SOBRE LA APLICACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN LA PREDICCIÓN DE LA TRANSMISIÓN DE RUIDO. EL PROBLEMA VIBRO ACÚSTICO, VENTAJAS Y LIMITACIONES

PACS: 43.40.At

Poblet-Puig, Jordi [1-2]; Rodríguez-Ferran, Antonio[1]
[1] Laboratori de Càlcul Numèric (LaCàN)
Departament de Matemàtica Aplicada III
E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain
Edifici C2, Campus Nord
Jordi Girona, 1-3 E-08034, Barcelona
Tel.: 00 34 934 011 073 Fax: 00 34 934 011 825
E-mail: jordi.poblet@upc.edu & antonio.rodríguez-ferran@upc.edu
[2] Amb el suport del Departament d'Universitats, Recerca i Societat de la Informació del Fons Social Europeu (DURSI).

ABSTRACT

The main numerical techniques actually employed in the modelling of sound transmission are rapidly reviewed. The most important restricting aspects for the application of the finite element method to vibro acoustic problems are presented. They are the cause of the restriction of the use of FEM to the low frequency range. However, several new numerical techniques (most of them concentrated in the invention of new methods for the Helmholtz equation in the mid frequency range) which use a priori known information about the solution are being developed. The new characteristics of them are mentioned and a small example of a structural calculation shown.

RESUMEN

Las principales técnicas numéricas que actualmente son empleadas en la modelización de la transmisión del sonido son rápidamente repasadas. Los aspectos más restrictivos en cuanto a la aplicación el método de los elementos finitos en problemas vibro acústicos son presentados. Éstos son la causa de la limitación del uso del FEM a las bajas frecuencias. Sin embargo, algunas técnicas numéricas (la mayoría de ellas se concentran en la invención de nuevos métodos de resolución de la ecuación de Helmholtz en el rango de las frecuencias medianas) que usan información sobre la solución conocida a priori están siendo desarrolladas. Sus nuevas características serán mencionadas y se mostrará la aplicación a un ejemplo estructural.

1.INTRODUCCIÓN

Conocer la capacidad aislante de los elementos estructurales de un edificio es fundamental para realizar un buen diseño acústico del mismo. El parámetro frecuentemente utilizado para ello es el índice de debilitamiento, $R = 10 \log_{10}(I_{tr}/I_{inc})$. I_{tr}/I_{inc} es el cociente entre la intensidad acústica transmitida y la incidente.

Su obtención mediante ensayos de laboratorio está regulada por la mayoría de normativas acústicas. Alternativamente, existen numerosas técnicas que nos permiten modelizar la transmisión de ruido. El hecho de que ninguna de ellas sea claramente preferida (y utilizada) a las otras indica que cada una tiene sus ventajas e inconvenientes. Por un lado el análisis estadístico energético (SEA [6]) es una aproximación probabilística al problema que no requiere grandes cálculos y se puede usar para frecuencias medianas y altas pero que requiere gran cantidad de información experimental y hace solamente una descripción global del problema. Existen también modelos analíticos simplificados [4][9][10][14][18] que afrontan el problema de una forma detallada y son aplicables para cualquier frecuencia. Sin embargo, las soluciones que podemos obtener están sujetas a hipótesis restrictivas como el hecho de suponer estructuras y dominios acústicos infinitos o periódicos. Finalmente se debe considerar la aplicación de métodos numéricos a los problemas vibro acústicos que son los que resuelven el problema de una manera más fiel a la realidad (hipótesis menos restrictivas) y los que nos aportan una información más detallada (cosa que puede llegar a ser un arma de doble filo) pero cuya aplicación implica un elevado coste computacional que los limita al rango de las frecuencias bajas.

En el apartado segundo se presentarán las características fundamentales de les métodos numéricos para bajas frecuencias [1] (Método de los elementos finitos, FEM y método de los elementos de contorno, BEM) haciendo énfasis en cuales son sus limitaciones reales y qué nos pueden aportar respecto a un método tradicional. En el tercer apartado se repasaran las principales técnicas numéricas que están siendo desarrolladas en la actualidad con el objetivo de ampliar el rango de aplicabilidad de los métodos numéricos y finalmente las conclusiones serán expuestas en el apartado cuarto.

