

MEDICIÓN DE LOS MODOS ESTRUCTURALES DE BARRAS NO-UNIFORMES USANDO SENSORES DISCRETOS DE DESPLAZAMIENTO Y DE STRAIN CON LAS CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD APROPIADAS

PACS: 43.40.At

Anthony, D.K.
Instituto de Acústica-CSIC
Serrano 144, 28006 Madrid
España
Tfn: 915 618 806
Fax: 914 117 651
E-mail: iaca344@ia.cetef.csic.es

ABSTRACT

The use of discrete PVDF sensor patches for the detection of structural modes of a thin-plate beam is considered. For this, an orthogonality condition based on the strain energy of the beam in flexion is adapted for discrete sensors. The results are compared with the use of discrete displacement measurements and also using different detection strategies.

RESUMEN

En este trabajo se ha considerado el uso de sensores discretos de PVDF en forma de *patch* para la detección de los modos estructurales de una barra no-uniforme. Para ello, se adaptó la condición de ortogonalidad basada en la energía de strain por la flexión de la barra para el uso de sensores discretos. Además, se compararon los resultados con medidas de desplazamiento puntuales en la barra y también se investigó el uso de diferentes estrategias de detección.

INTRODUCCIÓN

En la estrategia de control activo acústico-estructural (CAAE) (Fuller *et al*, 1996) es necesario medir los modos radiantes de las placas. Si éstos se controlan, reducir la radiación acústica está garantizado. Esos modos se puede representar a su vez por combinaciones de modos estructurales que se pueden captar mediante sensores de PVDF (strain) continuos. Aunque la desventaja del sensor continuo es que la señal resultante no necesita procesamiento posterior, los modos radiantes dependen de la frecuencia. Para resolver esto, se puede usar sensores discretos con los que se puede medir los modos estructurales y combinarlos con factores que dependen de la frecuencia [Berkoff, 2000].

Este artículo extiende esta técnica a barras no-uniformes. Usando sensores de PVDF, que miden la segunda derivada del desplazamiento (o el strain de la superficie), la condición de

ortogonalidad común, basada en la consideración de la energía cinética de la placa, no se puede utilizar. De este modo se necesita usar una condición de ortogonalidad definida en los mismos términos en los que miden los sensores. Aquí se extiende esa idea de sensores de PVDF continuos (ya investigada por el autor [Anthony & Cobo, 2004]) a sensores discretos y se comparan diferentes estrategias de detección de modos.

CONDICIÓN DE ORTOGONALIDAD BASADA EN LA ENERGÍA CINÉTICA DE UNA PLACA

i se considera una placa apoyada en el plano x - y se puede expresar su desplazamiento, W , en la dirección z , mediante la suma de sus autovectores ϕ , con sus amplitudes correspondientes A ,

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_i(x, y) \quad (1)$$

a energía cinética de una barra, que puede ser no-uniforme, con una masa por unidad de superficie, m'' , excitado por el modo ϕ_m es

$$KE_m = \frac{1}{2} \int_S m'' v_m^2 \phi_m^2 dS \quad (2)$$

aplicando la conservación de la energía del sistema, y calculando la energía cinética total del sistema para dos modos m y n que existen a la vez, la condición de ortogonalidad general es [Cremer & Heckl, 1988]

$$\int_S m'' \phi_m \phi_n dS = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \Lambda_m & m = n \end{cases} \quad (3)$$

para placas sencillas m'' es constante y por tanto puede salir fuera de la integral y así es como aparece normalmente esta definición de ortogonalidad.

CONDICIÓN DE ORTOGONALIDAD BASADA EN ENERGÍA DE STRAIN DE UNA BARRA

La Ec (3) sólo se puede aplicar a medidas de desplazamiento (o velocidad o aceleración) ya que la integral esta basada en el desplazamiento. Los sensores de PVDF (polyvinylidene fluoride) miden la segunda derivada [Lee & Moon, 1990] y por eso es necesario establecer una condición de ortogonalidad basada en estos términos.

