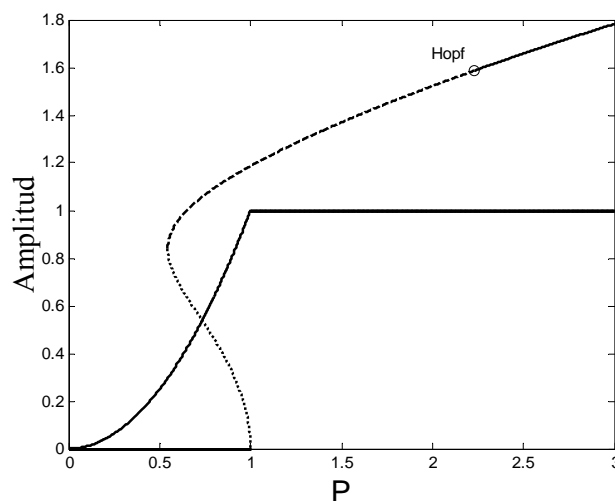


Figura 1- Diagrama de bifurcación de las soluciones estacionarias para  $\eta = 0.65$ .

## 4. OSCILACIONES Y EXCITABILIDAD

Hemos integrado las ecuaciones (7) para  $\gamma = 0.1$  y  $\eta = 0.65$  y distintos valores del bombeo. Cerca del umbral de la bifurcación de Hopf (que para estos parámetros se encuentra en  $P = 2.23$ ), la amplitud del campo acústico realiza oscilaciones quasi-armónicas, de acuerdo con las predicciones del análisis de estabilidad (Figura 2). Para valores inferiores del bombeo ( $P = 1.15$ ) la emisión se produce en forma de pulsos, regularmente espaciados (Figura 3). En ambas figuras se representa la variable acústica mediante la línea continua, y la variable eléctrica mediante la línea discontinua.