2.MÉTODOS NUMÉRICOS PARA BAJAS FRECUENCIAS

La utilización de un método numérico implica, en la mayoría de los casos, la resolución del problema vibro acústico en el dominio frecuencial. Las ecuaciones de gobierno de éste,

$$\begin{aligned}
&\triangle\,\phi(\mathbf{x}) + k^2\phi(\mathbf{x}) = -\sum_s \mathrm{i}\omega\hat{G}_s\delta(\mathbf{x}_s,\mathbf{x}) && \text{in } \Omega_{ac}\\
&\nabla_{\mathbf{n}}\phi(\mathbf{x}) = -\mathrm{i}\rho_0\omega\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}} && \text{on } \Gamma_N\\
&\nabla_{\mathbf{n}}\phi(\mathbf{x}) = -\mathrm{i}\rho_0\omega A\phi(\mathbf{x}) && \text{on } \Gamma_R\\
&\phi(\mathbf{x}) = \bar{\phi}(\mathbf{x}) && \text{on } \Gamma_D\\
&\nabla_{\mathbf{n}}\phi(\mathbf{x}) = \rho_0\omega^2(\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}) && \text{on } \Gamma_{VA}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = -\rho_s\omega^2\hat{\mathbf{u}} && \text{in } \Omega_s\\
&\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} : (\nabla^s\hat{\mathbf{u}}) && \text{in } \Omega_s\\
&\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x},t) && \text{on } \Gamma_N^s\\
&\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \bar{\hat{\mathbf{u}}} && \text{on } \Gamma_D^s\\
&\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n} = -\phi(\mathbf{x})\mathbf{n} && \text{on } \Gamma_{VA}^s
\end{aligned}$$

derivadas de la teoría de la mecánica del medio continuo implican una descripción detallada tanto de la distribución de desplazamientos en la estructura como la distribución de presiones en los dominios acústicos. ϕ es la descripción espacial de la presión ($p(x,t) = \mathrm{Re}\{\phi(x)\, e^{i\omega t}\}$), $k = \omega/c$ siendo c la velocidad del sonido en el aire y $\omega = 2\pi f$, la pulsación del problema, σ son las tensiones en el sólido y ***u*** sus desplazamientos. Las excitaciones acústicas del problema pueden ser introducidas mediante fuentes sonoras puntuales (G_s) o vibraciones en un contorno Γ_N. Γ_D es el contorno Dirichlet donde la oscilación de la presión o los desplazamientos de la estructura pueden estar impuestos y Γ_R el contorno acústico donde se imponen condiciones de Robin, es decir, se modela la absorción de los materiales. Finalmente Γ_{VA} es el contorno donde los dominios acústicos y estructural están en contacto. Se exige solamente una continuidad en la dirección normal, donde la presión acústica se considera como una carga sobre la estructura y a su vez los desplazamientos de esta como desplazamientos impuestos en el contorno acústico. El problema tiene una dependencia harmónica en el tiempo y se las variables son números complejos.

El método de los elementos finitos [11][20] se ha utilizado con éxito en la modelización y estudio de la transmisión de ruido para las bajas frecuencias [17], constatándose una buena correlación con medidas experimentales. El método permite pasar de la formulación diferencial del problema a una formulación algebraica, debiéndose resolver para el problema acoplado acústica-estructura sistemas lineales de ecuaciones del tipo

$$\left[\omega^2\begin{pmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0}\\ \rho_a\mathbf{L}_{sf} & \mathbf{Q}\end{pmatrix} + \mathrm{i}\omega\begin{pmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{K} & -\mathbf{L}_{fs}\\ \mathbf{0} & \mathbf{H}\end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \phi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{f}}^s\\ \hat{\mathbf{f}}^{ac}\end{bmatrix}$$

donde **M**, **K**, **C** son matrices de masa, rigidez y amortiguamiento (viscoso) de un problema estructural, mientras **Q** y **H** son la matriz de masa y rigidez del problema acústico. **A** es la matriz que modela el amortiguamiento acústico causado por los materiales del contorno. Todas ellas son matrices de coeficientes complejos simétricas. $\mathbf{L}_{sf}$ y $\mathbf{L}_{fs}$ son las matrices que tienen en cuenta el acoplamiento entre el sólido y el fluido.