La energía de strain de una placa en flexión viene dada por

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} D''(x, y) \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu(x, y) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu(x, y)) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (4)$$

donde D'' es la rigidez a flexión por unidad de superficie y ν es la constante de Poisson. Siendo ambas variables en x e y para tratar la barra como no-uniforme. Ha sido demostrado previamente por el autor [Anthony & Cobo, 2004] que una barra en forma de placa delgada y con las dimensiones dadas en la Figura 1, el componente dominante en la Ec (4) es el que se refiere a la flexión a lo largo del eje x (su eje principal). Por tanto la energía cinética de la barra se puede representar, con errores típicamente del 5%, por

$$U_p \approx \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} D''(x, y) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 dx dy \cdot \quad (5)$$

L_x y L_y son la longitud y la anchura de la barra respectivamente. Esta expresión nos permite definir una condición de ortogonalidad basada en la energía de strain para una barra homogénea pero de espesor no-uniforme [Anthony & Cobo, 2004] :

$$\int_0^{L_x} h_p^3(x) \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} dx \approx \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \Lambda_m^h & m = n \end{cases} \quad (6)$$

La Ec (6) está expresada en términos de la segunda derivada espacial del desplazamiento de los modos. Que es el parámetro medido por un sensor de PVDF delgado y dispuesto longitudinalmente al lo largo de la dirección x , y con una anchura variable ($S(x)$) :

$$q(t) \approx e^{j\omega t} \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_{y_s - bS(x)}^{y_s + bS(x)} h_p(x) \left(e_{31}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) dy dx \quad (7)$$

donde y_s es el eje del sensor y $q(t)$ es la carga eléctrica generada (véase la Figura 1). Si se define $S_d(x)$ como

$$S_d(x) = h_p^2(x) \frac{\partial^2 \phi_d}{\partial x^2} \quad (8)$$

el sensor detectará principalmente la amplitud del modo deseado ϕ_d .

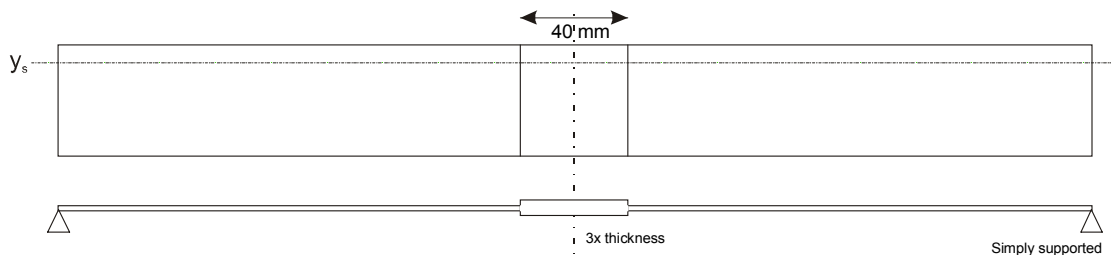


Figura 1. Detalle de la barra de acero inoxidable con dimensiones 380×40×2 mm. También se muestra el eje del sensor de PVDF, y_s .

MEDICIÓN DE LOS MODOS CON SENSORES DISCRETOS DE DESPLAZAMIENTO O DERIVADAS TEMPORALES

Como se ha discutido arriba, el uso de sensores discretos tiene ventajas a pesar de presentar el problema potencial del aliasing. En lo que sigue consideraremos una barra no uniforme como la que se muestra en la Figura 2. Se utilizó el modelo de Rayleigh-Ritz para resolver los modos de la barra. Aquí sólo se considera un modelo de 1-D, ya que el desplazamiento en la dirección y es constante. Esto no debería ser un problema ya que los sensores discretos se sitúan en el centro de la barra ($y_s = L_y/2$). Los modos se excitan con forma que la respuesta del desplazamiento a 5Hz es proporcional a $1/\omega_n$ (ω_n es la frecuencia natural de cada modo). El factor de amortiguamiento era de 0.002 para cada modo. En el modelo se consideraron 20 modos que abarca hasta una frecuencia de 15kHz.

La versión discreta de la Ec (3) para la detección de los modos con una medida de desplazamiento es

$$\sum_{p=1:P} m_e(p) \varphi_m(p) \varphi_n(p) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \Lambda_m & m = n \end{cases} \quad \text{for } m, n \leq P \quad m_e(p) = L_y \int_{x_a(p)}^{x_b(p)} m''(x) dx \quad (9a,b)$$

donde se puede definir la distribución de la masa, m_e , que es la masa correspondiente a cada sección donde x_m es la posición de medida en la placa, y x_a y x_b son los extremos de cada elemento (véase la Figura 2).

En la Figura 3a se pueden ver los resultados de detectar los primeros cinco modos con $P = 7$. En general la detección de los primeros cuatro modos es correcta, sin embargo hay un pequeño error en la detección del modo 5 cerca de ω_1 . Con $P = 5$ se deteriora la detección de los modos y en el rango de frecuencias consideradas aparece una respuesta del modo 6 en el sensor diseñado para el modo 1.