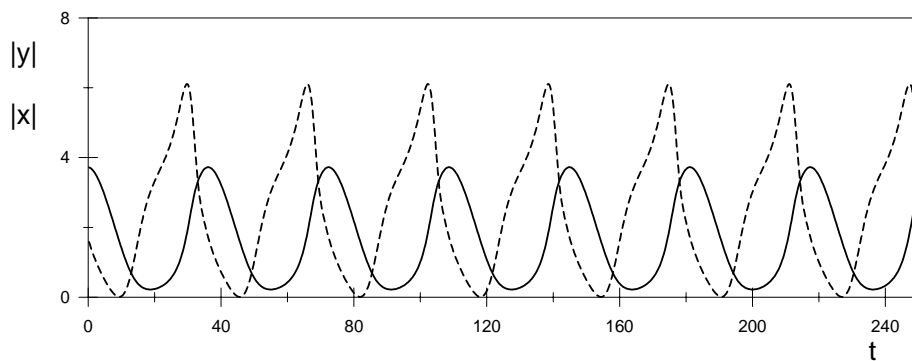


Figura 2- Soluciones oscilantes cerca de la bifurcación de Hopf.  $P = 1.75$

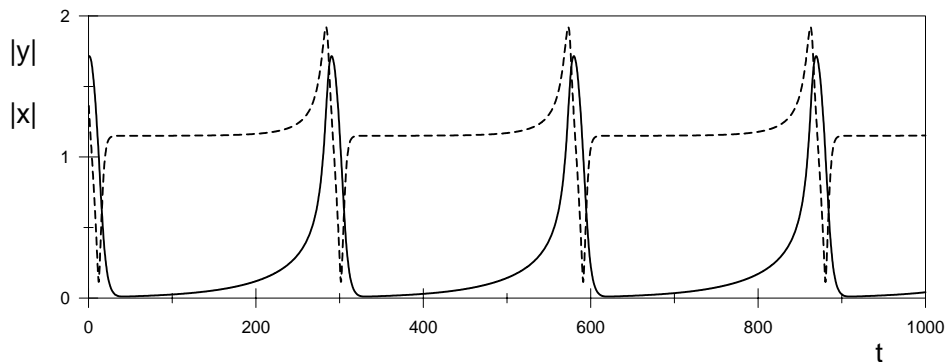


Figura 3- Soluciones autopulsantes cerca del umbral de emisión.  $P = 1.15$

Por debajo del umbral de excitación del subarmónico, donde el campo acústico debería de estar ausente, el sistema presenta una propiedad denominada excitabilidad: al perturbar el sistema, si la perturbación (ruido) supera un cierto valor umbral, se emite un único pulso, cuya amplitud es independiente de la magnitud de la perturbación. Sin embargo, el instante de emisión del pulso sí depende de dicha perturbación. Un ejemplo se muestra en la Figura 4, donde se ha escogido  $P = 0.97$  y cada pulso corresponde a perturbaciones de la solución trivial de distinta magnitud. Nótese que a menor perturbación, mayor es el tiempo de respuesta del sistema.

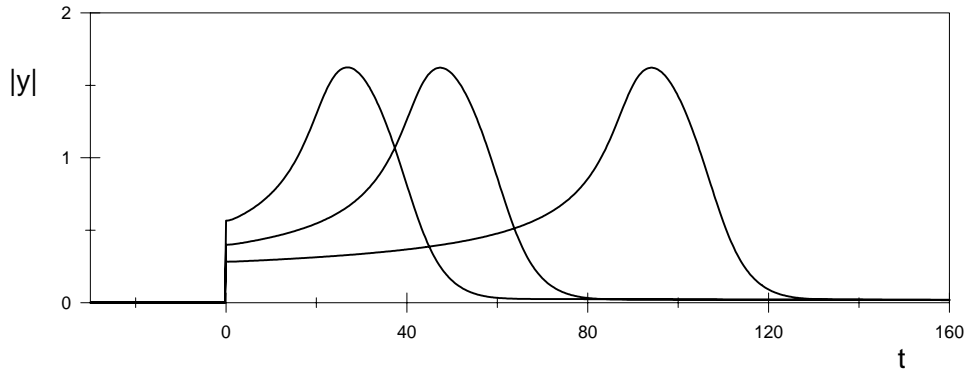


Figura 4- Comportamiento excitable para perturbaciones de distinta amplitud, en  $t = 0$ .

## 5. CONCLUSION

Se ha estudiado la dinámica temporal de un sistema típico de generación de ultrasonidos por magnetostricción. El sistema presenta soluciones oscilantes, tanto regulares como en forma de auto-pulsaciones. Se ha comprobado que, además, el sistema muestra comportamiento excitable. La excitabilidad es un fenómeno bien conocido en fisiología y química, y explica, por ejemplo, la propagación de los potenciales eléctricos en las neuronas. Recientemente, la excitabilidad se ha encontrado también en algunos modelos de láseres. De acuerdo con [5], en términos de las teorías de sistemas dinámicos, un sistema puede considerarse excitable cuando (i) el sistema no perturbado se encuentra en un estado de equilibrio estable, (ii) una perturbación por encima del umbral de excitabilidad provoca que la solución experimente un largo recorrido (en el espacio de fases) desde el punto de equilibrio, y (iii) el sistema regresa de nuevo al atractor, en un tiempo conocido como fase refractaria, tras la cual el sistema puede ser excitado de nuevo. Nuestro análisis numérico del modelo muestra todas estas características, probando el carácter excitable del sistema.

## REFERENCIAS

- [1] A. Brysev, L. Krutyansky, P. Pernod and V. Preobrazhensky, *Acoustic microscope based on magneto-elastic wave phase conjugator*, Appl. Phys. Lett. 76, 3133-3135 (2000).
- [2] L. Krutyansky, P. Pernod, A. Brysev, F. Bunkin and V. Preobrazhensky, *Supercritical parametric wave phase conjugation as an instrument for narrowband analysis in ultrasonic harmonic imaging*, IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. 49, 409-414 (2002).
- [3] A. Brysev, L. Krutyansky and V. Preobrazhensky, *Wave phase conjugation of ultrasonic beams*, Phys. Uspekhi 41, 793—805 (1998).
- [4] V.N. Streltsov, *Parametric generation in an acoustic resonator with nonlinear excitation*, BRAS Physics Supplement 61, 228-230 (1997).
- [5] J.D. Murray, *Mathematical biology*. Springer (1990).