Este tipo de estructura matricial es una de las dificultades que implica el uso del FEM, especialmente si comparamos la situación del problema acoplado con problemas no acoplados puramente acústicos o estructurales donde es posible beneficiarse de la estructura en banda de las matrices. El sistema tiene una estructura de matriz "sparse" e implica la resolución de problemas no simétricos (autovalores). Además el hecho de que sea definido positivo o no, depende de la frecuencia del problema con lo cual no se puede saber *a priori*. Las técnicas existentes eficientes para resolver problemas estructurales (primera fila de bloques) o acústicos (segunda fila) sin acoplamiento no son utilizables para el caso acoplado. Se deben utilizar por lo tanto técnicas de resolución de sistemas (el método GMRES es la más común) alternativas que son considerablemente menos eficientes.

Otro de los grandes contratiempos es la necesidad de utilizar mallas más finas a medida que la frecuencia del problema aumenta, con el objetivo de obtener una solución correcta. Tradicionalmente se ha utilizado como criterio el uso de seis elementos por longitud de onda. Sin embargo, estudios más recientes [3][12] proponen como criterio para el tamaño de elemento en la resolución de la ecuación de Helmholtz

$$\frac{|\phi - \phi_h|_1}{|\phi|_1} \leq C_1 \bar{k}\bar{h} + C_2 \bar{k}^3 \bar{h}^2 \qquad \bar{k}\bar{h} < 1$$

donde *k* es un número de onda adimensional y *h* es el tamaño de elemento adimensional (se adimensionalizan con una longitud característica del problema). Las constantes C_1 y C_2 deben ser determinadas mediante calibración numérica. ϕ es la solución exacta y ϕ_h la numérica, obtenida para una malla de elementos de dimensión *h*.

Éste es un criterio mucho más restrictivo que entre otros fenómenos tiene en cuenta la dispersión numérica y que penaliza especialmente el método para las altas frecuencias. En la Figura 1 se muestra una aplicación práctica del criterio de estima del error *a priori* donde podemos ver que según el rango frecuencial se debe utilizar mallas diferentes para el dominio acústico o el estructural, que una estructura ligera es más exigente numéricamente hablando y cómo, a la larga, el mayor problema en cuanto a tamaño de elemento se refiere lo tendremos con los dominios acústicos debido al carácter no dispersivo de su ecuación constitutiva.

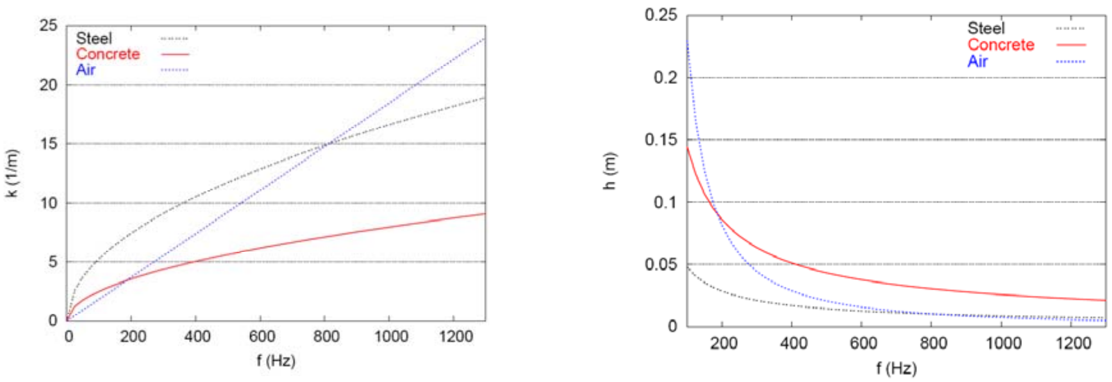

Figura 1: A la izquierda, número de onda en función de la frecuencia para un dominio acústico (Air), una estructura ligera (steel) y una de hormigón (concrete). A la derecha estimación del tamaño del elemento finito que se debe utilizar para una longitud característica del problema de 3 m.