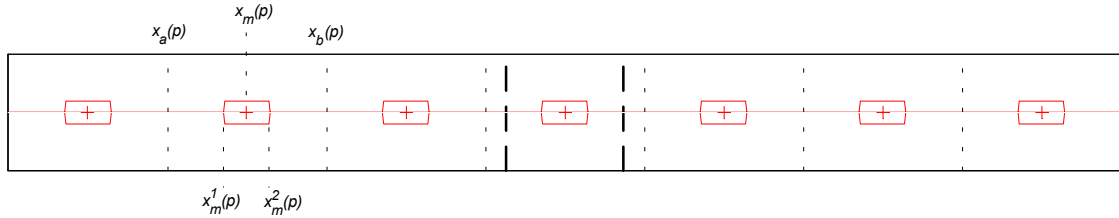


Figura 2. División de la barra en elementos (líneas discontinuas y delgadas) y los puntos de medición centrados x_m (+). También se muestra la ubicación de los sensores rectangulares de PVDF en rojo. La sección central con mayor espesor se indica con dos líneas gruesas.

Otro método que generalmente funciona mejor, es la estimación de las amplitudes de cada modo que minimiza el error de la energía de la barra medida. Este método se la llama LMS (Least Mean Squares) [Clark et al, 1991] y mediante él se calculan las amplitudes :

$$\mathbf{A}_{\text{opt}}(\omega) = (\Phi^T \mathbf{W}_s \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{W}_s \mathbf{S}(\omega) \quad (10)$$

Donde Φ es la matriz de los modos y \mathbf{W}_s es la matriz: $\text{diag}(m_e)$. \mathbf{S} es un vector de la desplazamiento a los puntos de medida a cada frecuencia y \mathbf{A}_{opt} es el vector resultante de las amplitudes estimadas. En la Figura 3b se muestra el resultado de modelizar la detección de los primeros cinco modos. También se puede ver que no incluir la matriz \mathbf{W}_s no tiene un efecto significativo. Con siete sensores la Ec (10) es mejor que la Ec (9). Otra vez se aprecian pequeños errores en los residuos y el efecto inevitable del aliasing del modo 6 con $P = 5$.

MEDICIÓN DE LOS MODOS CON SENSORES DISCRETOS DEL STRAIN PUNTUAL DE LA SUPERFICIE

Basado en la versión continua en la Ec (6) se puede construir una versión discreta de la condición de ortogonalidad,

$$\sum_{p=1:P} s_e(p) \varphi_m''(p) \varphi_n''(p) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \Lambda_m & m = n \end{cases} \quad s_e(p) = L_y \int_{x_a(p)}^{x_b(p)} D''(x) dx \quad (11a,b)$$

La ponderación de la energía de strain, s_e , viene dada como en la Ec (9) para el caso de una condición de ortogonalidad basada en la energía cinética. En general no se encuentran buenos resultados aplicando la Ec (11) directamente. Por lo que se procedió a utilizar el método LMS con la Ec (11). Ahora \mathbf{A}_{opt} se calcula como

$$\mathbf{A}_{\text{opt}}(\omega) = (\Phi''^T \mathbf{W}_s'' \Phi'')^{-1} \Phi''^T \mathbf{W}_s'' \mathbf{S}''(\omega) \quad \text{for } m, n \leq (P-2) \quad (12)$$

Φ'' es la matriz de segundas derivadas de los modos y \mathbf{W}_s'' es la ponderación de D como la matriz: $\text{diag}(s_e)$. El resultado de usar la Ec (12) para la detección de las amplitudes de los primeros cinco modos se muestra en la Figura 3c. Ahora se necesitan más sensores, $P = 9$, para conseguir una buena discriminación entre los modos. La inclusión de la matriz \mathbf{W}_s'' en la Ec (12) no parece ser importante. La detección espuria del modo 6 en muchos de los sensores no se puede evitar incluso aumentando P hasta 50.

EL USO DE SENSORES PVDF DEL TIPO *PATCH*

En la práctica no es fácil medir la segunda derivada en puntos individuales de la superficie de la barra. Es más práctico utilizar *patches* de PVDF, como se ha mostrado en la Figura 2. Cuando se integra sobre la longitud de un *patch* (con anchura constante) se obtiene que la salida es igual a la diferencia del gradiente (la primera derivada) del desplazamiento en cada extremo. La carga, q , de cada sensor, p , es (véase [Preumont, 2002] y adapta para calcular q)

$$q(t, p) = E d_{31} h L_y \left[W'(x_m^1(p)) - W'(x_m^2(p)) \right]. \quad (13)$$

x_m^1 y x_m^2 son los extremos de cada sensor. Ahora las señales de los *patches* de PVDF dependen de la primera derivada, y puede haber menos influencia de los residuos de otros modos que con la segunda derivada cuando los sensores son imperfectos. Esto resultó ser una desventaja de los sensores continuos de PVDF [Anthony & Cobo, 2004]. \mathbf{A}_{opt} se calcula como

$$\mathbf{A}_{\text{opt}}(\omega) = (\Phi'^T \mathbf{W}_s'' \Phi')^{-1} \Phi'^T \mathbf{W}_s'' \mathbf{S}'(\omega) \quad \text{for } m, n \leq (P - 2), \quad (14)$$

donde Φ' y \mathbf{S}' son las primeras derivadas de los modos y el desplazamiento de la barra respectivamente. Se mantiene la ponderación \mathbf{W}_s'' ya que realmente seguimos midiendo la segunda derivada a través del sensor de PVDF. El resultado se muestra en la Figura 3d para $P = 9$. Se aprecia que la calidad es la misma que con la Ec (12). Aunque, es destacable que con la Ec (14) la inclusión de la matriz \mathbf{W}_s'' es importante para conseguir la mejor detección.

TRABAJOS FUTUROS

Se verificarán estos resultados experimentalmente. Para ello, se espera fabricar barras continuas no-uniformes.

CONCLUSIONES

Para la detección correcta de los modos de barras no-uniformes se tiene que aplicar una condición de ortogonalidad según el parámetro medido. En el caso de sensores de PVDF esta condición se basa en la energía de strain de la barra. Se ha comparado la detección de los modos mediante la medida del desplazamiento y del strain de la superficie de la barra. Se pueden detectar los modos bien usando sensores discretos de PVDF de forma *patch*, pero se necesitan más sensores que para sensores de desplazamiento. También, se mejora la detección aplicando la condición de ortogonalidad usando una estrategia de detección de LMS (Least Mean Squares).

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece la financiación de este proyecto de la Comunidad de Madrid (GR/AMB/0736/2004). También agradece la ayuda de Paco Simón con el manuscrito.

REFERENCIAS

Anthony, D.K. and Cobo, P. 2004. Measuring the vibrational modes of non-uniform bars and plates with PVDF sensors using a strain-based orthogonality condition. Proceedings of International Conference on Noise & Vibration Engineering (ISMA 2004). Leuven, Belgium, 115-129.

Berkhoff, P.R. 2000. Sensor scheme design for active structural acoustic control. J. Acoust. Soc Am. Vol. 108, No. 3, (1991), pp. 1037-1045.