Por otro lado, el BEM [5] es la alternativa al FEM por lo que respecta a las bajas frecuencias. La principal ventaja es que los dominios acústicos son solamente resueltos en el contorno (se reduce la dimensión del problema de volúmenes a superficies o de superficies a curvas), con lo cual el coste computacional debido a la discretización y la dimensión de los sistemas lineales de ecuaciones es mucho menor. Además éste es un método mucho más adecuado para los dominios acústicos no acotados o infinitos. No obstante, y a pesar de estas mejoras, el método sufre de los mismos males cuando la frecuencia aumenta con lo cual su uso está también limitado por el rango frecuencial. Además su aplicación es más delicada requiriéndose siempre métodos de resolución de ecuaciones para sistemas no simétricos y esquemas específicos para realizar integración numérica de funciones singulares.

El método sólo se puede aplicar si existen formulaciones integrales sobre el contorno como es el caso de la ecuación de Helmholtz,

$$\int_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{x})\big(\nabla_n \Psi(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\big)d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \Psi(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\big(\nabla_n \phi(\mathbf{x})\big)d\Gamma = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x})\delta_0(\mathbf{x})d\Omega = c(\mathbf{x}_0)\phi(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

$c(x_0)$ es un parámetro que depende de la suavidad del contorno y Ψ es la solución fundamental del problema (solución del problema en un dominio infinito al que se le aplica una fuerza / fuente puntual). Dicha función debe satisfacer la ecuación,

$$\triangle\Psi(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) + k^2\Psi(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x}_0)$$

Este hecho no es común para todos los problemas cosa que dificulta la generalización del BEM para algunos problemas estructurales donde puede ser conveniente seguir optando por formulaciones de elementos finitos estructurales (láminas, placas, vigas...).

En cualquiera de las dos opciones hay un factor extremadamente importante a considerar. La transmisión de ruido es un fenómeno “aleatorio” en el sentido que las situaciones particulares que se pueden dar en la realidad (contenido frecuencial de una excitación acústica, ángulo de incidencia de las ondas de presión, etc.) pueden ser múltiples. Es habitual querer conocer cual es la respuesta (por ejemplo el índice de debilitamiento de una pared) promedio de un sistema vibro acústico cosa que implica realizar diversos tipos de medianas (en bandas de frecuencia, en posiciones de una fuente sonora, etc.) entre bastantes situaciones analizadas. Esto quiere decir que habrá que resolver numerosos problemas individuales para, por ejemplo, poder promediar la respuesta del sistema en una banda frecuencial. No nos podemos restringir a resolver uno dos o diez situaciones individuales con lo cual debemos pensar en un modelo numérico que sea ágil y eficaz y que por lo tanto permita obtener resultados en un plazo de tiempo coherente.

3. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA FRECUENCIAS MEDIANAS

Con el objetivo de ampliar el rango de aplicación de los métodos numéricos en problemas vibro acústicos diversas técnicas numéricas están siendo desarrolladas. La mayor parte del trabajo se concentra en la resolución de la ecuación de Helmholtz (dominios acústicos). Ésta es la parte de mayor peso en cuanto las frecuencias aumentan pues requiere de una fina discretización y en general los dominios acústicos son de una dimensión superior a los estructurales (habitaciones de tres dimensiones frente a paredes de dos). En [7] podemos encontrar un buen resumen de las principales investigaciones actuales.

Gran parte de los nuevos métodos se basan en crear formulaciones que puedan incorporar de una forma ágil soluciones genéricas de la ecuación de Helmholtz (ondas planas viajando en una dirección arbitraria) de tal forma que se enriquezca su espacio de interpolación. Se quiere huir de la idea que una curva sinusoidal debe ser discretizada en pedacitos de polinomio.

Las propuestas más prometedoras en este sentido son el método de la partición de la unidad y los métodos de partículas (formulaciones element free Galerkin). En los métodos de partición de la unidad (no exclusivamente diseñados para problemas acústicos sino con aplicación en otras ramas del cálculo computacional) se enriquece la base de interpolación típicamente usada por el método de los elementos finitos de tal manera que se pueda interpolar con exactitud una (o varias) función $f(x)$,

$$f(x) = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1) \cdot (N_i(\mathbf{x}), \ldots, N_n(\mathbf{x}), N_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \ldots, N_n(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}))$$

Las funciones de enriquecimiento suelen ser escogidas como ondas planas viajando en dirección θ.

$$F_j(\mathbf{x}) = e^{\mathrm{i}k\mathbf{n}_j\mathbf{x}} = e^{\mathrm{i}k(\cos(\theta_j)x + \sin(\theta_j)y)}$$

La misma idea es utilizada en los métodos de partículas donde de forma natural se sustituye la base de interpolación formada por polinomios por otra formada de ondas planas. Se han probado con éxito, además, métodos iterativos donde estas familias de ondas varían escogiéndose a cada iteración la que nos proporcione una mejor solución. [2][16]

Otra alternativa frecuente son los métodos que rehuyen la discretización de los dominios y utilizando soluciones genéricas concentran todo el trabajo en el contorno (cumplimiento de condiciones de compatibilidad, velocidades o presiones impuestas y ecuación constitutiva de contornos absorbentes). Buen ejemplo de esto son la familia de los métodos de Trefftz [15][19], que utilizan interpolaciones del tipo

$$\mathbf{t}^C = \left\{ J_n(kr)e^{in\theta} \right\} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \phi^h(\mathbf{x}) = \phi_0 + \sum_{i=0}^{N} a_i t_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{t}$$

Aunque existe menos literatura en este aspecto, también se intenta mejorar la parte estructural del problema. En el método de los elementos espectrales estructurales [8], la solución exacta de las ecuaciones de gobierno del problema estructural es usada como nueva base de interpolación del elemento.

$$v(x) = C_1 e^{(\mathrm{i}kx)} + C_2 e^{(-\mathrm{i}kx)} + C_3 e^{(kx)} + C_4 e^{(-kx)} + \hat{v}^p(\hat{q}, x)$$

Para elementos unidimensionales el resultado es óptimo pues se obtiene la solución exacta y el método es insensible al rango frecuencial. Para elementos multidimensinales (láminas o placas) la mejora no es ni mucho menos tan trivial y a menudo el cambio de funciones de interpolación significa la aparición de nuevos problemas (como el requerimiento de esquemas de integración eficaces) o la asunción de hipótesis restrictivas. A modo de ejemplo se presenta en la Figura 2 la resolución de una estructura para un frecuencia de vibración de 500 Hz mediante el FEM y elementos espectrales. La mejora en cuanto al número de elementos a utilizar es palpable.

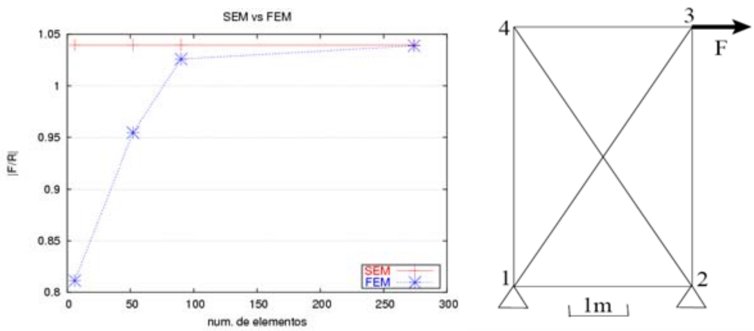

Figura 2: Comparativa de un problema de vibraciones estructural a una frecuencia de 500 Hz resuelto mediante elementos finitos lineales (FEM) y elementos finitos espectrales (SEM). Evolución de la relación fuerza aplicada entre reacción en función del número de elementos.

Finalmente existen también formulaciones mixtas en las que se renuncia a resolver el problema vibro acústico de una forma completa mediante elementos finitos o elementos de contorno y estos se complementan o bien con soluciones analíticas (de dominios acústicos con una geometría sencilla por ejemplo [13]) o bien se asume que el problema puede ser desacoplado y se resuelve cada parte por separado o incluso se formulan modelos mixtos con técnicas no determinísticas.