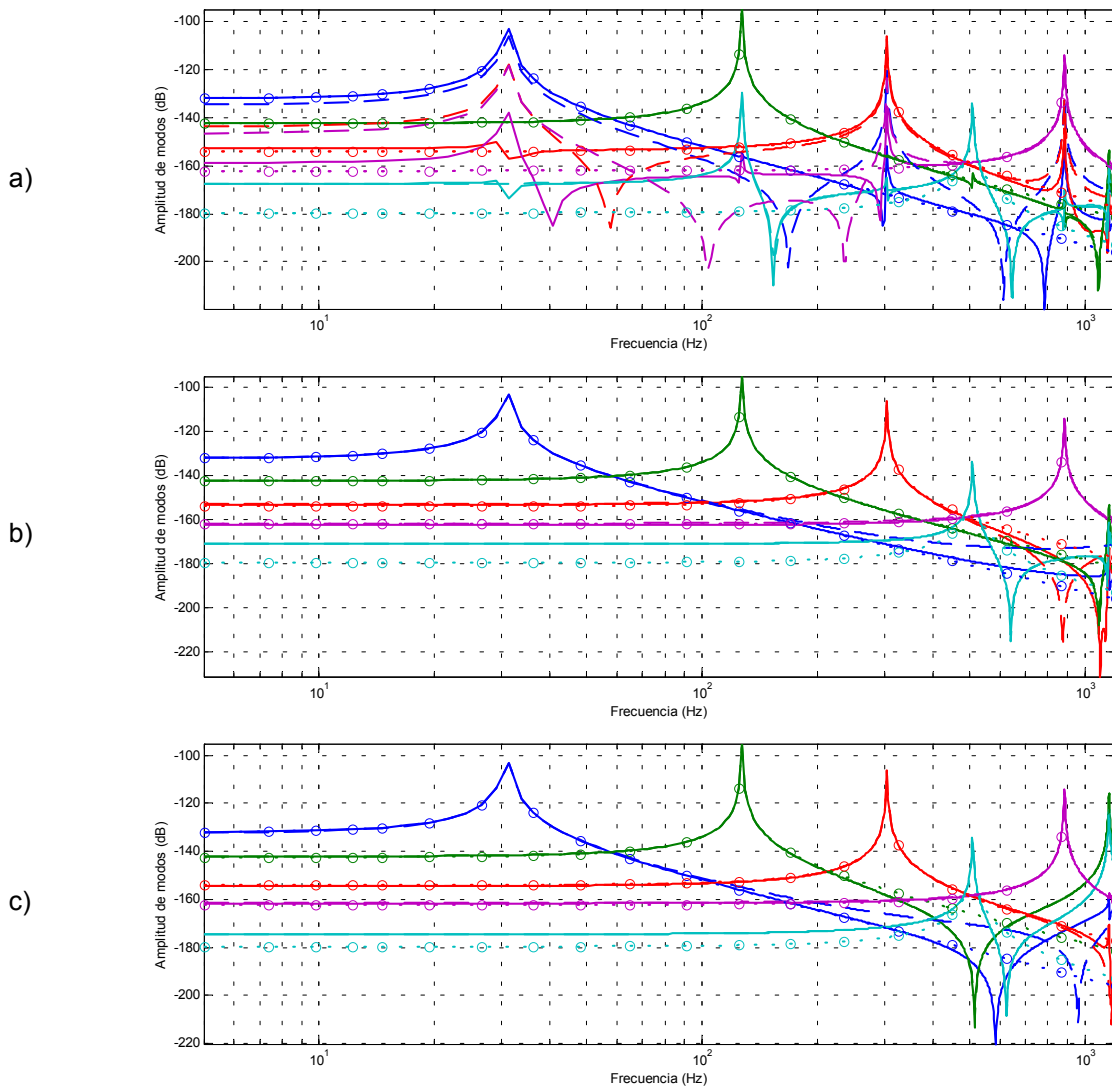
Clark, R.L., Fuller, C.R. and Wicks, A. 1991. Characterization of Multiple Piezoelectric Actuators for Structural Excitation. J. Acoust. Soc Am., 90(1), 346-357.

Cremer, L. and Heckl, M. 1988. Structure-Borne Sound, 2 ed (trans Ungar). Springer-Verlag, Berlin.

Fuller, C.R., Elliott, S.J., and Nelson, P.A. 1996. Active Control of Vibrations. Academic Press, London.

Lee, C.K., and Moon, F.C. 1990. Modal sensor/actuators. American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics, 57, 434-441.

Preumont, A. 2002. Vibration Control of Active Structures. Kluwer Academic Publishers. The Netherlands.



d)

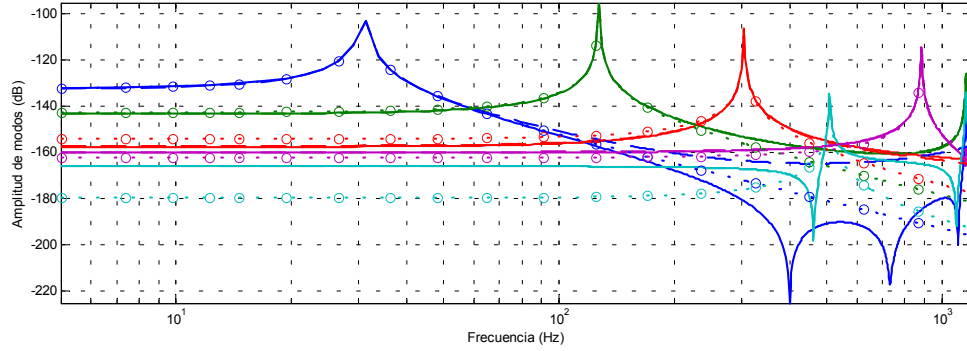


Figura 3. La respuesta de sensores diseñados de medir los primeros 5 modos estructurales de la barra, con frecuencias aproximadas: 30, 127, 304, 508 y 884 Hz. CONDICIÓN DE ORTOGONALIDAD BASADA EN ENERGÍA CINÉTICA: a) usando la Ec (9) con $P = 7$, b) usando la Ec (10) con $P = 7$. CONDICIÓN DE ORTOGONALIDAD BASADA EN ENERGÍA STRAIN: c) usando la Ec (12) con $P = 9$, d) usando la Ec (14) con $P = 9$.

Clave: línea sólida – detección con ponderación de masa/strain, línea discontinuo delgada – sin ponderación, discontinua gruesa con símbolo 'o' – valor verdadera de la amplitud de modo.