4. CONCLUSIONES

Los métodos numéricos son una técnica que nos permite modelar de una forma detallada y sin hacer hipótesis probabilísticas, de consideración de estructuras o dominios infinitos o hipótesis válidas sólo para altas frecuencias, el fenómeno de la transmisión de ruido. No obstante, los problemas derivados de la necesidad de utilizar mallas finas para frecuencias elevadas, de la necesidad de tener métodos de resolución de sistemas de ecuaciones adecuados para el tipo de matrices derivadas de problemas acoplados y sobretodo el alto número de problemas que hay que resolver para poder considerar múltiples situaciones limitan su aplicación a las bajas frecuencias.

Paralelamente se están desarrollando otras técnicas para ampliar su uso en el rango frecuencial y maximizar el tamaño de elemento. La mayoría de ellas se basan en la utilización de funciones de interpolación sinusoidales (soluciones genéricas de la ecuación de gobierno) en lugar de los clásicos polinomios. Otras alternativas, optan por simplificar el problema asumiendo que este puede ser resuelto de una forma desacoplada o bien mediante la combinación de soluciones analíticas y numéricas.

5. REFERENCIAS

[1]N.Atalla y R.J. Bernhard. Review of numerical solutions for low-frequency structural-acoustic problems. Applied Acoustics, 43: 271-294, 1994.

[2]Ph.Bouillard, V.Lacroix y E.De Bel. A wave-oriented meshless formulation for acoustical and vibro-acoustical applications. Wave Motion, 39:295-305, 2004.

[3]Ph. Bouillard y F.Ihlenburg. Error estimation and adaptivity for the finite element method in acoustics: 2D and 3D applications.Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 176(1-4):147-163, 1999.

[4]J.Brunskog. Acoustic excitation and transmission of lightweight structures. PhD thesis, Lund University, Engineering acoustics, LTH (Sweeden), 2002.

[5]R.D. Ciskowski y C.A. Brebbia. Boundary element methods in acoustics. SouthamptonBoston: Computational Mechanics Publications London New York: Elsevier Applied Science, cop., 1991.

[6]R.J.M. Craik. Sound transmission through buildings using statistical energy analysis. Gover, England, 1996.

[7]W.Desmet.Mid-frequency vibro-acoustic modelling: challenges and potential solutions. Procedings of ISMA 2002. International conference on noise and vibration engineering, Leuven, 16-18 Sept. 2002, 835-862.

[8]J.F. Doyle. Application of the spectral element method to acoustic radiation. NASA/CR-2000-210642, Purdue University, West Lafayette, Indiana, December 2000.

[9]F.Fahy. Sound and Structural vibration. Academic Press, London, 1989.

[10]C.Guigou-Carter y M.Villot. Modelling of sound transmission through lightweight elements with stiffeners. Building Acoustics, 10(3):193-209,2003.

[11]T.J.R. Hughes. The Finite element method : linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall International, 1987.

[12]F.Ihlenburg. Finite element analysis of acoustic scattering. Springer, 1998.

[13]P. Jean y J.F. Rondeau. A simple decoupled modal calculation of sound transmission between volumes. Acta acustica united with Acustica, 88: 924-933, 2002.

[14]R.Josse. La acústica en la construcciún. Gustavo Gili, Barcelona, 1975.

[15]E.Kita y N.Kamiya. Trefftz method: an overview. Adv. Eng. Softw., 24(1-3):3-12, 1995.

[16]V.Lacroix, Ph. Bouillard, y P.Villon. An iterative defect-correction type meshless method for acoustics. Int. J. Numer. Methods Eng., 57:2131-2146, 2003.

[17]S.Maluski y B.M. Gibbs. Application of a finite-element model to low-frequency sound insulation in dwellings. J. Acoust. Soc. Am., 108(4):1741-1751, 2000.
[18]A.Osipov, P.Mees y G.ermeir. Low-frequency airborne sound transmission through single partitions in buildings. Appl. Acoust., 52(3-4):273-288, 1997.
[19]M.Stojek. Least-squares trefftz-type elements for the helmholtz equations. Int. J. Numer. Methods, 41(5):831-849, 1998.
[20]O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor.The finite element method McGrawHill, 1991.